

EDWARD
FRENKEL

"Mãnh liệt, đam mê
và truyền cảm."
- New York Times

Tình yêu và toán học

TRÁI TIM CỦA THỰC TẠI ẨN GIẤU



nhà nam NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

TÌNH YÊU VÀ TOÁN HỌC

Tác giả: Edward Frenkel

Người dịch: Phạm Văn Kiều - Nguyễn Duy Khánh

Phát hành: Nhã Nam

Nhà xuất bản Tri Thức 12/2015



ebook©vctvegroup

Kính tặng cha mẹ tôi

Lời giới thiệu

Tôi gặp Edward Frenkel lần đầu vào năm 1999 khi anh đến Paris báo cáo trong hội thảo thường niên của Bourbaki. Tuy chỉ hơn tôi bốn tuổi nhưng vào thời điểm đó, khi tôi còn chập chững bước vào nghề, thì anh đã là giáo sư Đại học Berkeley, một ngôi sao đang lên trong bầu trời toán học. Phiên báo cáo của anh gây ấn tượng khó quên. Anh trình bày về một vấn đề hóc búa, và rất trừu tượng với một vẻ dễ dàng, thành thơi. Anh có một phong cách rất lạ so với các nhà toán học khác, một cái gì đó hao hao giống một tài tử điện ảnh.

Khoảng mười năm sau đó, tôi có dịp cộng tác khoa học với Edward trong một thời gian khá dài. Làm việc cùng nhau, tôi nhận ra ở anh nhiều thiên bẩm đặc biệt, trong đó có khả năng nắm bắt vấn đề rất nhanh để rồi phát biểu và diễn giải nó một cách vô cùng trong sáng và lịch lãm. Khả năng đó được Edward vận dụng trong quyển sách này để giải thích những khái niệm hóc búa của toán học và vật lý lý thuyết bằng ngôn ngữ mà trên nguyên tắc ai cũng hiểu được.

Viết về toán học cho công chúng hàm chứa nhiều rủi ro. Bạn luôn đi giữa hai bờ vực, một bên là ngôn ngữ hàn lâm có tính chất đánh đố đối với độc giả phổ thông, một bên là ngôn ngữ đời thường, đôi khi quá dễ dãi, làm bạn trượt chân rơi vào vực thẳm của sự thiếu chính xác, của sự tối nghĩa. Tác giả dường như đã tìm được sợi dây mỏng tang giữa hai bờ vực mà bước những bước thành thơi, y như ta tản bộ hăng sáng.

Một số người làm toán chuyên nghiệp, trong đó có tôi, chưa hoàn toàn thỏa mãn khi đọc cuốn sách này. Khi nói về Chương trình Langlands, tác giả dường như giữ im lặng về những gì sâu sắc nhất. Nhưng rất có thể, ta sẽ không công bằng khi mong đợi tác giả diễn đạt

những ý tưởng toán học sâu sắc nhất bằng ngôn ngữ tự nhiên, một việc rất có thể là bất khả.

Thực ra Chương trình Langlands và vật lý lý thuyết chỉ là món điểm tâm của quyển sách này. Món chính chính là tên của sách: “Tình yêu và toán học” mà nếu chúng ta bỏ chữ “và” đi thì sẽ còn đúng nghĩa hơn. Tác giả thuật lại câu chuyện tình yêu của mình với toán học, từ một cậu bé lớn lên trong một thành phố nhỏ của Liên bang Xô viết, được tiếp nhận vào môi trường toán học sôi động ở Moscow, rồi sau đó là Harvard, Berkeley.

Đối với một người ở “ngoại vi” như tôi, môi trường toán học Xô viết luôn là một bí mật đầy hấp dẫn. Phải chăng sự thiếu thốn vật chất và thông tin, không khí kỳ thị Do Thái (mà tác giả dành nhiều trang sách để đề cập tới), là một chất xúc tác trực tiếp hay gián tiếp làm cho toán học sinh trưởng. Liệu sự thiếu thốn vật chất và thông tin, kỳ thị sắc tộc, có tạo nên một môi trường lý tưởng cho sự phát triển của toán học? Câu chuyện của tác giả, được thuật lại một cách chân thực, cho phép độc giả bước một chân vào phía sau bức màn bí mật này.

Cảm ơn các dịch giả Phạm Văn Thiều, Nguyễn Duy Khánh, và Công ty văn hóa và truyền thông Nhã Nam đã mang quyển sách thú vị này tới tay độc giả Việt Nam.

NGÔ BẢO CHÂU

LỜI TỰA

Có một thế giới bí mật ngoài kia. Một vũ trụ song song đẹp đẽ và thanh nhã còn ẩn giấu, đan bện phức tạp với thế giới của chúng ta. Đó là thế giới toán học. Và nó vô hình với hầu hết mọi người. Cuốn sách này là lời mời gọi các bạn đến khám phá thế giới ấy.

Ta hãy thử xét nghịch lý sau: một mặt, toán học đan bện vào chính kết cấu đời sống thường ngày của chúng ta. Mỗi khi chúng ta thực hiện một giao dịch trực tuyến, gửi một tin nhắn, thực hiện thao tác tìm kiếm trên Internet, hay sử dụng một dụng cụ GPS, thì trong đó đều có sự tham gia của các công thức và thuật toán toán học. Nhưng mặt khác, toán học lại làm hầu hết mọi người sợ hãi: Theo lời nhà thơ Hans Magnus Enzensberger thì nó đã trở thành “một điểm mù trong nền văn hóa của chúng ta - một lãnh thổ xa lạ, mà chỉ có giới trí thức tinh hoa, một thiểu số người được khai sáng mới quyết định dẫn thân vào”. Rất hiếm khi, ông nói, chúng ta “gặp được một người khẳng định quyết liệt rằng chỉ cần nghĩ tới việc đọc một cuốn tiểu thuyết, hay ngắm một bức tranh hoặc xem một bộ phim là anh ta đã cảm thấy đau khổ vật vờ”, nhưng “cả những người có học vấn và hiểu biết” cũng nói một cách “vừa thách thức vừa kiêu hãnh” rằng toán học là “sự tra tấn thực sự”, hay một “con ác mộng” khiến họ “mất hứng thú”.

Sao lại có chuyện dị thường như vậy được? Tôi thấy có hai lý do chính. Trước tiên, toán học trừu tượng hơn các ngành khoa học khác, do vậy mà không dễ tiếp cận bằng. Tiếp đó, những gì chúng ta học trong trường phổ thông chỉ là một phần rất nhỏ của toán học, mà phần lớn đã được khám phá từ cả thiên niên kỷ trước. Toán học đã tiến bộ vượt bậc kể từ đó, nhưng những kho báu của toán học hiện đại vẫn bị giấu kín đối với hầu hết chúng ta.

Điều gì sẽ xảy ra nếu ở trường bạn phải học môn “hội họa” mà bạn chỉ được dạy cách sơn hàng rào? Điều gì sẽ xảy ra nếu bạn không bao giờ được giới thiệu các bức họa của Leonardo da Vinci và Picasso? Làm thế nào giúp cho bạn hiểu rõ được giá trị của hội họa không? Có khiến bạn muốn học thêm về nó không? Tôi e là không. Có lẽ bạn sẽ nói điều gì đó đại loại thế này: “Học vẽ ở trường chỉ phí phạm thời gian. Nếu cần phải sơn hàng rào thì tôi sẽ thuê người làm giúp.” Dĩ nhiên, điều này nghe thật nực cười, nhưng đó là cách mà toán học vẫn được giảng dạy, và do đó trong mắt hầu hết mọi người, việc học toán trở nên thật buồn tẻ. Trong khi những bức tranh của các bậc thầy vĩ đại đều dễ dàng kiếm được, thì toán học của các bậc thầy vĩ đại lại bị giấu biệt đi.

Tuy nhiên, toán học quyến rũ không chỉ vì vẻ đẹp thẩm mỹ của nó. Như câu nói nổi tiếng của Galileo: “Các định luật của Tự nhiên được viết bằng ngôn ngữ toán học.” Toán học là một phương pháp mô tả thực tại và hình dung ra thế giới vận hành như thế nào, một ngôn ngữ phổ quát đã trở thành tiêu chuẩn vàng của chân lý. Trong thế giới của chúng ta, ngày càng dựa nhiều vào khoa học và công nghệ, hơn bao giờ hết, toán học đã trở thành nguồn gốc của sức mạnh, sự thịnh vượng và tiến bộ. Do đó, những ai sử dụng trôi chảy thứ ngôn ngữ mới này sẽ đứng ở tuyến đầu của sự tiến bộ.

Một trong những quan niệm sai lầm thường thấy về toán học, đó là nó chỉ có thể được sử dụng như một “công cụ”: chẳng hạn, một nhà sinh học tiến hành nghiên cứu trên thực địa, thu thập dữ liệu, và sau đó là xây dựng một mô hình toán học phù hợp với những dữ liệu ấy (có lẽ với sự giúp đỡ của một nhà toán học nào đó). Cho dù đây là một thao tác quan trọng, nhưng toán học còn có thể cung cấp cho ta *thêm nhiều điều hơn nữa*: nó giúp tạo ra những bước nhảy vọt cách tân và đột phá mà chúng ta không thể làm bằng cách nào khác. Chẳng hạn, Einstein đã không cố ghép bất kỳ dữ liệu nào vào các phương trình khi ông hiểu rằng hấp dẫn làm không gian bị uốn cong. Thực tế, chẳng có dữ liệu nào như thế cả. Ở thời điểm đó, không ai có thể tưởng tượng được rằng

vũ trụ bị uốn cong; tất cả mọi người đều “biết” rằng vũ trụ là phẳng! Nhưng Einstein hiểu rằng đó là cách duy nhất để mở rộng lý thuyết tương đối hẹp của ông cho cả những hệ quy chiếu không quán tính, đi đôi với nhận thức sâu sắc của ông rằng hấp dẫn và gia tốc có cùng tác dụng. Đó là một thao tác trí tuệ trình độ cao trong địa hạt toán học, mà ở đó Einstein đã phải dựa trên công trình của một nhà toán học, Bernhard Riemann, được hoàn thiện 50 năm trước đó: Cấu trúc nào bộ của con người không cho phép chúng ta hình dung được những không gian cong có nhiều hơn hai chiều; chúng ta chỉ có thể tiếp cận chúng qua toán học. Và hãy thử đoán xem, Einstein nói đúng - vũ trụ của chúng ta *đúng là* cong, và hơn thế, nó đang giãn nở. Đó chính là sức mạnh của toán học mà tôi đang nói tới đây!

Có thể tìm thấy nhiều ví dụ như thế này, không chỉ riêng trong vật lý, mà trong cả những lĩnh vực khoa học khác nữa (chúng ta sẽ bàn về một số lĩnh vực đó dưới đây). Lịch sử cho thấy rằng khoa học và công nghệ được thay da đổi thịt với tốc độ nhanh chóng nhờ những ý tưởng toán học; thậm chí cả những lý thuyết toán học vốn được coi là trừu tượng và bí truyền sau này cũng trở thành thiết yếu cho những ứng dụng. Charles Darwin, công trình của ông vốn ban đầu không dựa trên toán học, sau này đã viết trong tự truyện rằng: “Tôi cảm thấy hối hận sâu sắc vì đã không đi đủ xa để ít nhất có thể hiểu được chút ít những nguyên lý tiên phong vĩ đại của toán học, những người được phú cho khả năng toán học dường như có thêm một giác quan nữa vậy.” Tôi coi đây như một lời khuyên tiên tri cho những thế hệ sau này rằng hãy biết lợi dụng tiềm năng vô tận của toán học.

Khi tôi lớn lên, tôi vẫn chưa ý thức được thế giới ẩn giấu của toán học. Giống như hầu hết mọi người, tôi nghĩ rằng toán học là một môn học cũ rích, nhạt nhẽo. Nhưng tôi đã gặp may: trong năm cuối cùng ở trường phổ thông, tôi đã gặp một chuyên gia toán học - người đã mở cho tôi cánh cửa vào thế giới diệu kỳ ấy. Tôi học được rằng toán học có đủ các khả năng vô hạn cùng vẻ đẹp và sự thanh nhã, cũng giống như thơ ca, hội họa và âm nhạc. Và tôi đã bắt đầu yêu nó.

Các độc giả yêu quý, với cuốn sách này, tôi mong muốn mang tới cho các bạn điều mà những người thầy và cố vấn của tôi đã mang lại cho tôi: lật mở sức mạnh và vẻ đẹp của toán học, giúp các bạn bước vào thế giới kỳ diệu ấy theo cách mà tôi đã bước vào, ngay cả khi các bạn thuộc mẫu người chưa từng dùng hai từ “toán học” và “tình yêu” trong cùng một câu. Toán học sẽ đeo đẳng bạn như nó đã làm với tôi, và thế giới quan của bạn sẽ không bao giờ còn như cũ.

ooo

Tri thức toán học không giống với bất kỳ loại tri thức nào khác. Trong khi nhận thức của chúng ta về thế giới vật lý luôn có thể bị bóp méo, thì nhận thức về chân lý toán học lại không thế. Đây là những chân lý khách quan, tất yếu, và bền vững. Một công thức hay định lý toán học luôn được hiểu như nhau đối với bất kỳ ai ở bất cứ đâu - bất kể giới tính, tôn giáo hay màu da; và nó vẫn được hiểu như thế đối với bất kỳ ai ở tương lai một nghìn năm sau nữa. Điều kỳ lạ là chúng ta sở hữu tất cả những kiến thức đó. Không ai có thể lấy bằng độc quyền cho một công thức toán học, nó là của chung để chúng ta chia sẻ. Không có gì trên thế giới này sâu sắc và thanh nhã nhưng lại dành sẵn cho tất cả mọi người như thế. Một kho tàng tri thức như vậy mà lại thực sự tồn tại là điều gần như không thể tin được. Nó quá quý giá đến mức không thể chỉ ban tặng cho “thiểu số người được khai sáng”. Nó thuộc về tất cả chúng ta.

Một trong những chức năng chính yếu của toán học là sắp xếp trật tự thông tin. Đó là cái làm nên sự khác biệt giữa những nhát cọ của Van Gogh với một giọt sơn thuần túy. Với sự phát triển của công nghệ in 3D (ba chiều), thực tại quen thuộc của chúng ta đang trải qua một sự biến đổi triệt để: mọi thứ đang di chuyển từ các đối tượng vật lý sang các thông tin và dữ liệu. Rồi chúng ta sẽ có thể nhanh chóng chuyển đổi thông tin thành vật chất theo ý muốn bằng cách sử dụng máy in ba chiều dễ dàng như chuyển một file PDF thành quyển sách hay file MP3

thành bản nhạc. Trong thế giới công nghệ mới này, toán học thậm chí sẽ đóng vai trò trung tâm hơn nữa: nó vừa là cách tổ chức và sắp xếp trật tự thông tin, vừa là cách thúc đẩy chuyển đổi thông tin thành thực tại vật lý.

Trong cuốn sách này, tôi sẽ mô tả một trong những ý tưởng toán học lớn nhất xuất hiện trong vòng 50 năm trở lại đây: Chương trình Langlands, được nhiều người coi là Lý thuyết Thống nhất Lớn của toán học. Đó là một lý thuyết quyến rũ dệt nên một mạng lưới những mối liên kết đầy phấn khích giữa các phân ngành toán học mà mới nhìn qua thì tưởng như cách nhau hàng năm ánh sáng: đại số, hình học, lý thuyết số, giải tích và vật lý lượng tử. Nếu chúng ta coi những ngành này như những lục địa trong thế giới ẩn giấu của toán học, thì Chương trình Langlands chính là dụng cụ viễn tải lý tưởng, có khả năng đưa chúng ta ngay lập tức từ lục địa này sang lục địa khác, và quay trở về.

Được đề xuất vào cuối những năm 1960 bởi Robert Langlands, nhà toán học hiện đang giữ văn phòng vốn của Albert Einstein tại viện Nghiên cứu cao cấp thuộc Đại học Princeton, Chương trình Langlands bắt nguồn từ một lý thuyết toán học có tính đột phá về đối xứng. Lý thuyết này đã được một thần đồng toán học Pháp, ngay trước khi bị giết trong một cuộc đấu súng ở tuổi hai mươi, đặt nền móng hai thế kỷ trước. Sau này nó đã được bổ trợ bởi một khám phá kinh ngạc khác, khám phá không chỉ chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat, mà còn cách mạng hóa tư duy của chúng ta về số học và phương trình. Và còn một nhận thức sâu sắc khác là toán học có *phiến đá Rosetta* riêng của nó, chứa đầy những loại suy và ẩn dụ bí ẩn. Đi theo những loại suy như thế, tựa như những nhánh sông nhỏ trong vùng đất toán học đầy quyến rũ, những ý tưởng của Chương trình Langlands tràn vào các địa hạt hình học và vật lý lượng tử, tạo ra trật tự và hài hòa từ những gì tưởng như hỗn độn.

Tôi muốn kể với bạn tất cả những điều trên nhằm giới thiệu các khía cạnh của toán học mà chúng ta hiếm khi nhìn thấy: nguồn cảm

hứng dồi dào, những ý tưởng sâu sắc, và những phát kiến gây sửng sốt. Toán học là một phương cách phá vỡ những rào cản của tập quán, một biểu hiện của trí tưởng tượng vô biên trong công cuộc kiếm tìm chân lý. Georg Cantor, người sáng tạo ra lý thuyết vô hạn, đã viết: “Bản chất của toán học nằm ở sự tự do của nó.” Toán học dạy chúng ta phân tích thực tại một cách rõ ràng, nghiên cứu các dữ kiện, và đi theo chúng cho dù chúng dẫn tới đâu. Nó khai phóng chúng ta khỏi những giáo điều và định kiến, cũng như nuôi dưỡng năng lực đổi mới. Do vậy, toán học cung cấp cho ta những công cụ chứ không chỉ là chính bản thân nó.

Những công cụ này có thể được sử dụng cho cả mục đích tốt và xấu, buộc chúng ta phải tính tới những tác động của toán học đối với thế giới thực. Chẳng hạn, cuộc khủng hoảng kinh tế toàn cầu phần lớn là do đã sử dụng rộng rãi những mô hình toán học kém cỏi trong các thị trường tài chính. Hầu hết những người ra quyết định không hoàn toàn hiểu về các mô hình đó do họ thiếu hiểu biết về toán học, nhưng lại kiên cố sử dụng chúng bằng mọi giá - do bị lòng tham thôi thúc - cho tới khi gần như phá nát toàn bộ hệ thống. Họ lợi dụng một cách bất minh việc tiếp cận thông tin nội bộ, và hy vọng rằng không bị ai lật tẩy vì những người khác chẳng ai tính đến chuyện hỏi xem các mô hình toán học đó vận hành như thế nào. Có lẽ, nếu có nhiều người hiểu được cách vận hành của những mô hình đó, cũng như hoạt động thực sự của hệ thống, thì chúng ta đã không bị lừa bịp lâu đến như vậy.

Ta hãy xét một ví dụ khác: năm 1996, một ban do chính phủ Mỹ chỉ định, đã bí mật thành lập và sửa đổi công thức Chỉ số giá tiêu dùng, thước đo lạm phát để xác định khung thuế, an sinh xã hội, chăm sóc y tế dành cho những người trên sáu mươi tuổi hoặc khuyết tật, và những chi trả có tính tới trượt giá khác. Hàng chục triệu người Mỹ đã phải hứng chịu hậu quả, nhưng chỉ có rất ít thảo luận công khai về công thức mới và những hệ lụy của nó. Và gần đây, lại có một cố gắng khác nhằm khai thác công thức bí ẩn này để len vào phá hoại nền kinh tế Mỹ.

Trong một xã hội có hiểu biết về toán học thì những vụ làm ăn dấm dúi như thế sẽ ít hơn rất nhiều. Toán học thì bằng sự chặt chẽ cộng với tính nhất quán của tri thức nhân với độ tin cậy của chân lý. Tất cả chúng ta nên tiếp cận những kiến thức và công cụ toán học cần thiết để bảo vệ mình trước những quyết định tùy tiện do một số ít kẻ có quyền lực thực hiện trong một thế giới ngày càng được dẫn dắt bởi toán học này. Nơi nào không có toán học, nơi ấy không có tự do.

ooo

Toán học chiếm một phần quan trọng trong di sản văn hóa của chúng ta ngang với hội họa, văn chương, và âm nhạc. Loài người chúng ta luôn thêm khát khám phá những điều mới lạ, vươn tới những ý nghĩa mới, hiểu rõ hơn về vũ trụ và vị trí của chúng ta trong đó. Chao ôi, chúng ta không thể khám phá ra một lục địa mới như Columbus, hay là người đầu tiên đặt chân lên Mặt trăng. Nhưng nếu tôi nói rằng bạn không cần phải giống buồm vượt đại dương hay bay vào không gian mới có thể khám phá những kỳ quan của thế giới, thì sao? Các kỳ quan ấy ở ngay đây, đan bện vào thực tại hiện thời của chúng ta. Toán học chi phối dòng chảy của vũ trụ, ẩn náu đằng sau mọi hình dạng và đường cong, chi phối mọi thứ, từ những nguyên tử nhỏ bé tới những vì sao lớn nhất.

Cuốn sách này là một lời mời tới thăm cái thế giới phong phú và đầy ngạc nhiên đó. Tôi viết nó cho những độc giả không hề có bất kỳ nền tảng toán học nào. Nếu bạn nghĩ rằng toán học khó hiểu, rằng không thể lĩnh hội được nó và cảm thấy sợ hãi nó, nhưng đồng thời lại tò mò muốn xem ở đó có điều gì đáng để biết hay không - thì cuốn sách này chính là dành cho bạn.

Mọi người thường sai lầm cho rằng phải học toán nhiều năm mới có thể đánh giá đúng về nó. Một vài người thậm chí còn nghĩ rằng hầu hết mọi người bẩm sinh đều không có khả năng học toán. Tôi không đồng ý: phần lớn chúng ta đã từng nghe và chỉ ít có một hiểu biết sơ

đăng về những khái niệm như hệ mặt trời, các nguyên tử và hạt cơ bản, chuỗi xoắn kép ADN, và nhiều thứ khác nữa mà không hề theo học các lớp về vật lý hay sinh học. Và không ai ngạc nhiên rằng những ý tưởng phức tạp ấy là một phần trong nền văn hóa của chúng ta, trong ý thức tập thể của chúng ta. Giống như vậy, mọi người đều có thể hiểu được những khái niệm và ý tưởng then chốt của toán học, nếu chúng được diễn giải một cách đúng đắn. Để làm điều đó, chúng ta không cần thiết phải học toán trong nhiều năm ròng; và trong nhiều trường hợp chúng ta có thể đi tắt ngay đến điểm mình cần và nhảy qua những bước trung gian tế nhị.

Vấn đề là ở chỗ: trong khi mọi người thường xuyên nhắc tới các hành tinh, các nguyên tử, và ADN, thì không hề có ai nói với bạn về những ý tưởng đầy quyến rũ của toán học hiện đại, như các nhóm đối xứng, những hệ thống số mới lạ mà trong đó $2 + 2$ không phải lúc nào cũng bằng 4, và những hình dạng hình học đẹp đẽ như các diện Riemann. Điều này cũng chẳng khác gì họ cứ chỉ cho bạn chú mèo con và nói rằng con hổ nhìn cũng giống như thế. Nhưng thực tế thì con hổ là loài khác hẳn. Tôi sẽ chỉ cho bạn thấy toàn bộ vẻ đẹp lộng lẫy của toán học, và bạn sẽ học được cách thưởng thức “tính đối xứng kinh khiếp” của nó, như lời lẽ đầy hoa mỹ của thi sĩ William Blake.

Đừng hiểu sai ý tôi: việc đọc cuốn sách này tự thân nó sẽ không giúp bạn trở thành một nhà toán học. Cũng không phải tôi khuyên mọi người nên trở thành nhà toán học. Mà hãy nghĩ như thế này: học một ít hợp âm sẽ giúp bạn có thể chơi kha khá một số bài hát bằng một cây guitar. Nó sẽ không giúp bạn thành nghệ sĩ guitar cừ khôi nhất thế giới, nhưng nó sẽ làm cuộc sống của bạn phong phú thêm. Trong cuốn sách này, tôi sẽ cho bạn thấy vài hợp âm của toán học hiện đại mà bạn chưa từng biết đến. Và tôi cam đoan nó sẽ làm cuộc sống của bạn phong phú hơn, thật đấy.

Một trong những người thầy của tôi, Israel Gelfand vĩ đại, thường nói rằng: “Mọi người nghĩ rằng họ không hiểu gì về toán cả, nhưng đó

hết thầy đều do cách bạn giải thích cho họ. Nếu bạn hỏi một người say rượu con số nào lớn hơn, $2/3$ hay $3/5$, anh ta sẽ không thể trả lời được. Nhưng nếu bạn đặt lại câu hỏi: cái nào tốt hơn, 2 chai vodka cho 3 người hay 3 chai vodka cho 5 người, anh ta sẽ nói ngay với bạn đáp số đúng: 2 chai cho 3 người, dĩ nhiên rồi.”

Mục tiêu của tôi là giải thích những điều như vậy bằng những từ ngữ mà các bạn có thể hiểu được.

Tôi cũng sẽ nói về những trải nghiệm của tôi trong quá trình trưởng thành ở Liên Xô cũ, nơi toán học đã trở thành một tiền đồn của tự do trong bối cảnh một chế độ toàn trị. Tôi đã bị từ chối vào học ở Đại học Tổng hợp Quốc gia Moscow bởi những chính sách phân biệt chủng tộc của Liên Xô. Các cánh cửa đã đóng sầm trước mặt tôi. Lúc ấy, tôi là một sinh viên bị ruồng bỏ. Nhưng tôi không đầu hàng. Tôi đã lén vào trường để nghe giảng và tham dự seminar. Tôi tự đọc sách toán, đôi khi rất khuya. Và cuối cùng, tôi đã đột phá qua được hệ thống đó. Họ không cho tôi vào qua cửa trước thì tôi bay vào qua cửa sổ. Khi bạn đang yêu, ai có thể ngăn cản được bạn?

Hai nhà toán học lỗi lạc đã đỡ đầu và trở thành những người thầy hướng dẫn tôi. Dưới sự dìu dắt của họ, tôi bắt đầu nghiên cứu toán học. Tôi vẫn là một sinh viên đại học, nhưng tôi đã đẩy xa được đường biên của những địa hạt chưa biết. Đó là thời kỳ hưng phấn nhất của đời tôi, và thậm chí tôi vẫn làm như thế mặc dù chắc chắn rằng chính sách phân biệt chủng tộc sẽ không bao giờ cho phép tôi trở thành một nhà toán học trong xã hội Xô viết.

Nhưng đã xảy ra một điều bất ngờ: những công trình toán học đầu tiên của tôi được mang lên ra nước ngoài và đã được biết đến, sau đó tôi được mời tới Đại học Harvard làm giáo sư thỉnh giảng ở tuổi hai mươi mốt. Thật kỳ diệu, điều đó lại xảy ra đúng vào thời điểm perestroika (cải cách) ở Liên Xô đã vén bức màn sắt, và công dân được phép ra nước ngoài. Vậy là tôi đã có mặt ở đó, đứng trên bục giảng của Đại học Harvard mà chưa có bằng tiến sĩ, nghĩa là lại phá vỡ hệ thống

một lần nữa. Tôi tiếp tục con đường học thuật của mình, con đường đã dẫn dắt tôi nghiên cứu ở tuyến đầu của Chương trình Langlands và cho phép tôi tham gia vào một số tiến bộ quan trọng trong lĩnh vực này trong suốt 20 năm nay. Trong những chương tiếp theo đây, tôi sẽ mô tả những thành quả chói lọi ấy của các nhà khoa học lỗi lạc cũng như những gì xảy ra đằng sau nó.

Đây cũng là một cuốn sách về tình yêu. Trước kia, tôi từng mừng rỡ tưởng ra một nhà toán học tìm kiếm “công thức của tình yêu”, và điều này đã trở thành tiền đề của bộ phim *Rites of Love and Math* (Những nghi thức của tình yêu và toán học) mà tôi sẽ nhắc tới ở phần cuối cuốn sách. Mỗi khi tôi trình chiếu bộ phim luôn có ai đó hỏi rằng: “Liệu có thực sự tồn tại một công thức cho tình yêu hay không?”

Tôi đáp rằng: “Mọi công thức mà chúng ta phát hiện đều là công thức của tình yêu.” Toán học là suối nguồn của những kiến thức sâu sắc phi thời gian, chúng đi vào bản chất của vật chất và thống nhất chúng ta qua các nền văn hóa, các lục địa, và các thế kỷ. Tôi ước mong sao tất cả chúng ta đều có thể nhìn thấy, yêu mến, và kinh ngạc trước vẻ đẹp thần thánh cùng sự hài hòa thanh nhã của những ý tưởng, công thức, và phương trình, bởi chúng sẽ mang lại thêm rất nhiều ý nghĩa cho tình yêu giữa chúng ta với nhau và với thế gian này.

MỘT HƯỚNG DẪN CHO ĐỘC GIẢ

Tôi đã rất nỗ lực mô tả các khái niệm toán học trong cuốn sách này theo cách đơn giản và trực quan nhất. Tuy nhiên, tôi nhận ra rằng có một vài phần của cuốn sách hơi nặng nề về mặt toán học (đặc biệt là trong các chương 8, 14, 15 và 17). *Sẽ không có vấn đề gì nếu bạn bỏ qua* những phần có vẻ rối rắm và tẻ nhạt đó trong lần đọc đầu tiên (đây là cách mà bản thân tôi thường làm). Sau này, khi đã được trang bị những kiến thức mới thu nhận, quay trở lại những phần đó bạn sẽ thấy dễ tiếp thu hơn. Nhưng thường thì cũng không nhất thiết phải làm như vậy thì mới hiểu những phần tiếp theo.

Có lẽ sẽ tuyệt vời hơn nếu một vấn đề nào đó vẫn còn mơ hồ. Đó là cách tôi cảm nhận trong suốt 90 phần trăm thời gian làm toán, vậy nên chào mừng đến với thế giới của tôi! Cảm xúc rồi bời (thậm chí đôi lúc là thất vọng) là phần không thể thiếu để trở thành một nhà toán học. Nhưng hãy nhìn vào khía cạnh tốt đẹp của vấn đề: cuộc sống mới thật nhàm chán làm sao nếu ta có thể hiểu được mọi thứ mà chẳng mấy khó khăn! Điều khiến việc làm toán thực sự phấn khích chính là khao khát vượt qua sự bối rối này; để thấu hiểu; để vén lên bức màn che phủ những điều chưa biết, và cảm xúc hân hoan trào dâng khi hiểu rõ một vấn đề nào đó thực sự đáng để ta bỏ công ra.

Một vài khái niệm toán học trong cuốn sách này (đặc biệt là trong những chương cuối) sẽ không được mô tả một cách thật chi tiết. Trọng tâm mà tôi hướng tới là bức tranh toàn cục và những quan hệ logic giữa những khái niệm khác nhau và giữa những nhánh khác nhau của toán học, chứ không phải là các vấn đề nặng tính chuyên ngành. Những khảo luận sâu hơn thường được để riêng trong phần chú thích ở cuối sách, nơi cũng liệt kê các tài liệu tham khảo và tài liệu gợi ý nên đọc

thêm. Tuy nhiên, mặc dù các chú thích ở cuối sách có thể giúp nâng cao tầm hiểu biết của bạn, nhưng nếu muốn, bạn cũng có thể bỏ qua (chí ít, là trong lần đọc đầu tiên).

Tôi đã cố gắng tối giản hóa việc sử dụng các công thức - lựa chọn cách giải thích bằng lời nói mỗi khi có thể. Nhưng vẫn có một số công thức xuất hiện. Tôi nghĩ rằng hầu hết đều không đáng sợ; trong mọi trường hợp, bạn có thể thoải mái bỏ qua nếu thích.

Một lời cảnh báo về các thuật ngữ toán học: khi viết cuốn sách này, tôi rất ngạc nhiên khi khám phá ra rằng một số thuật ngữ mà các nhà toán học sử dụng theo một cách riêng lại có nghĩa khác hoàn toàn đối với những người không nghiên cứu về toán, chẳng hạn, đối với các nhà toán học từ “tương ứng” có nghĩa là một mối liên hệ giữa hai loại đối tượng (như trong “tương ứng 1-1”), chứ không phải nghĩa thường thấy nhất của nó. Có những thuật ngữ khác cũng vậy, như các từ “biểu diễn”, “hợp thành”, “vòng”, “đa tạp”, và “lý thuyết”. Mỗi khi phát hiện thấy vấn đề này, tôi sẽ có lời giải thích rõ. Và bất cứ khi nào có thể, tôi sẽ chuyển những thuật ngữ toán học tối nghĩa thành những thuật ngữ có nghĩa rõ ràng hơn (chẳng hạn, tôi sẽ viết “quan hệ Langlands” thay vì “tương ứng Langlands”). Bạn sẽ thấy hữu ích nếu tham khảo mục Thuật ngữ mỗi khi gặp phải từ nào không rõ nghĩa.

Xin vui lòng truy cập trang web của tôi (<http://edwardfrenkel.com>) để cập nhật và tìm những tài liệu hỗ trợ, đồng thời vui lòng gửi email cho tôi để chia sẻ những suy nghĩ của bạn về cuốn sách này (địa chỉ trong website nói trên). Tôi luôn đánh giá cao phản hồi từ các bạn.

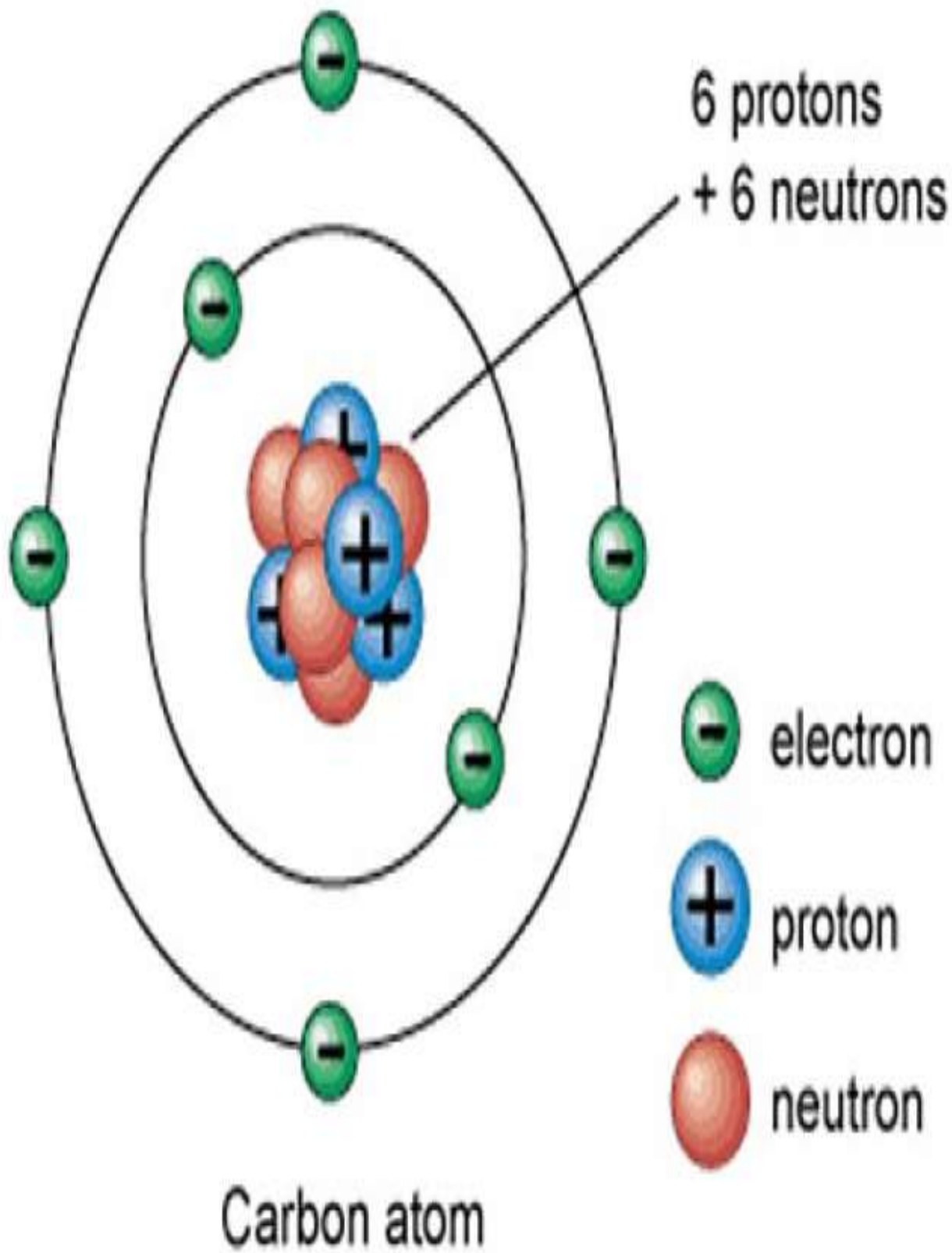
Chương 1

MỘT QUÁI VẬT BÍ ẨN

Làm thế nào để trở thành một nhà toán học? Điều ấy có thể xảy ra theo nhiều cách. Hãy để tôi kể cho các bạn biết nó đã xảy ra với tôi như thế nào.

Có thể bạn sẽ ngạc nhiên, nhưng quả thật, khi còn học ở trường phổ thông tôi rất ghét toán. Vâng, nói “ghét” thì nghe có vẻ hơi quá. Chỉ đơn giản là tôi không thích nó. Tôi đã nghĩ rằng nó khá tẻ nhạt. Tôi có thể làm hết các bài tập, chắc chắn là thế, nhưng tôi không hiểu tại sao mình lại làm chúng. Tài liệu mà chúng tôi thảo luận trên lớp có vẻ như lạc lõng, chẳng có liên quan gì tới tôi cả. Thứ làm tôi thấy thực sự phấn khích lại là môn vật lý - đặc biệt là vật lý lượng tử. Tôi đọc ngẫu nhiên mọi quyển sách thường thức mà tôi có thể kiếm được về chủ đề đó. Tôi lớn lên ở Nga, nơi những cuốn sách như thế rất dễ kiếm.

Tôi từng rất mê đắm thế giới lượng tử. Kể từ thời cổ đại, các nhà khoa học và triết gia đã mơ ước mô tả được bản chất cơ bản của vũ trụ - một số người thậm chí còn đặt giả thuyết rằng toàn bộ vật chất được cấu thành từ các phần tử vô cùng nhỏ gọi là nguyên tử. Đầu thế kỷ 20, nguyên tử đã được chứng minh là tồn tại, nhưng cũng khoảng thời gian đó, các nhà khoa học đã khám phá ra rằng, mỗi nguyên tử lại có thể chia nhỏ hơn nữa. Mỗi nguyên tử, hóa ra bao gồm một hạt nhân nằm ở giữa các electron quay xung quanh. Rồi chính hạt nhân lại được tạo bởi các proton và neutron, như được chỉ ra trong hình dưới đây.



Nguyên tử carbon

Nhưng các neutron và proton thì sao? Những cuốn sách thường thức mà tôi đọc cho biết rằng chúng được tạo thành từ những hạt cơ bản gọi là “quark”.

Tôi thích cái tên quark, và tôi đặc biệt thích cách mà người ta đặt tên cho chúng. Nhà vật lý khám phá ra những hạt này, Murray Gell-Mann, đã mượn cái tên “quark” từ cuốn sách *Finnegans Wake* (Thức canh Finnegans) của James Joyce, trong đó có một bài thơ giấu nhại như sau:

Ba quark dành cho ngài Mark!

Ngài chả được gì hơn tiếng quát ấy thôi.

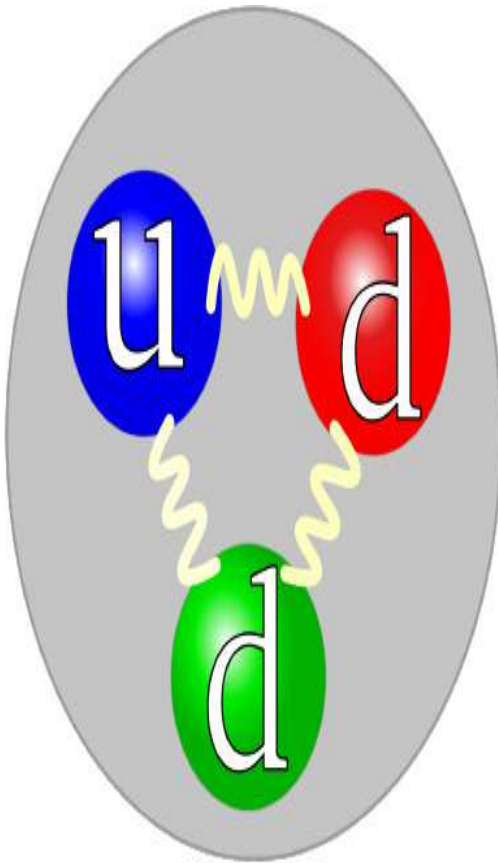
Các cái khác là vô nghĩa hết

Dù ngài có trong tay mọi thứ trên đời.

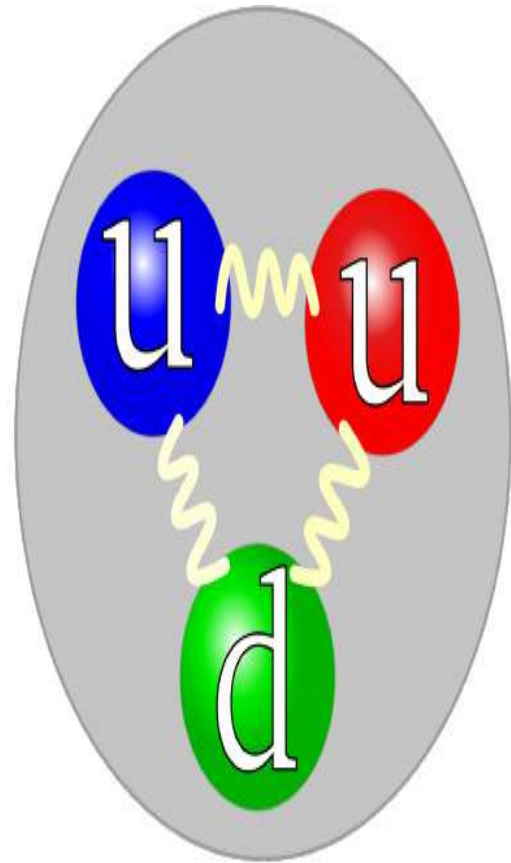
Tôi nghĩ một nhà vật lý lại đặt tên cho một hạt dựa theo một cuốn tiểu thuyết thì quả là chịu chơi. Mà nhất lại là một cuốn tiểu thuyết phức tạp và không hề tầm thường như cuốn *Finnegans Wake*. Tôi lúc đó chắc mới khoảng mười ba tuổi, nhưng ở tuổi ấy tôi đã biết rằng các nhà khoa học thường được cho là những sinh vật sống ẩn dật và lập dị, họ đắm chìm trong những nghiên cứu của mình đến mức bàng quan với mọi khía cạnh khác của cuộc sống như Nghệ thuật và Khoa học nhân văn. Tôi thì không giống như thế. Tôi có rất nhiều bạn, thích đọc sách, và có nhiều sở thích khác ngoài khoa học. Tôi thích chơi bóng đá và dành vô số thì giờ để đuổi theo trái bóng cùng các bạn mình. Cũng vào khoảng thời gian đó, tôi đã khám phá ra những bức tranh của trường phái Ấn tượng (bắt đầu với một tập sách lớn về chủ nghĩa Ấn tượng tôi tìm được trong thư viện của cha mẹ mình). Van Gogh là họa sĩ mà tôi ưa thích. Bị quyến rũ bởi các tác phẩm của ông, tôi thậm chí đã cố gắng tập vẽ. Tất cả những sở thích đó đã thực sự khiến tôi nghi ngờ liệu mình có thực sự sinh ra để trở thành một nhà khoa học hay không. Do vậy, khi tôi đọc được rằng Gell-Mann, một nhà vật lý vĩ đại, người đã được trao giải thưởng Nobel, cũng có những sở thích đa dạng như vậy

(không chỉ văn chương, mà cả ngôn ngữ học, khảo cổ học...) tôi cảm thấy rất hạnh phúc.

Theo Gell-Mann, có hai loại quark, “lên” (up) và “xuống” (down), và các cách kết hợp khác nhau của chúng mang lại cho các neutron và proton các đặc tính riêng. Một neutron được tạo thành từ 2 quark down (viết tắt là d) và 1 quark up (viết tắt là u), còn 1 proton được tạo thành từ 2 quark u và 1 quark d , như chỉ ra trên các hình vẽ dưới đây.



Neutron



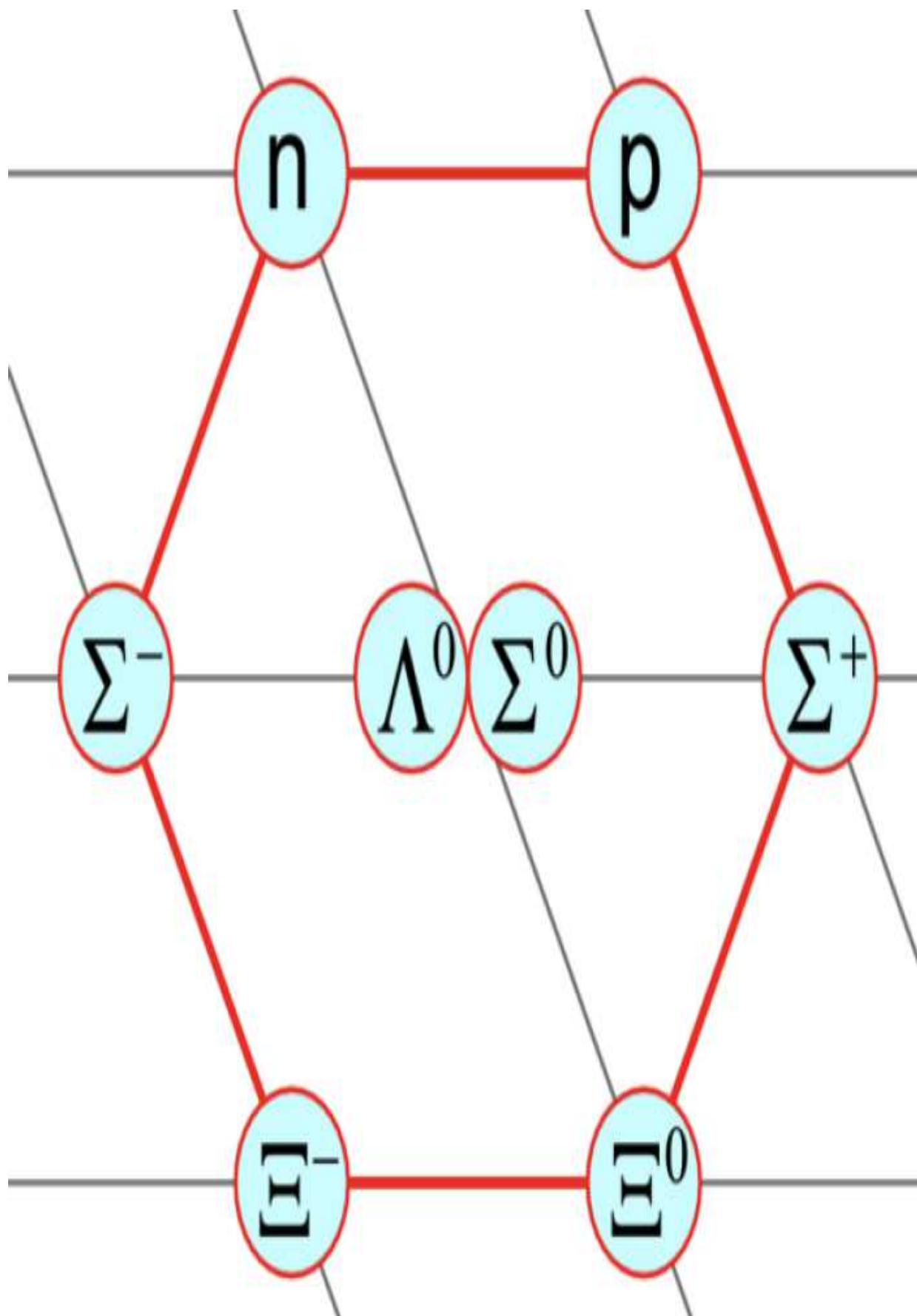
Proton

Như thế là đã đủ rõ ràng rồi. Nhưng điều mù mờ là ở chỗ làm thế nào mà các nhà vật lý lại phỏng đoán được các proton và neutron không phải là các hạt không chia nhỏ được nữa mà lại được tạo thành từ các hạt nhỏ hơn.

Câu chuyện này diễn ra vào cuối thập niên 1950, thời điểm một lượng lớn các hạt có vẻ là cơ bản, gọi là các hadron, được tìm ra. Neutron và proton đều là hadron, và dĩ nhiên chúng đóng vai trò quan trọng trong đời sống hằng ngày như là những viên gạch cấu thành nên vật chất. Các hạt hadron còn lại thì không ai có ý niệm nào về mục đích tồn tại của chúng (hay là “ai đã đặt hàng chúng” như một nhà nghiên cứu đã nói). Có quá nhiều các hạt như thế đến nỗi nhà vật lý tiếng tăm Wolfgang Pauli đã nói đùa rằng vật lý học đang biến thành thực vật học. Các nhà vật lý rất cần phải chế ngự các hạt hadron, để tìm kiếm những nguyên lý ẩn giấu chi phối hành vi của các hạt này và giải thích sự sinh sôi điên rồ của chúng.

Gell-Mann và Yuval Ne'eman, đã độc lập đề xuất một sơ đồ phân loại mới lạ. Họ cùng chỉ ra rằng các hadron có thể được phân chia một cách tự nhiên thành các họ nhỏ hơn, mỗi họ bao gồm 8 hay 10 hạt. Họ gọi chúng là các bát tuyến và thập tuyến. Những hạt cùng nằm trong một họ thì có các tính chất tương tự nhau.

Trong những cuốn sách thường thức mà tôi đọc vào thời điểm đó, tôi đã thấy các giản đồ bát tuyến như sau:



Ở đây proton được ký hiệu là p , neutron được ký hiệu là n , và có sáu hạt khác được ký hiệu bằng những chữ cái Hy Lạp lạ hoắc.

Nhưng tại sao lại là 8 và 10 chứ không phải 7 hay 11? Tôi không thể tìm ra được một cách lý giải chặt chẽ nào trong những cuốn sách mà tôi đang đọc. Chúng đều nhắc đến một ý tưởng kỳ bí của Gell-Mann gọi là bát đạo (ám chỉ Bát Chính Đạo trong đạo Phật). Nhưng những cuốn sách đó không bao giờ cố gắng giải thích điều này thực ra là gì.

Sự thiếu vắng lời giải thích như thế khiến tôi cực kỳ không thỏa mãn. Những phần then chốt của câu chuyện vẫn còn ẩn giấu. Tôi muốn làm sáng tỏ bí ẩn này nhưng không biết phải làm cách nào.

Và thật may mắn, tôi đã nhận được sự giúp đỡ từ một người bạn của gia đình. Tôi lớn lên trong một thành phố công nghiệp nhỏ có tên là Kolomna, với dân số khoảng 150.000 người, cách Moscow khoảng 70 dặm, hoặc chỉ hai giờ tàu chạy. Cha mẹ tôi là kỹ sư làm việc cho một công ty lớn chuyên sản xuất máy móc hạng nặng. Kolomna là một thành phố cổ nằm bên hợp lưu của hai con sông, được thành lập năm 1177 (chỉ 30 năm sau khi Moscow được thành lập), vẫn còn đó vài nhà thờ đẹp và những bức tường thành là chứng tích cho quá khứ vàng son của Kolomna. Nhưng đó không phải là một trung tâm giáo dục hay trí thức. Ở đó chỉ có một trường đại học nhỏ, đào tạo giáo viên phổ thông. Tuy vậy, một trong những giáo sư ở đó, nhà toán học Evgeny Evgenievich Petrov, lại là bạn của cha mẹ tôi. Một ngày, mẹ tôi gặp lại ông trên đường phố sau một thời gian dài xa cách, và họ đã nói chuyện với nhau. Mẹ tôi thích kể về tôi với bạn bè của bà, và do vậy tôi xuất hiện trong câu chuyện. Khi nghe kể tôi rất thích khoa học, Evgeny Evgenievich đã nói: “Tôi phải gặp cháu. Tôi sẽ cố chuyển mỗi quan tâm của cháu sang toán học.”

“Ồ không,” mẹ tôi nói, “nó không thích toán đâu. Nó nghĩ rằng toán thật tẻ nhạt. Nó muốn nghiên cứu vật lý lượng tử.”

“Đừng lo,” Evgeny Evgenievich trả lời, “tôi nghĩ mình biết cách làm thay đổi suy nghĩ của cháu.”

Vậy là một cuộc gặp gỡ đã được thu xếp. Tôi không mấy hứng thú với nó, nhưng dầu vậy tôi vẫn đến văn phòng của Evgeny Evgenievich để gặp ông.

Tôi vừa mới bước sang tuổi mười lăm, và mới học hết lớp chín, lớp áp chót của phổ thông. (Tôi nhỏ hơn các bạn cùng lớp một tuổi bởi vì tôi đã học nhảy lớp sáu.) Ở độ tuổi trạc bốn mươi, Evgeny Evgenievich khi đó rất thân thiện và khiêm nhường. Đeo kính cận, với chòm râu lởm chởm, ông trông giống hết những gì mà tôi tưởng tượng về một nhà toán học, nhưng vẫn có nét quyến rũ trong ánh nhìn chăm chú đầy dò xét từ đôi mắt to của ông. Chúng phát ra sự tò mò vô hạn về tất cả mọi thứ.

Hóa ra Evgeny Evgenievich thật sự đã có một kế hoạch tài tình để chuyển mỗi quan tâm của tôi sang toán học. Ngay khi tôi bước vào văn phòng, ông liền hỏi, “Này, chú được biết là cháu thích vật lý lượng tử. Cháu đã nghe nói về sơ đồ bát đạo của Murray Gell-Mann và mô hình quark chưa?”

“Dạ có, cháu đã đọc về chúng trong một vài cuốn sách thường thức.”

“Nhưng cháu có biết nền tảng của mô hình đó là gì không? Làm sao ông ấy lại nảy ra những ý tưởng đó?”

“À vâng...”

“Cháu đã nghe về nhóm $SU(3)$ bao giờ chưa?”

“ SU gì cơ ạ?”

“Làm sao mà cháu có thể hiểu được mô hình quark nếu cháu không biết nhóm $SU(3)$ là gì?”

Ông lấy từ trên giá xuống vài cuốn sách, mở chúng ra, và chỉ cho tôi các trang có chứa các công thức. Tôi nhìn thấy các giản đồ bát tuyến quen thuộc, giống như giản đồ ở trang 24, nhưng những giản đồ này

không chỉ là những bức tranh đẹp; chúng còn là lời giải thích mạch lạc và chi tiết.

Mặc dù vẫn không thể hiểu đầu cua tai nheo của các công thức đó, nhưng tôi cảm nhận rõ ràng rằng chúng chứa đựng câu trả lời mà tôi đã tìm kiếm bấy lâu. Đó là thời khắc thức nhận. Tôi đã bị mê hoặc bởi những gì mình nghe và nhìn thấy; chạm đến một cái gì đó mà tôi chưa từng trải qua trước đây; không thể diễn tả bằng lời nhưng nó giống cảm xúc phấn khích và nguồn sinh lực mà người ta cảm thấy khi nghe một bản nhạc hay xem một bức tranh vô cùng ấn tượng. Tất cả những gì tôi nghĩ đến lúc đó là “Quá tuyệt vời!”

“Có lẽ cháu nghĩ toán học là những gì cháu được dạy ở nhà trường,” Evgeny Evgenievich nói. Ông lắc đầu, “Không phải, mà đây” - ông chỉ vào những công thức trong sách - “mới là toán học. Và nếu cháu thực sự muốn hiểu cơ học lượng tử, thì đây là điểm mà cháu phải bắt đầu. Gell-Mann đã sử dụng một lý thuyết toán học đẹp để tiên đoán về các quark. Thực ra, đó là một khám phá toán học.”

“Nhưng làm sao mà cháu có thể hiểu được những thứ này chứ?”

Chúng trông có vẻ đáng sợ.

“Đừng lo. Thứ đầu tiên mà cháu cần phải học là khái niệm nhóm đối xứng. Đó là ý tưởng chính. Đa phần toán học, cũng như vật lý lý thuyết, đều dựa trên đó cả. Đây là một vài cuốn sách mà chú muốn cho cháu. Hãy đọc chúng ngay và đánh dấu những chỗ mà cháu không hiểu hằng tuần chúng ta có thể gặp nhau ở đây và nói về chúng.”

Ông đưa tôi một cuốn sách về các nhóm đối xứng và đôi ba cuốn nữa về những chủ đề khác: về các số *p-adic* (một hệ thống số khác biệt hoàn toàn với những con số mà chúng ta đã quen thuộc) và về topo (ngành nghiên cứu về những tính chất căn bản nhất của các dạng hình học). Về chuyện này, Evgeny Evgenievich có một năng khiếu toán học hoàn hảo: ông tìm thấy một sự kết hợp hoàn hảo giữa các chủ đề sẽ cho phép tôi thấy được con quái vật *Toán học* bí ẩn từ các khía cạnh khác nhau và cảm thấy hưng phấn về nó.

Ở trường phổ thông chúng ta học về những thứ như các phương trình bậc hai, một ít giải tích, một ít hình học Euclid, và lượng giác. Tôi từng cho rằng toàn bộ toán học chỉ loanh quanh có thế mà thôi, rằng có thể các bài tập trở nên phức tạp hơn nhưng vẫn nằm trong cùng cái khuôn khổ chung mà tôi vốn rất quen thuộc ấy. Nhưng các cuốn sách mà Evgeny Evgenievich đưa cho tôi chứa đựng những phác thảo đại cương về một thế giới hoàn toàn khác, thậm chí tôi không thể hình dung được sự tồn tại của nó.

Và tôi ngay lập tức thay đổi hoàn toàn suy nghĩ của mình.

Chương 2

BẢN CHẤT CỦA ĐỐI XỨNG

Trong tâm thức của hầu hết mọi người, toán học chẳng qua chỉ là khoa học về các con số. Họ hình dung các nhà toán học là những người suốt ngày chỉ ngồi nghiền ngẫm về các con số: những số lớn và thậm chí vô cùng lớn, tất cả đều có những cái tên rất lạ. Tôi cũng từng nghĩ như thế - chí ít là cho đến trước khi Evgeny Evgenievich giới thiệu với tôi những khái niệm và ý tưởng của toán học hiện đại. Một trong số chúng hóa ra lại là chìa khóa để khám phá ra các quark: đó là khái niệm đối xứng.

Vậy đối xứng là gì? Tất cả chúng ta đều có thể nhận biết nó bằng trực giác - khi nhìn thấy nó chúng ta nhận ra ngay. Khi tôi đề nghị mọi người đưa ra một ví dụ về vật thể đối xứng, họ đều chỉ ra những con bướm, các bông tuyết, và cơ thể con người.

Nhưng nếu tôi hỏi một vật đối xứng có ý nghĩa gì, thì họ lại ngắc ngứ.

Đây là cách mà Evgeny Evgenievich đã giải thích cho tôi. “Hãy nhìn chiếc bàn tròn và chiếc bàn vuông này,” ông chỉ vào hai chiếc bàn ở trong văn phòng của mình. “Chiếc nào đối xứng hơn?”

“Dĩ nhiên là chiếc bàn tròn rồi, lẽ nào không quá rõ ràng hay sao?”



Ảnh của K.G. Libbrecht

“Nhưng tại sao? Là một nhà toán học có nghĩa là cháu không thể coi những thứ ‘rõ ràng’ là dĩ nhiên được, mà hãy cố suy luận. Rất thường xuyên, cháu sẽ thấy ngạc nhiên rằng câu trả lời hiển nhiên nhất thực ra lại là sai.”

Nhận thấy sự bối rối trên gương mặt của tôi, Evgeny Evgenievich liền đưa ra gợi ý: “Tính chất nào của chiếc bàn tròn khiến nó đối xứng hơn?”

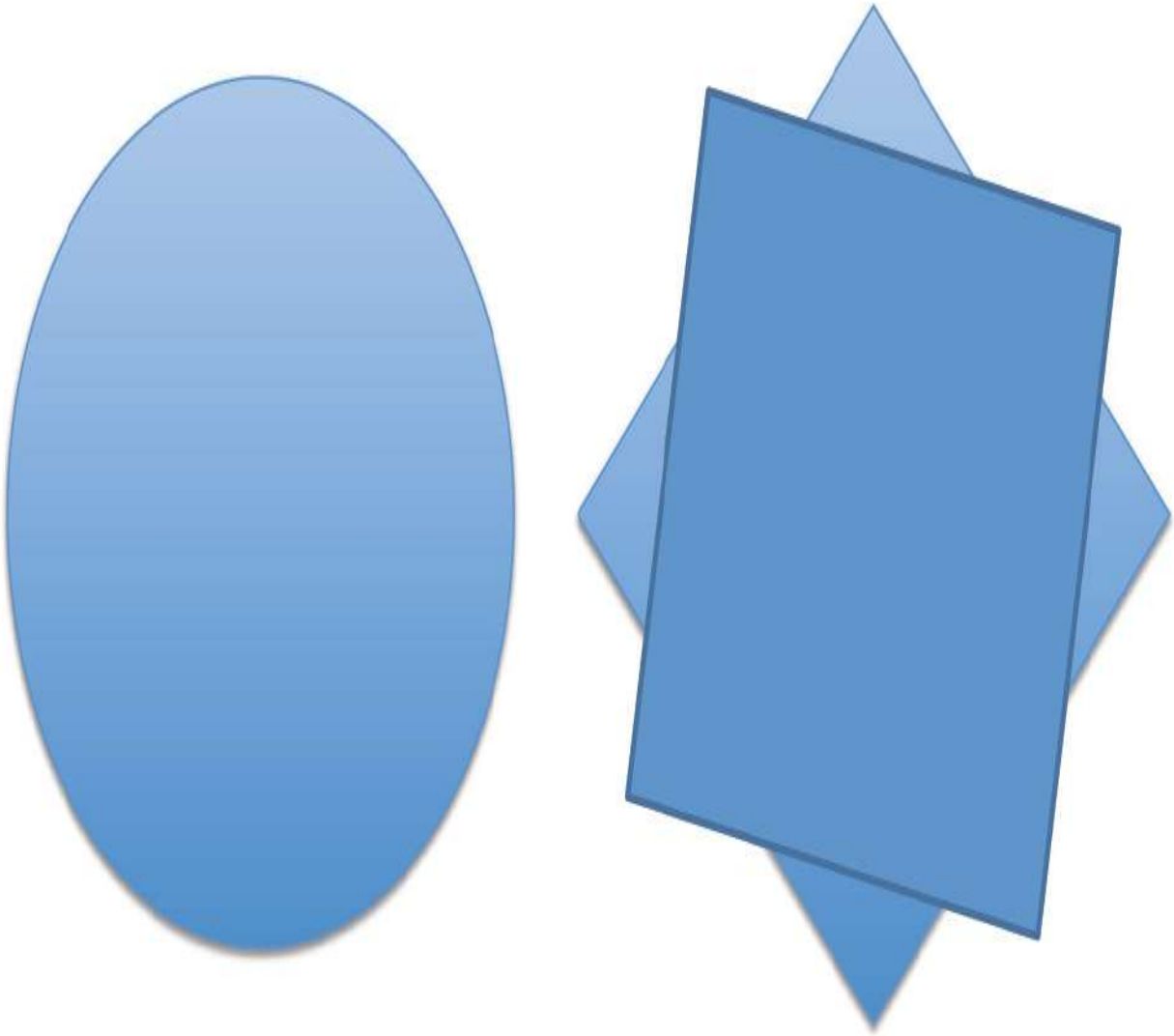
Tôi nghĩ ngợi một lát, và sau đó tìm ra: “Cháu đoán là tính đối xứng của một vật liên quan tới việc nó giữ nguyên hình dạng và vị trí ngay cả khi chúng ta tác động làm cho nó thay đổi”.

Evgeny Evgenievich gật đầu.

“Đúng vậy. Hãy xét tất cả các phép biến đổi có thể có đối với hai chiếc bàn sao cho chúng bảo toàn hình dạng và vị trí của hai chiếc bàn ấy,” ông nói, “trong trường hợp chiếc bàn tròn...”

Tôi ngắt lời: “Tất cả các phép quay quanh tâm đều sẽ không làm thay đổi vị trí của nó. Chúng ta sẽ nhận lại chính xác chiếc bàn được đặt đúng y như cũ. Nhưng nếu áp dụng một phép quay bất kỳ vào chiếc bàn vuông, chúng ta thường sẽ nhận được chiếc bàn đặt theo cách khác. Chỉ có các phép quay 90° và bội của nó thì mới giữ được chiếc bàn không thay đổi thôi.”

“Chính xác! Nếu cháu rời văn phòng của chú một lát, và chú quay chiếc bàn tròn một góc bất kỳ, thì khi trở vào cháu sẽ không nhận thấy sự khác biệt. Nhưng nếu chú làm như vậy với chiếc bàn vuông, cháu sẽ nhận ra ngay, trừ phi chú quay nó theo các góc 90° , 180° , và 270° .”



Quay một chiếc bàn hình tròn theo bất kỳ góc nào cũng không làm thay đổi vị trí của nó, nhưng nếu quay một chiếc bàn hình vuông theo một góc không phải bội của 90° thì sẽ thay đổi vị trí

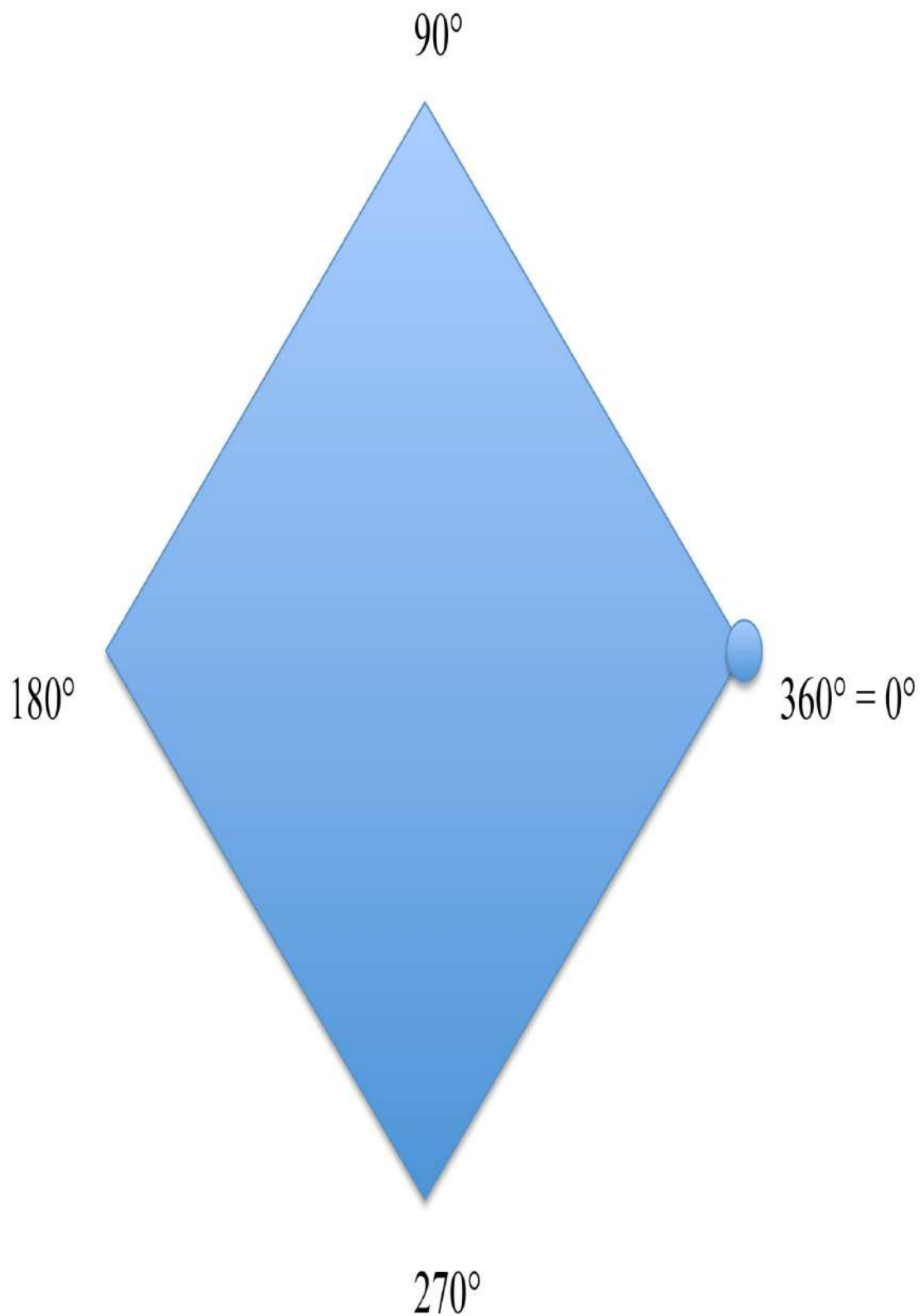
của nó (cả hai đều được nhìn từ bên trên)

Ông tiếp tục: “Những phép biến đổi như thế được gọi là các đối xứng. Do vậy cháu sẽ thấy chiếc bàn vuông chỉ có bốn đối xứng, trong khi chiếc bàn tròn lại có rất nhiều - mà thực ra là nó có vô hạn các đối xứng. Điều đó giải thích tại sao chúng ta nói rằng chiếc bàn tròn là đối xứng hơn.”

Điều này mang rất nhiều ý nghĩa.

“Đây là một quan sát khá đơn giản,” Evgeny Evgenievich tiếp tục. “Không cần phải là một nhà toán học cháu cũng có thể nhận thấy, điều đó: Nhưng nếu cháu là một nhà toán học, cháu sẽ đặt câu hỏi kế tiếp: *tất cả những đối xứng khả dĩ của một vật cho trước là gì?*”

Hãy xét chiếc bàn vuông. Những đối xứng của nó^[1] là bốn phép quay quanh tâm của chiếc bàn: theo góc 90° , 180° , 270° , và 360° , ngược chiều kim đồng hồ^[2]. Một nhà toán học sẽ nói rằng *tập hợp* các đối xứng của một chiếc bàn vuông bao gồm bốn phần tử, tương ứng với các góc 90° , 180° , 270° và 360° . Mỗi phép quay sẽ đưa một đỉnh cố định (được đánh dấu bởi một hình tròn nhỏ như trên hình dưới đây) tới vị trí của một trong bốn đỉnh còn lại.



Có một phép quay đặc biệt trong số này; ấy là phép quay theo góc 360° cũng hết như là phép quay theo góc 0° , tức là chẳng quay gì cả.

Đây là một đối xứng đặc biệt bởi vì nó thực sự không làm thay đổi chiếc bàn chút nào cả: mỗi điểm của chiếc bàn sau phép quay vẫn ở nguyên vị trí như ban đầu. Chúng ta gọi đây là *đối xứng đồng nhất*; hay đơn giản là *phép đồng nhất*^[3].

Chú ý rằng quay theo một góc nào đó lớn hơn 360° thì cũng tương đương với việc quay theo một góc giữa 0° và 360° . Chẳng hạn, phép quay theo một góc 450° thì cũng giống như phép quay theo góc 90° , bởi vì $450 = 360 + 90$. Điều đó giải thích tại sao chúng ta chỉ xét các phép quay theo các góc nằm giữa 0° và 360° .

Ở đây xuất hiện nhận xét quan trọng: nếu chúng ta thực hiện hai phép quay theo các góc trong danh sách $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$, phép này tiếp sau phép kia, thì chúng ta lại thu được một phép quay khác trong cùng danh sách đó. Chúng ta gọi đối xứng mới này là *hợp thành* của hai đối xứng kia.

Dĩ nhiên, điều này là hiển nhiên: mỗi một trong hai đối xứng đều giữ nguyên vị trí của chiếc bàn. Do đó hợp thành của hai đối xứng ấy cũng phải bảo toàn vị trí đó. Do vậy, hợp thành này cũng phải là một đối xứng. Chẳng hạn, nếu chúng ta quay chiếc bàn một góc 90° , và sau đó quay tiếp một góc 180° , thì kết quả cuối cùng là phép quay 270° .

Hãy cùng xem những gì đã xảy ra với chiếc bàn khi thực hiện các phép đối xứng đó. Dưới phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 90° , góc phải của chiếc bàn (góc được đánh dấu bằng một hình tròn ở hình trước) sẽ đi lên góc trên. Sau đó chúng ta áp dụng phép quay 180° , thì góc trên ấy sẽ lại chuyển xuống góc dưới. Kết quả cuối cùng là góc phải sẽ đi xuống góc dưới. Đó cũng là kết quả của phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 270° .

Đây là một ví dụ nữa:

$$90^\circ + 270^\circ = 0^\circ.$$

Khi quay một góc 90° và sau đó là 270° , chúng ta sẽ nhận được phép quay một góc 360° . Nhưng kết quả của phép quay 360° cũng

giống như phép quay một góc 0° , như chúng ta đã thảo luận trên kia - đây chính là “phép đối xứng đồng nhất”.

Nói cách khác, phép quay thứ hai theo một góc 270° đã làm đảo ngược kết quả của phép quay 90° ban đầu. Đây thực tế là một tính chất quan trọng: bất kỳ đối xứng nào cũng có thể bị *đảo ngược*; tức là với bất kỳ đối xứng S nào cũng tồn tại đối xứng S' sao cho hợp thành của chúng là đối xứng đồng nhất. Đối xứng S' này được gọi là đối xứng *nghịch đảo* của đối xứng S . Do vậy chúng ta thấy rằng phép quay một góc 270° là nghịch đảo của phép quay một góc 90° . Cũng vậy, nghịch đảo của phép quay một góc 180° cũng chính là phép quay một góc 180° .

Bây giờ chúng ta thấy rằng một tập hợp đơn giản gồm các đối xứng của một chiếc bàn vuông - tức bốn phép quay $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ\}$ - thực ra lại có nhiều cấu trúc nội tại, hay các quy tắc tương tác giữa các phần tử của tập hợp đó.

Trước hết, chúng ta có thể hợp thành hai đối xứng bất kỳ (tức là áp dụng một đối xứng này tiếp sau một đối xứng khác).

Thứ hai, có một đối xứng đặc biệt, đối xứng đồng nhất. Trong ví dụ của chúng ta, đó là phép quay một góc 0° . Nếu chúng ta hợp thành nó với bất kỳ đối xứng nào khác, chúng ta sẽ thu được chính đối xứng khác đó. Chẳng hạn:

$$90^\circ + 0^\circ = 90^\circ, 180^\circ + 0^\circ = 180^\circ, \text{ v.v.}$$

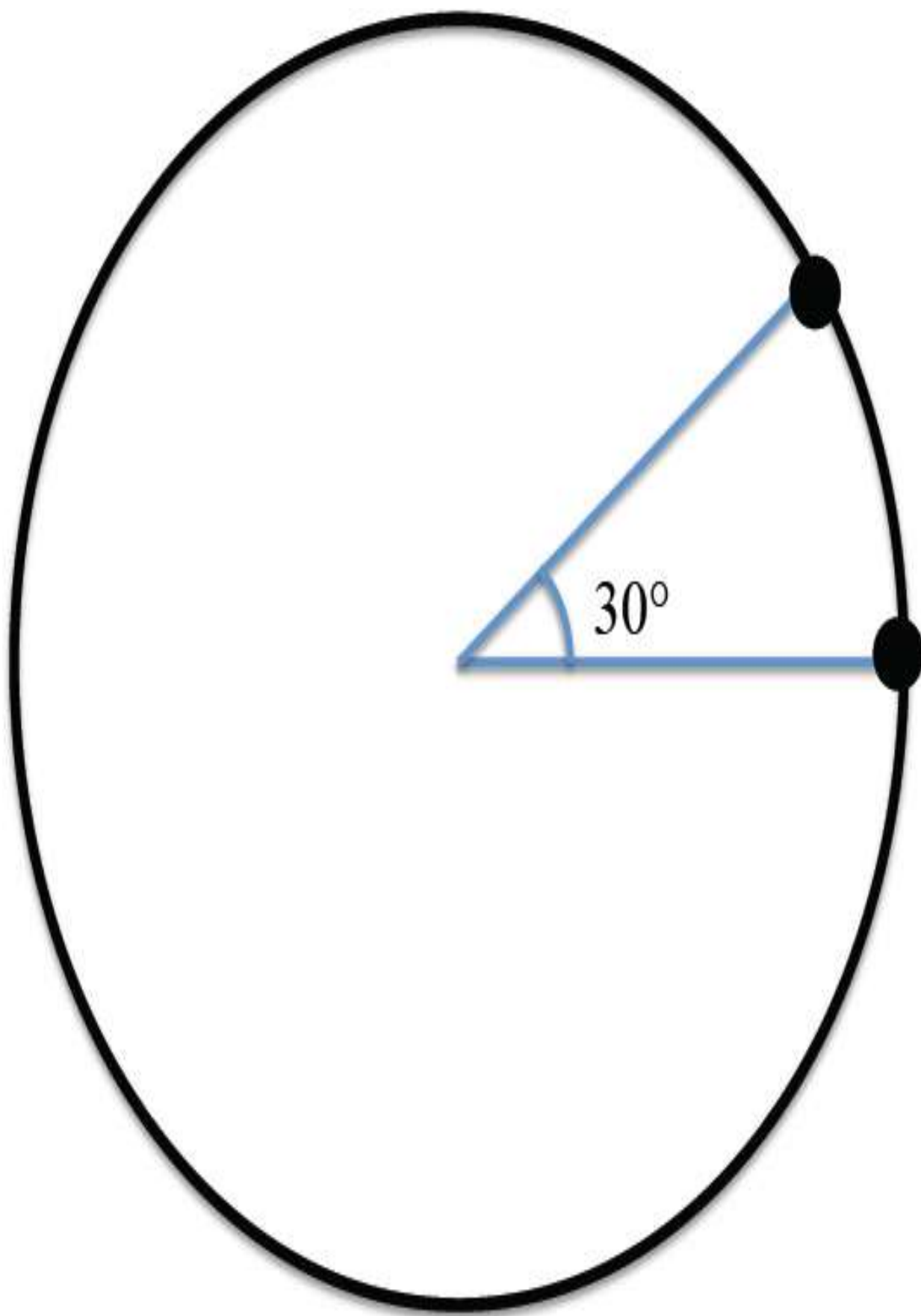
Thứ ba, với bất kỳ một đối xứng S nào, cũng tồn tại một đối xứng nghịch đảo S' , sao cho hợp thành của S và S' là đối xứng đồng nhất.

Và bây giờ chúng ta đi đến điểm chính: tập hợp các phép quay cùng với ba cấu trúc trên là một ví dụ về thứ mà các nhà toán học gọi là một *nhóm*.

Những đối xứng của một vật thể bất kỳ cũng tạo thành một nhóm, mà nói chung thì có nhiều phần tử hơn - thậm chí số phần tử có thể là vô hạn^[4].

Hãy cùng xem xét điều đó vận hành như thế nào trong trường hợp chiếc bàn tròn. Bây giờ ta đã có được thêm chút kinh nghiệm, nên có thể thấy ngay rằng tập hợp các đối xứng của chiếc bàn tròn là tập hợp tất cả các phép quay khả dĩ (chứ không phải chỉ theo các góc là bội của 90°), và chúng ta có thể trực quan hóa nó như tập hợp tất cả các điểm trên đường tròn.

Mỗi điểm trên đường tròn tương ứng với một góc nằm trong khoảng 0° đến 360° , biểu diễn phép quay của chiếc bàn tròn theo góc này với chiều quay ngược chiều kim đồng hồ. Hơn nữa, có một điểm đặc biệt tương ứng với phép quay một góc 0° . Nó được đánh dấu như trong hình dưới đây, cùng với một điểm khác tương ứng với phép quay một góc 30° .



Mặc dù vậy chúng ta không nên nghĩ các điểm trên đường tròn này như những điểm trên chiếc bàn tròn, mà nên nghĩ rằng mỗi điểm của đường tròn này biểu diễn một phép quay cụ thể của chiếc bàn tròn. Chú ý rằng chiếc bàn tròn này không có điểm nào là đặc biệt cả, nhưng đường tròn của chúng ta thì có; đó là điểm tương ứng với phép quay một góc 0° ^[5].

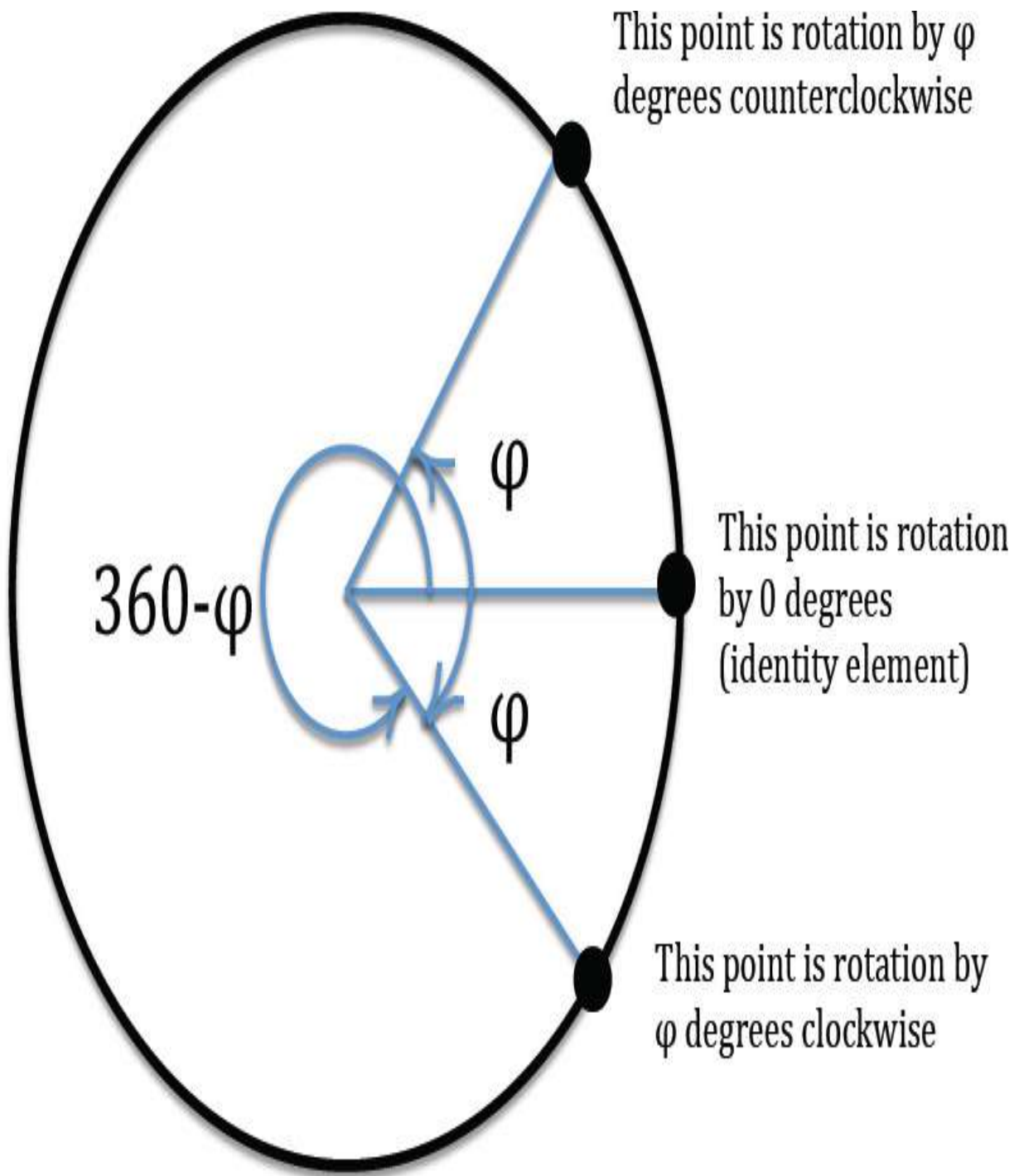
Bây giờ chúng ta thử xem ba cấu trúc nói ở trên có thể áp dụng được cho tập hợp các điểm trên đường tròn hay không.

Trước tiên, hợp thành của hai phép quay, theo các góc φ_1 và φ_2 độ, là phép quay theo góc $\varphi_1 + \varphi_2$ độ. Nếu $\varphi_1 + \varphi_2$ lớn hơn 360, chúng ta chỉ cần lấy nó trừ đi 360. Trong toán học, đây gọi là *phép cộng theo modun 360*. Chẳng hạn nếu $\varphi_1 = 195$ và $\varphi_2 = 250$, thì tổng của hai góc là 445, và phép quay một góc 445° thì cũng giống như quay một góc 85° . Do vậy, trong nhóm các phép quay của chiếc bàn tròn chúng ta có:

$$195^\circ + 250^\circ = 85^\circ.$$

Thứ hai, có một điểm đặc biệt trên đường tròn tương ứng với phép quay một góc 0° . Đây là phần tử đồng nhất của nhóm.

Thứ ba, nghịch đảo của phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc φ là phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc $(360 - \varphi)$ độ, hay tương đương với phép quay theo chiều kim đồng hồ theo một góc φ độ (xem hình dưới).



Điểm này là phép quay một góc φ độ ngược chiều kim đồng hồ

Điểm này là phép quay một góc 0° (phần tử đồng nhất)

Điểm này là phép quay một góc φ độ theo chiều kim đồng hồ...

Như vậy, chúng ta đã mô tả được nhóm các phép quay của chiếc bàn tròn. Chúng ta sẽ gọi đó là *nhóm đường tròn*. Không giống với

nhóm đối xứng của chiếc bàn vuông, có bốn phần tử, nhóm này có vô hạn các phần tử bởi vì có vô hạn các góc nằm giữa 0° và 360° .

Bây giờ hiểu biết trực giác của chúng ta đã có được nền tảng lý thuyết vững chắc - thực tế, chúng ta đã biến nó thành một khái niệm toán học. Trước hết, chúng ta thừa nhận rằng đối xứng của một đối tượng cho trước là phép biến đổi bảo toàn vật đó và các tính chất của nó. Sau đó, chúng ta thực hiện một bước quyết định: đó là tập trung vào tập hợp gồm tất cả các đối xứng của một đối tượng cho trước. Trong trường hợp chiếc bàn vuông, tập hợp này gồm bốn phần tử (phép quay các góc là bội của 90°); trong trường hợp chiếc bàn tròn, đó là một tập hợp vô hạn phần tử (gồm tất cả các điểm trên đường tròn). Cuối cùng, chúng ta mô tả các cấu trúc chặt chẽ mà tập hợp các đối xứng này luôn sở hữu: bất kỳ hai đối xứng nào cũng có thể hợp thành để tạo ra một đối xứng khác; tồn tại đối xứng đồng nhất; và đối với mỗi đối xứng, tồn tại đối xứng nghịch đảo của nó. (Hợp thành của các đối xứng cũng thỏa mãn tính chất kết hợp được miêu tả trong chú thích 4 cuối chương.) Do đó, chúng ta đi đến khái niệm “nhóm” trong toán học.

Một nhóm các đối xứng là một đối tượng trừu tượng, khá khác biệt với đối tượng cụ thể mà ta đã xét. Chúng ta không thể động chạm hay nắm giữ được tập hợp các đối xứng của chiếc bàn (không giống như bản thân chiếc bàn), nhưng chúng ta có thể hình dung về nó, viết ra các phần tử của nó, nghiên cứu và bàn luận về nó.. Mặc dù vậy, mỗi phần tử của tập hợp trừu tượng này có một ý nghĩa cụ thể: nó biểu diễn một phép biến đổi của một đối tượng cụ thể, tức đối xứng của đối tượng ấy.

Toán học chính là ngành nghiên cứu các đối tượng và khái niệm trừu tượng như vậy.

Thực nghiệm cho thấy rằng đối xứng là một nguyên lý dẫn dắt căn bản đối với các định luật của tự nhiên. Chẳng hạn, một bông tuyết tạo

thành một dạng lục giác đều bởi vì hóa ra đó là trạng thái năng lượng thấp nhất mà các phân tử nước buộc phải kết tinh thành. Các đối xứng của băng tuyết là những phép quay theo các góc là bội của 60° ; đó là 60, 120, 180, 240, 300 và 360 độ (cũng tức là 0°). Hơn nữa, chúng ta có thể “lật” băng tuyết dọc theo mỗi một trong sáu trục tương ứng với các góc đó. Tất cả các phép quay và lật ấy đều bảo toàn hình dạng và vị trí của băng tuyết, do vậy, chúng là các đối xứng của nó⁽²⁾.

Trong trường hợp con bướm, khi bị lật nó sẽ lộn úp. Bởi vì ở một mặt con bướm có các chân, nên chính xác thì, việc lật con bướm không phải là một đối xứng. Khi nói rằng con bướm có tính đối xứng là chúng ta đang nói về một phiên bản lý tưởng của nó, khi lưng và bụng giống hệt nhau (không giống như lưng và bụng của một con bướm thực sự). Do vậy phép lật làm trao đổi các cánh bên trái và bên phải cho nhau trở thành một đối xứng. (Ngoài ra, chúng ta còn có thể tưởng tượng việc đảo các cánh cho nhau mà không lật ngược con bướm.)

Điều này dẫn đến một điểm quan trọng: có nhiều đối tượng trong tự nhiên mà các đối xứng của chúng chỉ mang tính tương đối mà thôi. Một chiếc bàn trong đời thực không thể tròn hay vuông một cách hoàn hảo, một con bướm thật thì có mặt trước và sau không đối xứng với nhau, và một cơ thể người thì cũng không hoàn toàn đối xứng. Tuy nhiên, ngay cả trong trường hợp này thì việc xem xét các phiên bản hay mô hình trừu tượng, lý tưởng hóa của chúng - một chiếc bàn tròn hoàn hảo, hay một con bướm tưởng tượng mà chúng ta không phân biệt đằng trước và đằng sau - hóa ra cũng rất hữu ích. Rồi thì, chúng ta phân tích những đối xứng của các đối tượng lý tưởng hóa ấy và điều chỉnh những kết luận mà chúng ta rút ra từ đó để giải thích sự khác biệt giữa đối tượng trong đời thực và mô hình của nó.

Nói như vậy không có nghĩa là chúng ta không trân trọng tính bất đối xứng; chúng ta vẫn đánh giá cao và cũng thường tìm thấy vẻ đẹp trong nó. Nhưng điểm chính của lý thuyết đối xứng trong toán học lại không phải là tính thẩm mỹ. Nó nhằm xây dựng khái niệm đối xứng

bằng những thuật ngữ tổng quát nhất, do vậy sẽ không tránh khỏi là trừu tượng nhất, sao cho khái niệm này có thể áp dụng được một cách thống nhất trong các lĩnh vực khác nhau, như hình học, lý thuyết số, vật lý, hóa học, sinh học, v.v. Một khi chúng ta phát triển được một lý thuyết như vậy, chúng ta cũng có thể nói về các cơ chế phá vỡ đối xứng - coi sự bất đối xứng như một sự đột sinh, nếu bạn muốn. Chẳng hạn, các hạt cơ bản có khối lượng là bởi vì đối xứng *gauge* (chuẩn) mà chúng tuân thủ (sẽ được thảo luận trong chương 16) bị phá vỡ. Điều này được làm dễ dàng nhờ boson Higgs, một hạt khó nắm bắt mới tìm thấy gần đây nhờ Máy va chạm lớn (LHC) ở dưới lòng thành phố Geneva^[6]. Việc nghiên cứu các cơ chế phá vỡ đối xứng như vậy mang đến cho ta những hiểu biết sâu sắc vô giá về hành vi của các viên gạch cơ bản của tự nhiên.

Tôi muốn chỉ ra một số tính chất cơ bản của lý thuyết đối xứng trừu tượng vì đây là một sự minh họa hợp lý cho lý do tại sao toán học lại quan trọng như vậy.

Đầu tiên là tính *phổ quát*. Nhóm đường tròn không chỉ là nhóm các đối xứng của chiếc bàn tròn, mà còn là của tất cả các vật thể có hình dạng tròn khác, như một chiếc ly, một cái bình, một cái cột, v.v. Thực ra, để nói rằng một vật thể tròn thì cũng giống như nói rằng nhóm đối xứng của nó là nhóm đường tròn. Đây là một phát biểu rất hùng hồn: chúng ta nhận ra có thể mô tả một thuộc tính quan trọng của một vật thể (“có dạng hình tròn”) bằng cách mô tả nhóm đối xứng của nó (“đường tròn”). Tương tự như vậy, “có dạng hình vuông” nghĩa là nhóm đối xứng của nó là nhóm có bốn phần tử đã được mô tả ở trên. Nói cách khác, cùng một đối tượng toán học trừu tượng (như nhóm đường tròn) lại có thể dùng để mô tả nhiều vật thể cụ thể khác nhau, và nó chỉ ra những tính chất phổ quát chung của chúng (như có dạng hình tròn)^[7].

Thứ hai là tính *khách quan*. Chẳng hạn, khái niệm về một nhóm là độc lập với cách diễn giải của chúng ta. Nó mang cùng một ý nghĩa đối với bất kỳ ai muốn tìm hiểu. Dĩ nhiên, để hiểu được, bạn phải biết ngôn ngữ biểu đạt nó, tức là ngôn ngữ toán học. Nhưng ai cũng có thể học được ngôn ngữ này. Tương tự như vậy, nếu bạn muốn hiểu được ý nghĩa câu nói của René Descartes “*Je pense, donc je suis*” (Tôi tư duy nên tôi tồn tại), bạn cần phải biết tiếng Pháp (chỉ ít là những từ được sử dụng trong câu nói) - nhưng ai cũng có thể học được ngôn ngữ này. Tuy nhiên, trong trường hợp chúng ta đã hiểu ý nghĩa của câu trên, thì vẫn sẽ có những cách giải nghĩa khả dĩ khác về nó. Ngoài ra, mỗi người khác nhau lại có thể đồng ý hoặc không đồng ý với tính đúng-sai của một cách diễn giải cụ thể của câu nói này. Ngược lại, ý nghĩa của một mệnh đề toán học nhất quán về mặt logic dường như không cần phải diễn giải^[8]. Hơn nữa, tính đúng đắn của nó cũng là khách quan. (Nói chung, tính đúng đắn của một mệnh đề cụ thể có thể phụ thuộc vào hệ tiên đề mà từ đó nó được xem xét. Tuy nhiên, ngay cả như thế chẳng nữa, sự phụ thuộc này vào hệ tiên đề cũng có tính khách quan.) Chẳng hạn, mệnh đề “nhóm đối xứng của một chiếc bàn tròn là một đường tròn” là đúng với tất cả mọi người, ở bất cứ nơi đâu, ở bất kỳ thời điểm nào. Nói cách khác, các chân lý toán học là những chân lý tất yếu. Chúng ta sẽ nói rõ hơn về điều này trong chương 18.

Tính chất thứ ba, liên quan chặt chẽ với hai tính chất trên, đó là tính *bền vững*. Hiển nhiên, định lý Pythagoras có cùng một ý nghĩa với những người Hy Lạp cổ đại cũng như với chúng ta hiện nay, và cũng có đủ lý do để kỳ vọng rằng nó sẽ vẫn mang cùng ý nghĩa đó đối với bất kỳ ai trong tương lai. Tương tự như thế, tất cả những mệnh đề toán học đúng đắn mà chúng ta nhắc đến trong cuốn sách này sẽ mãi đúng.

Thực tế, những kiến thức khách quan và bền vững như thế tồn tại (và hơn nữa, chúng thuộc về tất cả chúng ta) thì quả là một phép màu. Nó hàm ý rằng những khái niệm toán học tồn tại trong một thế giới tách biệt với các thế giới vật chất và tinh thần - mà đôi khi được nhắc đến như là thế giới Platon của toán học (chúng ta sẽ nói đến điều này

nhiều hơn trong phần kết của chương). Chúng ta vẫn còn chưa hoàn toàn hiểu được nó là gì, và điều gì chi phối những khám phá toán học. Nhưng rõ ràng là cái thực tại ẩn giấu ấy sẽ buộc phải (chắc chắn) đóng vai trò ngày càng lớn trong cuộc sống của chúng ta, đặc biệt là với sự phát triển của những công nghệ máy tính mới và in ấn 3D.

Tính chất thứ tư là tính *tương thích* của toán học với thế giới vật lý. Chẳng hạn, có rất nhiều tiến bộ trong vật lý lượng tử khoảng 50 năm trở lại đây được tạo ra là nhờ ứng dụng khái niệm đối xứng cho các hạt cơ bản và những tương tác giữa chúng. Từ quan điểm này, một hạt, như electron hay quark, thì cũng giống như một chiếc bàn tròn hay một bông tuyết, và có hành vi được quyết định rất nhiều bởi những đối xứng của nó. (Trong đó có một số thực sự là đối xứng và một số khác chỉ là gần đúng.)

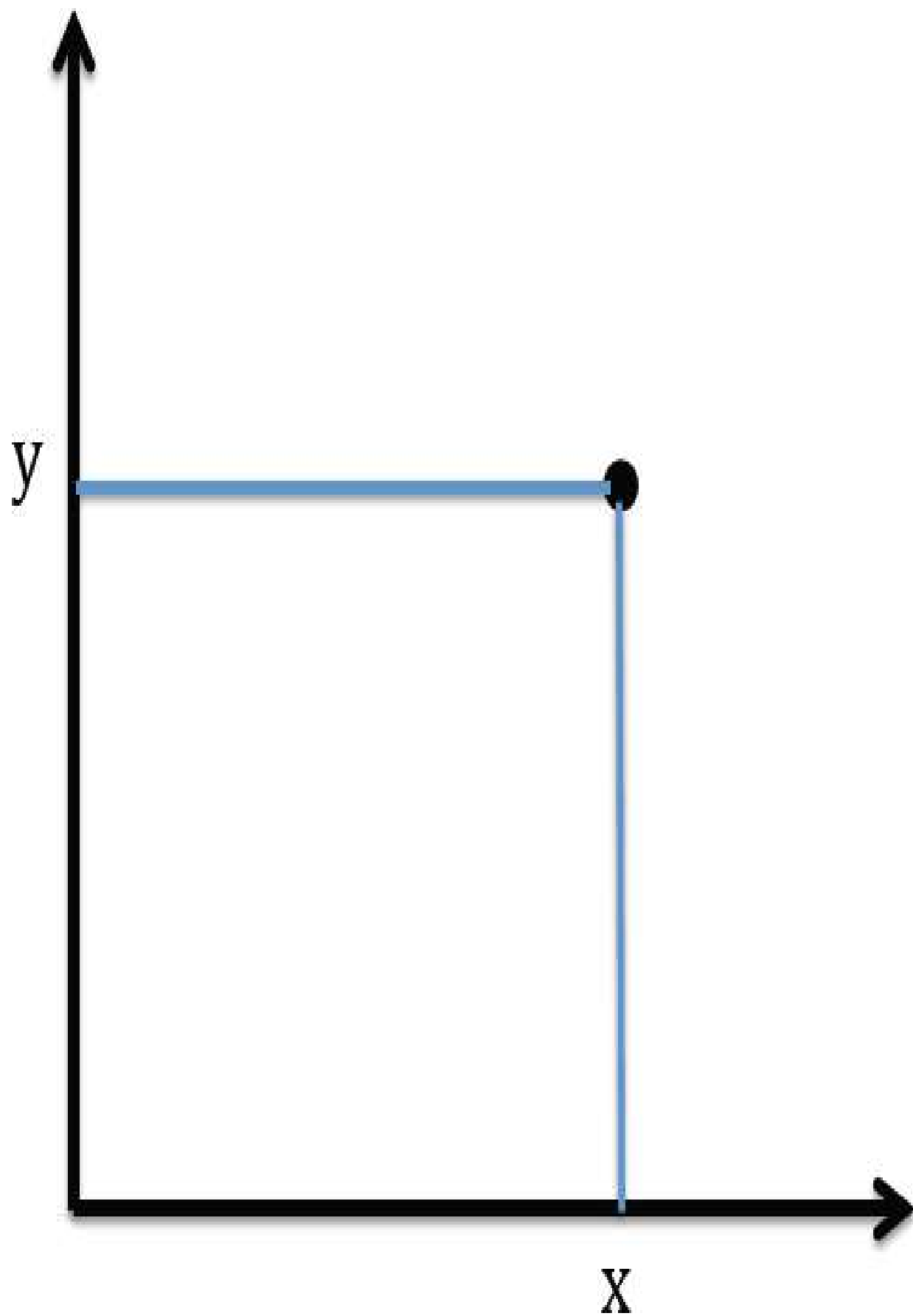
Việc khám phá ra các hạt quark là một ví dụ hoàn hảo về cách thức ứng dụng đó. Đọc những cuốn sách mà Evgeny Evgenievich giao, tôi học được rằng nguồn gốc để phân loại các hadron của Gell-Mann và Ne'eman mà chúng ta nói đến ở chương trước là một *nhóm đối xứng*. Nhóm này được các nhà toán học nghiên cứu từ trước - nhưng họ không tiên đoán được bất kỳ mối liên hệ nào với các hạt hạ nguyên tử. Tên toán học của nhóm này là $SU(3)$. Ở đây S và U là viết tắt của “special unitary” (unita đặc biệt). Nhóm này có những tính chất rất giống với nhóm đối xứng của hình cầu, mà chúng ta sẽ nói đến chi tiết ở chương 10.

Các nhà toán học đã mô tả từ trước các biểu diễn của nhóm $SU(3)$, tức là các cách khác nhau để nhóm $SU(3)$ có thể thực hiện như là một nhóm đối xứng. Gell-Mann và Ne'eman đã để ý đến sự tương tự trong cấu trúc của những biểu diễn đó và mẫu hình của các hadron mà họ đã tìm ra. Và họ đã sử dụng thông tin này để phân loại các hadron.

Từ “biểu diễn” được sử dụng trong toán học theo một nghĩa cụ thể, khác với cách sử dụng thông thường hơn của nó. Vậy tôi xin phép

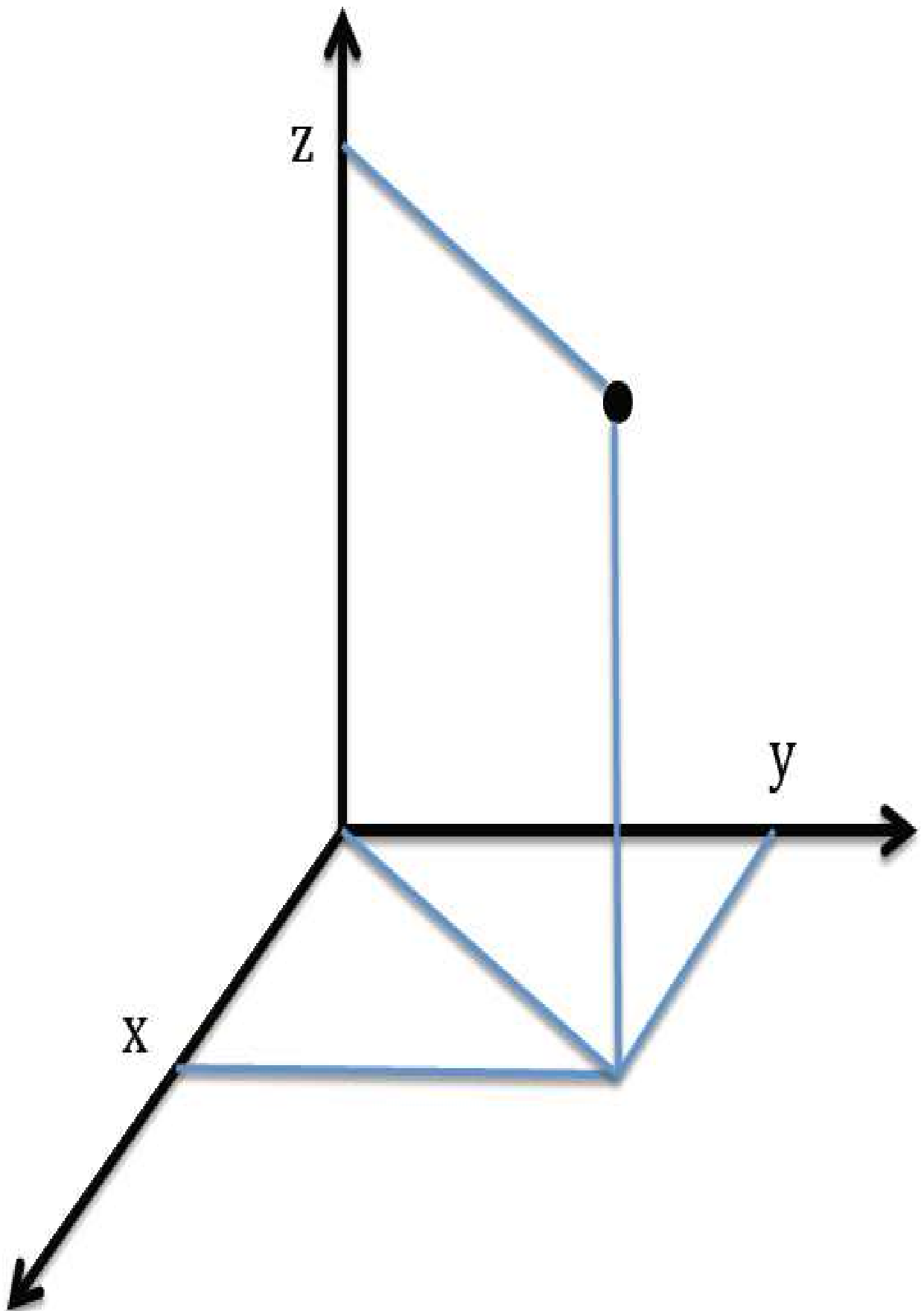
tạm dừng để giải thích ý nghĩa của từ này trong bối cảnh toán học. Có lẽ, sẽ có ích hơn nếu trước tiên tôi đưa ra một ví dụ. Xin nhắc lại về nhóm các phép quay chiếc bàn tròn mà ta đã thảo luận ở trên, tức nhóm đường tròn. Bây giờ giả sử rằng ta mở rộng mặt bàn ra xa vô hạn theo mọi hướng. Theo cách này ta sẽ nhận được một đối tượng toán học trừu tượng: một mặt phẳng. Mỗi phép quay của mặt bàn, quanh tâm của nó, cũng sẽ cho ta một phép quay của mặt phẳng, cũng quanh tâm đó. Như vậy, chúng ta có được một quy tắc cho phép gán một đối xứng của mặt phẳng này (một phép quay) với mỗi phần tử của nhóm đường tròn. Nói cách khác, mỗi phần tử của nhóm đường tròn có thể được biểu diễn bởi một đối xứng của mặt phẳng. Bởi vậy, các nhà toán học coi quá trình này như là một *biểu diễn* của nhóm đường tròn.

Mặt phẳng này có hai chiều, bởi vì nó có hai trục tọa độ và do vậy mỗi điểm có hai tọa độ:



Do đó, có thể nói rằng chúng ta đã xây dựng được một “biểu diễn hai chiều” của nhóm các phép quay. Điều này đơn giản có nghĩa là mỗi phần tử của nhóm các phép quay có thể được thực hiện nhờ một đối xứng của mặt phẳng^[9].

Cũng có các không gian có số chiều lớn hơn hai. Chẳng hạn, không gian bao quanh chúng ta có ba chiều. Nói thế tức là nó có ba trục tọa độ, và do vậy để xác định vị trí của một điểm, chúng ta cần chỉ rõ ba tọa độ (x,y,z) của nó như hình dưới đây:



Chúng ta không thể hình dung được không gian bốn chiều, nhưng toán học lại cung cấp một ngôn ngữ phổ quát cho phép chúng ta nói về các không gian có số chiều bất kỳ. Cụ thể, chúng ta biểu diễn các điểm của không gian bốn chiều bởi bộ bốn số (x, y, z, t) cũng giống như các điểm của không gian ba chiều được biểu diễn bởi bộ ba số (x, y, z) . Theo cùng cách ấy, chúng ta biểu diễn các điểm của một không gian n -chiều, với n là số tự nhiên bất kỳ, bởi một bộ n -số. Nếu bạn đã từng sử dụng một chương trình bảng tính (*spreadsheet*), thì bạn chắc cũng đã từng gặp những bộ n số như vậy: chúng xuất hiện dưới dạng các hàng trong bảng tính, mỗi số trong n số này tương ứng với một thuộc tính cụ thể của dữ liệu được lưu trữ. Do vậy, mỗi hàng trong một bảng tính ứng với một điểm trong không gian n -chiều. (Chúng ta sẽ nói nhiều hơn về các không gian có số chiều khác nhau trong chương 10).

Mỗi phần tử trong một nhóm có thể được thực hiện, theo một cách nhất quán^[10], như là một đối xứng của không gian n -chiều, từ đó chúng ta nói rằng, nhóm này có một “biểu diễn n -chiều”.

Hóa ra một nhóm đã cho lại có thể có các biểu diễn với số chiều khác nhau. Lý do để các hạt cơ bản có thể được tập hợp lại thành các họ 8 và 10 hạt đó là nhóm $SU(3)$ có các biểu diễn 8-chiều và 10-chiều. Tám hạt của mỗi bát tuyến được xây dựng bởi Gell-Mann và Ne’eman (giống như bát tuyến ở trang 24) là tương ứng 1-1 với 8 trục tọa độ của một không gian 8-chiều - một biểu diễn của nhóm $SU(3)$. Điều tương tự cũng xảy ra cho thập tuyến của các hạt. (Nhưng các hạt không thể tập hợp lại thành các họ của, chẳng hạn, 7 hay 11 hạt bởi vì các nhà toán học đã chứng minh được rằng nhóm $SU(3)$ không có các biểu diễn 7 hay 11 chiều.)

Ban đầu, đây chỉ là một phương cách tiện lợi để tổ hợp các hạt có các tính chất tương tự nhau. Nhưng sau đó Gell-Mann đã đi xa hơn. Ông cho rằng có một nguyên nhân sâu xa nằm sau sơ đồ phân loại đó. Về cơ bản, ông nói rằng sơ đồ này vận hành tốt như vậy là bởi vì các hadron được tạo bởi các hạt nhỏ hơn - đôi khi là hai và đôi khi là ba -

các quark. Một đề xuất tương tự cũng được nhà vật lý George Zweig độc lập đưa ra (ông gọi các hạt này là “ace”).

Đây quả là một đề xuất đáng kinh ngạc. Không phải chỉ vì nó đi ngược lại niềm tin phổ biến ở thời đó rằng proton và neutron cũng như các hạt hadron khác là các hạt cơ bản không thể phân chia được nữa, mà các hạt mới này còn được cho là có điện tích là phân số của điện tích electron. Đây là một tiên đoán gây sửng sốt bởi vì trước đó chưa ai từng nhìn thấy những hạt như vậy cả. Nhưng, các quark đã nhanh chóng được tìm thấy bằng thực nghiệm, và đúng như dự đoán, chúng có điện tích bằng phân số của điện tích electron.

Điều gì đã thúc đẩy Gell-Mann và Zweig tiên đoán về sự tồn tại của các quark? Đó chính là lý thuyết toán học về các biểu diễn của nhóm $SU(3)$. Cụ thể là, nhóm $SU(3)$ thực tế có hai biểu diễn 3-chiều khác nhau (đó là lý do tại sao có số “3” trong tên của nhóm). Gell-Mann và Zweig đã đề xuất rằng hai biểu diễn này phải mô tả hai họ các hạt cơ bản: 3 quark và 3 phản quark. Hóa ra các biểu diễn 8-chiều và 10-chiều của $SU(3)$ có thể được xây dựng từ các biểu diễn 3-chiều. Và điều này đã mang lại cho chúng ta bản thiết kế chi tiết cho thấy các hadron được xây dựng từ các quark như thế nào - hết như trong trò chơi xếp hình vậy.

Gell-Mann đặt tên 3 quark là “up” (lên - viết tắt là u), “down” (xuống - viết tắt là d), và “strange” (lạ - viết tắt là s)^[11]. Một proton được cấu tạo bởi 2 quark u và 1 quark d , trong khi 1 neutron tạo bởi 2 quark d và 1 quark u như chúng ta thấy trên hình ở trang 23. Tất cả các hạt cơ bản này thuộc về cùng một bát tuyến như chúng ta thấy trên giản đồ ở trang 24. Các hạt khác trong bát tuyến này bao gồm cả quark s cũng như các quark u và d . Ngoài ra cũng có các bát tuyến khác bao gồm các hạt cơ bản tạo thành từ 1 quark và 1 phản quark.

Việc khám phá ra các quark là một ví dụ điển hình cho vai trò tối cao của toán học trong khoa học mà chúng ta đã thảo luận trong phần lời nói đầu. Các hạt này được tiên đoán không dựa trên các dữ liệu thực

nghiệm, mà dựa trên các hình mẫu đối xứng trong toán học. Đây là một tiên đoán thuần túy lý thuyết, được thực hiện trong khuôn khổ của lý thuyết toán học rất phức tạp về các biểu diễn của nhóm $SU(3)$. Các nhà vật lý phải mất nhiều năm mới làm chủ được lý thuyết này (và thực tế ban đầu họ cũng vấp phải những trở ngại nhất định), nhưng bây giờ nó là nguồn sống của vật lý hạt cơ bản. Nó không chỉ cung cấp một sơ đồ phân loại các hadron, mà còn dẫn tới việc khám phá ra các quark, khám phá đã làm thay đổi vĩnh viễn hiểu biết của chúng ta về thực tại vật lý.

Hãy thử tưởng tượng: một lý thuyết toán học có phần kỳ bí trao cho chúng ta sức mạnh để đi vào tận cốt lõi của các viên gạch cơ bản của tự nhiên. Làm sao chúng ta có thể không bị mê hoặc bởi tính hài hòa thần kỳ của những hạt vật chất nhỏ bé đó, làm sao có thể không kinh ngạc trước khả năng toán học có thể phát lộ những huyền cơ trong cơ chế vận hành của vũ trụ?

Người ta đồn rằng, khi nghe nói cần phải trang bị cho đài thiên văn trên núi Wilson một kính thiên văn để xác định hình dạng của không-thời gian, Elsa - người vợ thứ hai của Einstein - đã nhận xét: “Ồ, chồng tôi làm được điều này chỉ trên mặt sau của một chiếc phong bì cũ.”

Trong khi các nhà vật lý cần các cỗ máy đắt tiền và phức tạp như Máy va chạm lớn (LHC) ở Geneva, thì thật đáng ngạc nhiên, các nhà khoa học như Einstein và Gell-Mann chỉ sử dụng thứ tưởng như là tri thức toán học trừu tượng và thuần túy nhất để lật mở bí mật sâu sắc nhất của thế giới quanh ta.

Bất kể chúng ta là ai và chúng ta tin vào điều gì, tất cả chúng ta đều cùng chia sẻ những tri thức này. Nó mang chúng ta đến gần nhau hơn, và mang tới cho tình yêu của chúng ta dành cho vũ trụ một ý nghĩa mới.

❏ Chú ý rằng lật bàn không phải là một đối xứng: điều đó sẽ làm cho bàn lộn úp - đừng quên rằng bàn còn có các chân nữa. Nếu chúng

ta xét một hình vuông hoặc một vòng tròn (không lắp chân), thì phép lật cũng là một đối xứng. Vì vậy chúng ta phải đưa chúng vào nhóm đối xứng tương ứng.

Chương 3

BÀI TOÁN SỐ NĂM

Kế hoạch của Evgeny Evgenievich đối với tôi thành công mỹ mãn: tôi đã “chuyển mối quan tâm” sang toán học. Tôi học rất nhanh, càng hiểu sâu hơn về toán tôi càng cảm thấy phấn khích và muốn biết thêm nhiều hơn. Mọi chuyện xảy ra như khi bạn đang yêu vậy.

Tôi bắt đầu gặp Evgeny Evgenievich thường xuyên hơn. Ông đưa sách cho tôi đọc và tôi gặp ông một tuần một lần ở trường sư phạm - nơi ông giảng dạy - để thảo luận về những gì mà tôi đã đọc được. Evgeny Evgenievich chơi bóng đá, khúc côn cầu trên băng và bóng chuyền thường xuyên, nhưng giống như nhiều người đàn ông Xô viết thời đó, ông cũng là người nghiện thuốc lá nặng. Trong một thời gian dài sau này, mùi thuốc lá đã quện chặt vào tâm trí tôi khi làm toán.

Đôi khi các cuộc thảo luận của chúng tôi kéo dài tới tận đêm khuya. Một hôm, giảng đường chúng tôi ngồi thảo luận bị bảo vệ khóa cửa, ông ấy không nghĩ rằng lại có người ở trong đó khuya tới như vậy. Và chúng tôi phải chú tâm vào cuộc thảo luận lắm nên mới không nghe thấy tiếng vặn của chìa khóa. Thật may, căn phòng này nằm ở tầng trệt và chúng tôi đã quyết định thoát ra qua cửa sổ.

Đó là năm 1984, năm cuối của tôi ở trường cấp ba. Tôi phải quyết định chọn một trường đại học để thi vào. Moscow có nhiều trường, nhưng chỉ có một nơi để học toán thuần túy: Đại học Tổng hợp Moscow, được biết đến dưới cái tên tiếng Nga viết tắt, MGU - *Moskovskiy Gosudastvennyy Universitet*. Khoa Toán-Cơ (*Mekh-Mat*) vốn nổi tiếng là ngọn cờ đầu trong chương trình giảng dạy toán học của toàn Liên bang Xô viết.

Cuộc thi vào đại học ở Nga không giống với kỳ thi SAT mà các học sinh Mỹ phải tham gia. Vào *Mekh-Mat*, phải thi bốn bài: thi viết môn Toán, thi vấn đáp môn Toán, thi viết môn Văn và thi vấn đáp môn Vật lý. Những học sinh giống như tôi, tốt nghiệp phổ thông với thứ hạng cao nhất (ở Liên bang Xô viết, những học sinh này sẽ được trao một huy chương vàng) sẽ được nhận ngay sau khi đạt điểm 5, điểm cao nhất, ở bài thi đầu tiên.

Lúc ấy, tôi đã tiến bộ xa hơn toán phổ thông rất nhiều, và rất có khả năng vượt qua các bài thi ở MGU.

Nhưng tôi đã quá lạc quan. Điều cảnh cáo đầu tiên đến từ bức thư mà tôi nhận được từ một trường hàm thụ mà tôi đã theo học. Trường này đã được nhà toán học Xô viết trứ danh Israel Gelfand (mà chúng ta sẽ còn nói rất nhiều về ông sau này) cùng với một số nhà toán học nổi tiếng khác thành lập mấy năm trước nhằm giúp đỡ các học sinh giống như tôi, sống ở ngoại ô các thành phố lớn và không được học ở những trường chuyên toán. Mỗi tháng, các học sinh theo học sẽ nhận được một cuốn sách nhỏ giải thích kỹ lưỡng các kiến thức được học trong trường học và có mở rộng thêm chút ít. Cuốn sách cũng chứa một số bài tập, khó hơn so với những bài được các thầy cô cho ở lớp. Học sinh sẽ phải giải và gửi về trường qua bưu điện. Người chấm bài (thường là sinh viên của Đại học Tổng hợp Moscow) sẽ đọc các lời giải đó rồi gửi trả lại, kèm theo điểm, cho các học sinh. Tôi đã theo học ở trường đó ba năm, và ở một trường khác nữa, có định hướng vật lý nhiều hơn. Đó là những nguồn kiến thức hữu ích cho tôi, mặc dù những kiến thức ấy khá sát với những gì mà tôi đã phải học ở trường (không giống như những gì mà tôi đã học riêng với Evgeny Evgenievich).

Lá thư mà tôi nhận được từ trường hàm thụ ấy rất ngắn ngủi: “Nếu em muốn thi vào trường Đại học Tổng hợp Moscow, hãy đến văn phòng của chúng tôi, chúng tôi sẽ rất vui lòng cho em lời khuyên,” trên đó có ghi kèm địa chỉ của MGU và giờ hẹn gặp. Không lâu sau khi nhận được lá thư, tôi bắt một chuyến tàu kéo dài hai giờ tới Moscow.

Văn phòng của trường là một phòng lớn với một nhóm các bàn kê chụm lại và nhiều người đang làm việc, đánh máy, sửa chữa văn bản. Tôi giới thiệu bản thân, trình ra bức thư ngắn mình nhận được, và ngay lập tức được dẫn đến gặp một người phụ nữ trẻ bé nhỏ; chắc chỉ mới hơn ba mươi tuổi.

“Tên em là gì?” chị ta niềm nở hỏi.

“Eduard Frenkel.” (Tôi sử dụng tên tiếng Nga của Edward vào những ngày đó.)

“Và em muốn thi vào MGU?”

“Vâng.”

“Vào khoa nào?”

“*Mekh-Mat.*”

“Chị hiểu rồi.” Mắt hơi sụp xuống, chị ta hỏi tiếp:

“Vậy em mang quốc tịch nào?”

Tôi nói; “quốc tịch Nga.”

“Thật sao? Vậy còn cha mẹ em mang quốc tịch nào?”

“À... Mẹ em là người Nga.”

“Thế còn bố em?”

“Bố em là người Do Thái.”

Chị ta gật đầu.

Cuộc đối thoại này nghe có vẻ siêu thực đối với các bạn, và ngay cả đối với tôi khi đang viết những dòng này. Nhưng ở Liên bang Xô viết vào khoảng 1984 - bạn nhớ Orwell chứ? - thì việc hỏi ai đó về “quốc tịch” của họ không bị coi là việc kỳ quái chút nào. Trong hộ chiểu nội địa mà tất cả các công dân Xô viết phải mang theo bên mình, quả thật có một dòng đặc biệt dành cho “quốc tịch”. Nó đứng sau 1) tên, 2) tên đặt theo cha, 3) họ, và 4) ngày sinh. Vì lý do này, nó được gọi là *pyataya grafa*, “dòng thứ năm”. Quốc tịch cũng được ghi trên giấy khai sinh, như quốc tịch của cha và mẹ. Nếu quốc tịch của họ khác

nhau, như trong trường hợp của tôi, thì cha và mẹ phải quyết định chọn quốc tịch cho con mình.

Thực chất, dòng thứ năm là mật mã để hỏi người đó có phải là người Do Thái không. (Những người mang quốc tịch khác, như Tarta hay Armenia, những người bị kì thị và ngược đãi, dù không tới mức như đối với người Do Thái - cũng sẽ được nhận biết bằng cách này.) Dòng thứ năm viết rằng tôi là người Nga, nhưng phần ghi họ - là họ của cha tôi, rành rành là Do Thái - đã tiết lộ danh tính của tôi.

Cần phải đặc biệt chú ý rằng gia đình tôi là vô thần. Cha tôi không được dạy dỗ theo một tôn giáo truyền thống nào, và tôi cũng vậy. Thực tế là tôn giáo trong xã hội Xô viết bấy giờ gần như không tồn tại. Hầu hết những nhà thờ Chính thống giáo đều bị phá hủy hoặc đóng cửa. Bên trong số ít ỏi những nhà thờ còn tồn tại, bạn thường chỉ bắt gặp một vài *babushkas* (cụ bà), như là bà ngoại tôi. Thịnh thoảng bà tới dự lễ ở nhà thờ duy nhất còn hoạt động ở quê tôi. Các giáo đường Do Thái giáo thậm chí còn ít hơn. Ở quê tôi thì không có cái nào cả; ở Moscow nơi dân số lên tới gần 10 triệu, thì cũng chỉ có một giáo đường Do Thái giáo chính thức mà thôi^[12]. Tới dự lễ ở một nhà thờ hay một giáo đường Do Thái là một hành động rất nguy hiểm: bạn có thể bị các nhân viên an ninh mặc thường phục chú ý, và sau đó sẽ gặp rất nhiều rắc rối. Do vậy, khi ai đó bị coi là người Do Thái, thì nó không mang nghĩa tôn giáo mà là theo nghĩa chủng tộc, nghĩa “huyết thống”.

Ngay cả khi tôi không sử dụng họ của cha mình, thì nguồn gốc Do Thái của tôi cũng sẽ bị hội đồng xét tuyển nhận ra, bởi vì trên mẫu đơn thi tuyển có yêu cầu phải viết cụ thể tên họ đầy đủ của cha và mẹ. Những cái tên đầy đủ đó bao gồm cả tên đặt theo cha, tức là tên người ông của thí sinh. Tên ông nội tôi là Joseph, trong Liên bang Xô viết ở thời kỳ ấy thì nghe đã biết chắc là Do Thái rồi, do vậy đây cũng là một cách khác để lần ra nguồn gốc Do Thái của tôi (nếu họ của cha tôi không tiết lộ danh tính của tôi). Hệ thống đã được thiết lập theo cách mà nó có thể chỉ báo những ai chỉ ít có một phần tư dòng máu Do Thái.

Sau khi đã xác nhận tôi là người Do Thái theo định nghĩa trên, người phụ nữ cất tiếng, “Em có biết rằng người Do Thái thì không được nhận vào Đại học Tổng hợp Moscow không?”

“Ý chị là gì ạ?”

“Ý chị là em không nên mất công nộp đơn vào đây làm gì. Đừng phí thời gian. Họ sẽ không cho em vào học đâu.”

Tôi không biết nói gì cả.

“Đó có phải lý do chị gửi thư cho em không ạ?”

“Phải. Chị chỉ muốn giúp em.”

Tôi nhìn quanh. Rõ ràng là mọi người trong văn phòng đều hiểu cuộc đối thoại này đang nói đến điều gì, ngay cả khi họ không lắng nghe thật kỹ. Chuyện như thế này chắc đã xảy ra hàng tá lần rồi, và mọi người có vẻ như đã quen với nó. Họ đều tránh nhìn tôi, cứ như thể tôi là bệnh nhân giai đoạn cuối vậy. Trái tim tôi se lại.

Tôi từng đối mặt với chủ nghĩa bài Do Thái trước đây, nhưng chỉ ở mức cá nhân chứ không phải có tổ chức như vậy. Khi còn học lớp Năm, một vài bạn cùng lớp của tôi thường chế nhạo tôi bằng cụm từ *evrey*, *evrey* (Do Thái - theo tiếng Nga). Tôi nghĩ họ chẳng có ý niệm gì về ý nghĩa của từ đó (vì có một sự thật rành rành rằng một số đứa còn nhầm lẫn từ *evrey* nghĩa là “Do Thái”, với từ *evropeyets*, nghĩa là “dân châu Âu”) - chắc chúng đã nghe lỏm được những bình luận sặc mùi bài Do Thái từ cha mẹ chúng hay những người lớn khác. (Thật không may, chủ nghĩa bài Do Thái cắm rễ rất sâu trong văn hóa Nga.) Tôi đủ mạnh mẽ và cũng may mắn có một vài người bạn chân thành, những người luôn bên vực tôi, do vậy tôi chưa bao giờ bị những kẻ hay bắt nạt ấy đánh đập, nhưng đó là một trải nghiệm chẳng hề dễ chịu. Tôi tự ti đến nỗi không kể lại những chuyện đó với giáo viên hay cha mẹ, nhưng một ngày thầy giáo đã nghe được và can thiệp. Kết quả là những kẻ ấy ngay lập tức phải lên gặp hiệu trưởng và sự chế giễu chấm dứt.

Cha mẹ tôi cũng đã nghe nói về sự phân biệt đối xử với người Do Thái trong các kỳ thi vào đại học, nhưng không hiểu sao họ không mấy để ý đến điều ấy. Trước hết là ở thị trấn quê tôi, không có nhiều người Do Thái, và tất cả những trường hợp bị phân biệt đối xử mà cha mẹ tôi được nghe đều là về các chương trình học có liên quan tới vật lý. Một lý lẽ điển hình lan truyền rằng sở dĩ những người Do Thái không được chấp nhận bởi vì việc học những chương trình như vậy có liên quan tới những nghiên cứu hạt nhân, và do vậy liên quan tới quốc phòng và bí mật quốc gia; chính phủ không muốn những người Do Thái góp mặt trong các lĩnh vực đó bởi vì họ có thể sẽ di cư tới Israel hay nơi nào đó khác. Theo logic thì lẽ ra chẳng có lý do gì phải quan tâm tới những người học toán thuần túy cả. Nhưng rõ ràng là có ai đó quan tâm.

Mọi điều trong cuộc nói chuyện của tôi ở MGU thật lạ lùng. Và tôi không chỉ nói về khía cạnh “nguy hiểm” của nó. Có thể kết luận rằng người phụ nữ đã nói chuyện với tôi chỉ đơn giản là muốn giúp tôi và những sinh viên khác bằng cách cảnh báo cho chúng tôi về những gì sẽ diễn ra. Nhưng có thực sự đúng như vậy không? Hãy nhớ rằng chúng ta đang nói về năm 1984, khi Đảng cộng sản và KGB vẫn kiểm soát chặt chẽ mọi khía cạnh đời sống ở Liên Xô. Chính sách của nhà nước khi đó coi tất cả các dân tộc đều bình đẳng, và công khai cho rằng việc có những quan điểm khác sẽ đặt bạn vào vòng nguy hiểm. Nhưng, người phụ nữ ấy đã điềm tĩnh nói về điều đó với tôi, một người lạ mặt mới gặp lần đầu, và chị ta cũng không tỏ vẻ lo lắng rằng sẽ bị các đồng nghiệp nghe lén.

Hơn nữa, kỳ thi vào MGU luôn được sắp xếp diễn ra trước một tháng so với các trường khác. Bởi vậy học sinh không đổ vào MGU vẫn có cơ hội dự thi ở nơi khác. Thế thì tại sao lại có ai đó cố gắng thuyết phục họ bỏ cả thi thử? Đường như có một thế lực lớn nào đó đang cố gắng xua đuổi tôi và các sinh viên Do Thái khác.

Nhưng tôi không hề nhụt chí. Sau khi nói đi nói lại chuyện này trong thời gian dài, cả cha mẹ và tôi đều thấy rằng tôi chẳng có gì để

mất cả. Chúng tôi quyết định rằng tôi vẫn cứ nộp đơn thi vào MGU và mong đợi điều tốt đẹp nhất xảy đến.

Bài thi đầu tiên, diễn ra vào đầu tháng 7, là một bài thi viết về toán. Bài thi này bao giờ cũng gồm năm bài toán. Bài toán số năm được coi là bài toán tử thần, và không thể giải được. Nó giống như *nguyên tố thứ năm* của bài thi vậy. Nhưng tôi đã có đủ khả năng để giải tất cả các bài toán, kể cả bài số năm. Ý thức được rằng rất có thể sẽ xảy ra tình huống là người chấm bài có thành kiến và cố gắng tìm kiếm các kẽ hở trong lời giải của mình, tôi đã viết ra mọi thứ một cách chi tiết tới mức khổ sở. Sau đó tôi đã kiểm tra đi, kiểm tra lại tất cả những lập luận và tính toán để đảm bảo rằng mình không mắc một lỗi nào cả. Mọi thứ đều thật hoàn hảo! Trên chuyến tàu trở về nhà, tâm trạng của tôi cứ lâng lâng. Ngày hôm sau, tôi trình bày lại với Evgeny Evgenievich những lời giải của mình, và ông xác nhận rằng mọi thứ đều chuẩn xác. Có vẻ như tôi đã có một khởi đầu tốt.

Bài thi tiếp theo của tôi là toán vấn đáp. Lịch thi diễn ra ngày 13 tháng 7, thật trùng hợp là vào đúng thứ Sáu.

Tôi nhớ như in từng chi tiết về ngày hôm đó. Buổi thi được sắp xếp vào đầu giờ chiều, và tôi cùng với cha mẹ đã đi xe lửa từ nhà đến đó vào buổi sáng. Tôi bước vào phòng thi ở MGU chỉ vài phút trước khi giờ thi bắt đầu. Đó là một lớp học thông thường, trong phòng có lẽ chỉ có mười lăm đến hai mươi thí sinh với bốn hay năm giám khảo. Khi bắt đầu làm bài, mỗi chúng tôi phải rút một tờ giấy từ một chồng lớn trên bàn giáo viên. Mỗi tờ có in hai câu hỏi, và được đặt úp mặt trắng lên trên. Nó cũng giống như việc được rút thăm một vé xổ số nên chúng tôi gọi đó là *bilet*, tấm vé số. Có lẽ có hơn một trăm câu hỏi cả thầy, và tất cả đều đã được biết trước. Tôi không mấy quan tâm về việc mình sẽ rút phải tờ nào vì tôi đã nắm vững khối kiến thức ấy. Sau khi rút “vé số”, mỗi thí sinh chọn một chiếc bàn và ngồi xuống chuẩn bị đáp án, họ chỉ được sử dụng các tờ giấy trắng được cung cấp.

Các câu hỏi trên đề thi của tôi là: (1) Một đường tròn nội tiếp một tam giác và công thức tính diện tích của tam giác theo bán kính của đường tròn đó; và (2) đạo hàm của thương (chỉ cần phát biểu công thức). Tôi đã quá sẵn sàng trả lời hai câu hỏi này, và có thể trả lời chúng dễ như bỡn.

Tôi ngồi xuống, viết ra vài công thức trên giấy nháp, rồi sắp xếp lại các ý tứ trong đầu. Việc này phải mất đến hai phút. Không còn phải chuẩn bị gì thêm nữa, tôi sẵn sàng trả lời. Tôi giơ tay lên. Có vài giám khảo trong phòng, tất cả họ đều đang chờ đợi các thí sinh giơ tay, nhưng thật kỳ lạ, họ đều lơ tôi đi, giống như tôi không hiện diện ở đây vậy. Họ nhìn xuyên qua tôi. Tôi ngồi đó với cánh tay giơ lên trong một lúc: nhưng không có ai phản ứng gì cả.

Rồi mười phút sau, một vài thí sinh khác cũng giơ tay và ngay lập tức, những giám khảo vội chạy tới chỗ họ. Một người ngồi xuống cạnh thí sinh và nghe cậu ta/ cô ta trả lời những câu hỏi của mình. Họ ngồi khá gần với tôi, do vậy tôi có thể nghe thấy họ đối thoại. Những giám khảo đều rất lịch sự và hầu như luôn gật gù tán thưởng, chỉ thi thoảng mới hỏi thêm vài câu nữa. Không có gì bất bình thường cả. Khi thí sinh trả lời xong các câu hỏi ghi trên phiếu (sau khoảng mười phút gì đó), giám khảo cho thí sinh giải thêm một bài toán nữa. Những bài toán ấy cũng có vẻ khá đơn giản, và hầu hết các thí sinh đều ngay lập tức giải được. Chỉ thế là xong!

Một cặp thí sinh đầu tiên thi xong vui vẻ đi ra, chắc hẳn là đạt được điểm 5, điểm cao nhất, còn tôi thì vẫn cứ ngồi đó. Cuối cùng, tôi chớp lấy một giám khảo đi ngang qua, một người trẻ mà dường như mới làm xong tiến sĩ, và thẳng thừng hỏi: “Tại sao các thầy không hỏi em?” Anh ta nhìn ra chỗ khác và nói một cách bình thản: “Xin lỗi, chúng tôi không được phép nói chuyện với em.”

Khoảng một giờ trôi qua, có hai người đàn ông trung tuổi bước vào phòng. Họ bước nhanh lên phía trên chiếc bàn giáo viên rồi giới thiệu mình với người đàn ông ngồi đó. Anh ta gật đầu và chỉ về phía

tôi. Rõ ràng đây là những người mà tôi đang chờ đợi: những người “thăm vấn” tôi.

Họ bước đến bàn tôi và tự giới thiệu. Một người gầy và nhanh nhẹn, còn người kia thì hơi mập với bộ ria mép rất dày.

“Được rồi,” người đàn ông gầy nói - ông ta là người nói nhiều nhất - “Xem chúng ta có gì nào? Câu hỏi đầu tiên là gì?”

“Đường tròn nội tiếp một tam giác và...”

Ông ta ngắt lời tôi: “Định nghĩa một đường tròn xem?”

Ông ta tỏ vẻ khá gay gắt, hoàn toàn tương phản với cách ứng xử với thí sinh của những người trước. Ngoài ra, những giám khảo khác không bao giờ hỏi gì trước khi các thí sinh trình bày xong đáp án cho các câu hỏi ghi trên đề thi.

Tôi nói: “Một đường tròn là tập hợp các điểm trên mặt phẳng có cùng khoảng cách tới một điểm cho trước.”

Đó là định nghĩa chuẩn.

“Không đúng!” người đàn ông đó khoái chí khẳng định.

Làm sao mà định nghĩa như thế lại có thể sai được? Ông ta đợi vài giây rồi nói: “Đó là tập hợp của *tất cả* các điểm trên mặt phẳng cùng cách đều một điểm cho trước.”

Xem ra quá bắt bẻ về từ ngữ - dấu hiệu đầu tiên của những rắc rối sắp xảy ra.

“Thôi được,” ông ta nói, “Vậy thế nào là một tam giác?”

Sau khi tôi nêu lên định nghĩa, ông ta nghĩ ngợi về nó, không khó để nhận ra ông ta đang cố bối lông tìm vết, rồi tiếp tục: “Và thế nào là một đường tròn nội tiếp một tam giác?”

Câu hỏi như thế này dẫn ta tới định nghĩa của một đường tiếp xúc, sau đó thì là “đường thẳng”, rồi những thứ khác nữa, và sớm muộn gì thì ông ta cũng sẽ hỏi tôi tiên đề thứ năm của Euclid về tính duy nhất của các đường thẳng song song, điều mà thậm chí còn không nằm trong chương trình phổ thông! Chúng tôi đang nói về các vấn đề chẳng có

liên quan gì tới câu hỏi trên đề thi và vượt xa hơn những gì mà tôi được coi như có biết đến.

Mọi từ tôi nói ra đều bị đặt câu hỏi. Mọi khái niệm nêu ra phải được định nghĩa, và nếu có khái niệm nào khác được nhắc đến trong định nghĩa đó, thì ngay lập tức tôi được yêu cầu định nghĩa nó luôn.

Khỏi phải nói, nếu họ của tôi là Ivanov, tôi sẽ không bao giờ bị hỏi bất kỳ câu hỏi nào kiểu như vậy. Giờ nghĩ lại, lẽ ra lúc đó tôi nên có hành động khôn ngoan là phản đối ngay và nói với các giám khảo đó rằng họ đã lạc đề. Nhưng bây giờ nói điều này thì quá dễ. Lúc đó tôi chỉ mới mười sáu tuổi, còn những người đó hơn tôi tới hai năm hai sáu tuổi. Họ còn là những cán bộ điều hành một cuộc thi ở trường Đại học Tổng hợp Moscow, và tôi buộc phải trả lời những câu hỏi của họ tốt nhất có thể.

Sau gần một giờ đồng hồ tra vấn, chúng tôi chuyển sang câu hỏi thứ hai trên đề thi. Cho tới lúc đó, những thí sinh khác đã thi xong và ra về hết, để lại phòng thi trống hoác. Rõ ràng tôi là thí sinh duy nhất cần phải được “chăm sóc cẩn thận”. Tôi đoán rằng họ đã cố ý sắp chỗ các thí sinh Do Thái để không có hơn một hay hai thí sinh trong cùng một phòng thi.

Câu hỏi thứ hai yêu cầu tôi phải viết công thức tính đạo hàm của thương. Tôi được phép không phải trình bày bất kỳ định nghĩa hay chứng minh nào. Câu hỏi viết cụ thể như thế, chỉ cần nêu công thức thôi. Nhưng dĩ nhiên, hai giám khảo kia khẳng khẳng đòi tôi phải giải thích cho họ hẳn một chương trong sách giải tích.

“Hãy nêu định nghĩa của đạo hàm?”

Định nghĩa chuẩn xác mà tôi nêu có liên quan đến khái niệm giới hạn.

“Vậy thế nào là giới hạn?” Rồi sau đó là “Hàm số là gì”, và cứ như thế các câu hỏi nối tiếp nhau được đặt ra.

Vấn đề phân biệt chủng tộc ở kỳ thi tuyển vào trường MGU đã từng là chủ đề của nhiều sách báo. Chẳng hạn, trong bài báo sâu sắc của mình đăng trên tờ *Notices of the American Mathematics Society* (Thông tin của Hội Toán học Mỹ), nhà toán học và giáo dục học Mark Saul lấy câu chuyện của tôi làm ví dụ. Ông so sánh bài thi vấn đáp của tôi với cuộc truy vấn của Hoàng hậu Đỏ đối với cô bé Alice trong cuốn *Alice ở xứ sở diệu kỳ*. Tôi biết hết các câu trả lời, nhưng trong cuộc chơi này, nơi mà mọi thứ nói ra đều bị bắt bẻ để chống lại tôi, thì tôi không thể có cơ may thắng được.

Ở một bài báo khác cũng với chủ đề này trên tờ *Notices*, nhà báo George G. Szpiro đã đưa ra lời giải thích như sau:

Trong các kỳ thi tuyển sinh, những thí sinh người Do Thái - hay có tên nghe có vẻ Do Thái - đều bị tách riêng ra để “đối xử đặc biệt”... Những rào cản sẽ được dựng lên ở bài thi vấn đáp. Họ sẽ được giao cho những câu hỏi “hóc búa” đòi hỏi những suy luận rất khó và các tính toán rất dài. Một vài câu hỏi là không thể giải được, hay được phát biểu rất tù mù hoặc không thể có đáp án đúng. Chúng không được thiết lập để kiểm tra năng lực của thí sinh mà để loại bỏ những thí sinh “không mong đợi”. Các bài thi vấn đáp có tính vui dấp và rõ ràng là thiếu công bằng thường kéo dài tới năm hay sáu giờ, mặc dù theo quy định thì chỉ giới hạn trong ba giờ rưỡi. Thậm chí nếu các câu trả lời của thí sinh có đúng đi nữa, người ta vẫn tìm ra các lý do để đánh trượt. Một dạo có một thí sinh đã bị đánh trượt vì khi trả lời câu hỏi “định nghĩa đường tròn” đã nói rằng nó là “tập hợp các điểm cách đều một điểm cho trước.” Câu trả lời hoàn toàn đúng, nhưng yêu cầu của giám khảo phải là “tập hợp *tất cả* các điểm cách đều một điểm cho trước”. Ở một lần khác thì câu trả lời vẫn cho câu hỏi đó lại bị cho là không đúng bởi vì thí sinh đã không đặt điều kiện khoảng cách phải khác không. Khi được hỏi về các nghiệm của một phương trình, câu trả lời “1 và 2” bị tuyên bố là sai, câu trả lời đúng theo ý của giám khảo phải là “1 hoặc 2”. (Ở một dịp khác, cũng giám khảo ấy lại nói với thí sinh khác điều hoàn toàn ngược lại, tức là nói “1 hoặc 2” bị xem như là không đúng.)

Nhưng hãy trở lại với bài thi của tôi. Một giờ rưỡi nữa đã trôi qua và rồi một trong hai vị giám khảo nói:

“Thôi được rồi, phần trả lời các câu hỏi coi như đã xong. Đây là bài toán mà chúng tôi muốn cậu giải.”

Bài toán mà ông ta đưa cho tôi khá là khó. Lời giải đòi hỏi phải sử dụng đến Nguyên lý Sturm không được học ở trường phổ thông. Tuy nhiên, tôi đã biết về nó từ các khóa học hàm thụ, do vậy tôi có thể giải được bài toán đó. Và trong khi tôi đang thực hiện những tính toán cuối cùng, thì vị giám khảo quay trở lại.

“Cậu đã làm xong chưa?”

“Gần xong rồi ạ.”

Ông ta nhìn vào giấy nháp của tôi và quả thật thấy lời giải của tôi là chính xác, và rằng tôi chỉ còn đang hoàn tất nốt những tính toán cuối cùng.

“Thôi,” ông ta nói, “để tôi giao cho cậu một bài toán khác.”

Thật lạ lùng, bài thứ hai lại khó gấp đôi bài thứ nhất. Tôi vẫn có thể giải được nó, nhưng một lần nữa vị giám khảo lại đột ngột ngăn tôi giữa chừng.

“Vẫn chưa xong hả?” ông ta hỏi, “thử làm bài này nữa xem.”

Nếu đây là một trận đấu bốc, với một trong hai võ sĩ bị dồn vào góc vũ đài, mặt mũi dính đầy máu me, đang cố gắng một cách tuyệt vọng để đứng vững trước những cú đâm tới tấp giáng xuống người mình (mà rất nhiều những cú đó đánh dưới thắt lưng, có lẽ tôi nên thêm vào như thế), thì bài toán này sẽ tương đương với đòn chí mạng, đòn kết liễu. Bài toán của tôi thoát trông thì có vẻ tầm thường: cho một đường tròn và hai điểm trên mặt phẳng nằm ngoài đường tròn, hãy dựng một đường tròn đi qua hai điểm đó và tiếp xúc với đường tròn đã cho.

Nhưng lời giải thì thực ra lại khá phức tạp. Ngay cả một chuyên gia toán học cũng chưa chắc đã giải ngay được nó. Bạn phải sử dụng một mẹo gọi là phép nghịch đảo hay làm theo một cách dựng hình khá phức tạp. Chẳng phương pháp nào được dạy ở trường phổ thông cả, và do vậy một bài toán như thế phải không được phép ra ở kỳ thi này.

Tôi đã biết về phép nghịch đảo, và nhận ra rằng mình có thể áp dụng nó ở đây. Tôi bắt đầu làm bài, nhưng chỉ vài phút sau, những người thẩm vấn đã trở lại và ngồi kế bên tôi. Một người nói:

“Cậu biết đấy, tôi vừa mới nói chuyện với phó chủ tịch hội đồng thi về trường hợp của cậu. Ông ấy đã hỏi tại sao chúng tôi lại phí phạm thời gian của mình như thế... Hãy xem này,” ông ta kéo ra một biểu mẫu nhìn có vẻ chính thức với một nhận xét ghi nguệch ngoạc trên đó - đây là lần đầu tiên tôi nhìn thấy một biểu mẫu như thế. “Ở câu hỏi đầu tiên của bài thi, cậu không đưa ra được câu trả lời hoàn chỉnh, thậm chí còn không biết định nghĩa của một đường tròn. Do vậy chúng tôi phải cho một điểm trừ. Ở câu hỏi thứ hai, kiến thức của cậu cũng không vững, nhưng tạm chấp nhận được, chúng tôi cho cậu thêm một điểm trừ. Vậy là cậu không giải hoàn thiện bài toán thứ nhất, và không giải được bài toán thứ hai. Còn về bài toán thứ ba? Cậu cũng vẫn chưa giải được. Thấy không, chúng tôi không còn lựa chọn nào khác là đánh trượt cậu.”

Tôi nhìn đồng hồ. Đã hơn bốn giờ trôi qua kể từ khi bài thi bắt đầu. Tôi hoàn toàn kiệt sức.

“Em có thể xem bài thi viết của mình không?”

Người đàn ông còn lại bước trở lên tới chiếc bàn chính và mang lại bài thi của tôi. Ông ta đặt nó trước mặt tôi. Và tôi giở từng trang. Tôi có cảm giác như mình đang ở trong một bộ phim siêu thực. Mọi đáp án đều chính xác, các lời giải cũng vậy. Nhưng có rất nhiều lời nhận xét. Chúng đều được viết bằng bút chì - chắc để họ có thể dễ dàng tẩy xóa đi, tôi đoán thế - nhưng tất cả đều nực cười, như có ai đó đang giễu cợt tôi vậy. Một trong số những nhận xét đó vẫn còn hằn sâu trong tâm trí tôi: trong quá trình tính toán tôi viết “ $\sqrt{8} > 2$ ”. Và có một lời nhận xét ghi cạnh đó: chưa chứng minh. Thật sao? Những lời nhận xét khác cũng chẳng khá hơn. Và họ đã cho tôi điểm mấy, đối với năm bài toán mà tôi đã giải, với tất cả các đáp án đều đúng? Không phải 5,

không phải 4. Mà là một điểm 3, tương đương với điểm C ở Mỹ. Họ đã cho tôi điểm C với một bài thi như vậy ư?

Tôi biết mọi chuyện đã chấm dứt. Sẽ không có cách nào để tôi chiến đấu với hệ thống này cả. Tôi nói: “Được thôi.”

Một trong hai người đàn ông hỏi: “Cậu sẽ không xin phúc khảo chứ?”

Tôi biết rằng có một ban phúc khảo. Nhưng họ sẽ lại cho bao nhiêu điểm? Có lẽ tôi sẽ nâng được điểm ở bài thi viết từ 3 lên 4, nhưng kết quả phúc khảo ở bài thi vấn đáp sẽ khó khăn hơn nhiều: tôi sẽ nhận được những lời lẽ chống lại tôi. Và ngay cả nếu tôi có thể nâng điểm trên 3, vậy thì sao? vẫn còn hai bài thi nữa để họ có thể tiếp tục đánh trượt tôi.

Và đây là những gì George G. Szpiro đã viết trong tờ *Notices*:

Thậm chí nếu một thí sinh, thật khó tin, đã vượt qua cả hai bài thi viết và vấn đáp, thí sinh ấy cũng có thể bị đánh trượt trong bài làm văn về văn học Nga với cụm từ nhận xét quen thuộc “chủ đề chưa được đào sâu đầy đủ”. Với những ngoại lệ rất hiếm hoi, việc phúc khảo để nâng điểm cũng không có chút cơ hội thành công nào. May lắm thì bài thi bị lỡ đi, còn tồi tệ nhất là thí sinh sẽ bị trừng phạt vì tỏ ra “xúc phạm các giám khảo”.

Một câu hỏi lớn hơn là: tôi có thực sự muốn bước chân vào một trường đại học đã làm mọi thứ có thể trong phạm vi quyền lực của mình để ngăn tôi vào học? Tôi trả lời, “Không. Thực ra, em muốn rút lại đơn xin dự thi.”

Mặt họ bừng sáng. Không phúc khảo có nghĩa là sẽ bớt rắc rối cho họ, và bớt nguy cơ chuốc lấy phiền hà.

“Đúng đấy,” người đàn ông nhỏ con cất tiếng, “Tôi sẽ đưa lại hồ sơ cho cậu ngay đây.”

Chúng tôi bước ra khỏi phòng và đi vào thang máy. Cánh cửa đóng lại. Chỉ có hai chúng tôi trong thang máy. Vị giám khảo rõ ràng

đang có tâm trạng tốt. Ông ta nói, “Cậu đã làm bài rất tốt. Một màn thể hiện rất ấn tượng. Tôi rất băn khoăn muốn hỏi cậu: cậu có học chuyên toán không?”

“Em lớn lên trong một khu phố nhỏ; chỗ chúng em không có trường chuyên toán.”

“Thật sao? Có lẽ cha mẹ cậu là những nhà toán học chẳng?”
“Không, họ là kỹ sư.”

“Thú vị làm sao... Đây là lần đầu tiên tôi được thấy một học sinh giỏi như vậy mà lại không học chuyên toán.”

Tôi không thể tin vào những điều mà ông ta nói. Người đàn ông này mới đánh trượt tôi sau một bài thi hết sức thiếu công bằng, đầy tính kỳ thị, màn tra tấn tàn nhẫn kéo dài tới gần năm giờ đồng hồ. Tất cả những gì tôi biết là ông ta đã giết chết giấc mơ trở thành một nhà toán học của tôi. Một cậu học sinh mười sáu tuổi, mà lỗi lầm duy nhất chỉ do xuất thân từ một gia đình Do Thái... Thế mà giờ đây người đàn ông này lại đang khen ngợi tôi và hy vọng tôi sẽ cởi mở với ông ta sao?!

Nhưng tôi có thể làm gì bây giờ? Hét vào tai hay đâm vào mặt ông ta? Tôi chỉ đứng đó, im lặng, choáng váng. Ông ta tiếp tục: “Hãy để tôi cho cậu một lời khuyên. Hãy đến học ở Học viện Dầu khí Moscow. Họ có một chương trình toán ứng dụng, cũng khá tốt. Ở đó họ sẽ nhận những học sinh *giống như cậu*.”

Cửa thang máy mở, và một phút sau ông ta đưa trả tôi một tập hồ sơ đăng ký dự thi dày cộp, với một bó những giải thưởng và huy chương thời phổ thông bị buộc một cách kỳ lạ ở bên ngoài.

“Chúc cậu may mắn,” ông ta bảo, nhưng tôi đã quá kiệt sức nên chẳng buồn đáp lại. Ước mong duy nhất của tôi khi ấy là biến ngay khỏi cái nơi quái quỷ đó.

Lát sau, tôi ra được bên ngoài, trên bậc thềm khổng lồ của tòa nhà đồ sộ trường MGU. Tôi lại được hít thở khí trời mùa hè mát mẻ và nghe

thấy những âm thanh của thành phố lớn vọng tới từ một chốn xa xôi. Trời đang tối dần và quanh tôi gần như chẳng có ai. Nhưng tôi ngay lập tức nhận ra cha mẹ mình, trong suốt thời gian họ đã sốt ruột đứng đợi tôi trên bậc thềm này. Chỉ nhìn qua gương mặt tôi và tập hồ sơ tôi đang cầm trên tay, họ đã hiểu ngay những gì đã xảy ra ở trong.

☞ Đó là một năm trước khi Gorbachev lên nắm quyền ở Liên Xô, và một vài năm trước khi ông thi hành chính sách *perestroika* của mình. Chế độ Xô viết toàn trị vào năm 1984, về nhiều phương diện, là một bản sao đầy ám ảnh của cuốn sách đậm chất tiên tri của George Orwell.

Chương 4

KEROSINKA

Đêm đó, sau khi kết thúc buổi thi, cha mẹ và tôi trở về nhà khá muộn. Chúng tôi vẫn chưa hết sốc, và không tin vào những gì đã xảy ra.

Đây là một trải nghiệm rất đau buồn cho cả cha và mẹ tôi. Tôi luôn gần gũi với họ, và họ luôn trao cho tôi tình yêu thương cùng sự ủng hộ vô điều kiện. Họ không hề ép buộc tôi phải học chăm chỉ hơn hay chọn một nghề nghiệp cụ thể nào, mà chỉ động viên tôi theo đuổi niềm đam mê của mình. Và dĩ nhiên là họ tự hào về những thành tích của tôi. Cả hai người đã bị choáng váng trước những gì diễn ra trong buổi thi của tôi, vì tính bất công của nó và vì họ không thể làm gì để bảo vệ con trai.

Ba mươi năm trước, năm 1954, ước mơ của cha tôi là trở thành một nhà vật lý lý thuyết cũng đã bị vỡ tan tành một cách tàn nhẫn như vậy, nhưng bởi một lý do khác. Giống như hàng triệu người dân vô tội, cha của ông, tức ông nội tôi, là nạn nhân của sự khủng bố từ Stalin. Ông bị bắt năm 1948 vì bị vu cáo có âm mưu làm nổ tung một nhà máy ô tô lớn ở Gorky (bây giờ là Nizhny Novgorod), nơi ông làm trưởng phòng cung ứng ở đó. “Bằng chứng” duy nhất trong bản cáo trạng là vào thời điểm bị bắt ông có sở hữu một bao diêm. Ông bị đưa đi lao động khổ sai ở một mỏ than phía bắc nước Nga, một phần của quần đảo Gulag mà Alexander Solzhenitsyn và những nhà văn khác đã mô tả lại hết sức sống động nhiều năm sau này. Ông đã bị coi là “kẻ thù của nhân dân” và cha tôi hẳn nhiên là “con kẻ thù của nhân dân”.

Cha tôi đã bị ép phải viết điều này trong đơn xin dự thi vào khoa Vật lý của Đại học Gorky. Thậm chí tốt nghiệp phổ thông với bằng xuất sắc, và lẽ ra được vào thẳng, nhưng ông vẫn bị trượt ở vòng phỏng vấn, mà mục đích duy nhất của nó là loại bỏ người thân của “các kẻ thù của nhân dân”. Thế là cha tôi buộc phải vào học ở một trường kỹ thuật. (Giống như nhiều tù nhân khác, ông nội tôi được phục hồi quyền công dân và trả tự do theo sắc lệnh năm 1956 của Nikita Khrushchev, nhưng khi đó là quá muộn để lấy lại sự công bằng.)

Và bây giờ, ba mươi năm sau, con trai của ông lại phải trải qua một trải nghiệm tương tự.

Nhưng chúng tôi không có thời gian để ngồi than vãn. Chúng tôi phải nhanh chóng quyết định sẽ làm gì tiếp theo, và câu hỏi đầu tiên là tôi nên nộp đơn thi tiếp vào trường nào. Tất cả các trường đều tổ chức kỳ thi tuyển cùng một lúc, trong tháng 8, tức là hơn hai tuần sau đó, và tôi sẽ chỉ được chọn một trường thôi.

Sáng hôm sau, cha tôi dậy sớm và quay trở lại Moscow. Ông nghiêm túc làm theo lời khuyên của vị giám khảo ở MGU. Có vẻ như vị ấy cố gắng giúp tôi, có lẽ vậy, như là cách đền bù phần nào cho sự bất công mà ông ta đã gây ra. Do vậy khi đến Moscow, cha tôi tới thẳng văn phòng tuyển sinh của Học viện Dầu khí^(*). Bằng cách nào đó, cha tôi tìm được người sẵn sàng nói chuyện riêng với ông để trình bày về tình thế của tôi. Người đó nói rằng ông ta đã biết về sự kỳ thị người Do Thái ở MGU nhưng chuyện ấy không xảy ra ở Học viện Dầu khí. Ông ta cũng nói rằng trình độ của các thí sinh thi vào chương trình toán ứng dụng của họ khá cao, vì rất nhiều thí sinh như tôi, những người không được nhận vào MGU. Kỳ thi tuyển sẽ không hề dễ dàng. Nhưng ông ấy có nói thêm rằng “nếu con trai ông thực sự thông minh như ông nói, cậu ấy sẽ được nhận. Không có chuyện phân biệt đối xử với người Do Thái trong kỳ thi tuyển vào trường này”.

“Mặc dù vậy, tôi vẫn có điều phải cảnh báo ông,” ông ta nói ở cuối cuộc trò chuyện, “Chương trình sau đại học được điều hành bởi những

người khác, và tôi e rằng con trai ông có thể sẽ không được nhận học sau đại học.”

Nhưng đó là chuyện của năm năm tới, còn quá xa xôi.

Cha tôi đến một số trường khác ở Moscow có chương trình toán ứng dụng nhưng không ở đâu ông nhận được thái độ ứng xử như ở Học viện Dầu khí. Do vậy, tối hôm đó khi trở về nhà và thông báo tin tức mới, chúng tôi ngay lập tức quyết định rằng tôi sẽ thi vào Học viện Dầu khí, và theo chương trình toán học ứng dụng của họ.

Học viện này là một trong số hàng tá trường ở Moscow đào tạo kỹ sư cho nhiều ngành công nghiệp khác nhau, như Học viện Luyện kim và Học viện Kỹ thuật đường sắt (ở Liên Xô, rất nhiều trường đại học được gọi là “Học viện”). Kể từ cuối thập niên 1960, việc kỳ thi người Do Thái ở MGU đã “tạo ra một thị trường cung cấp, nơi đào tạo toán học cho các học sinh Do Thái,” Mark Saul viết trong bài báo của mình. Học viện Dầu khí “bắt đầu phục vụ thị trường này, hưởng lợi từ chính sách kỳ thị người Do Thái của các trường đại học khác để chiêu mộ các học sinh có chất lượng cao.” Mark Saul giải thích:

Biệt danh Kerosinka của Học viện này đã phản ánh cả niềm tự hào lẫn sự yếm thế [của họ]. Kerosinka là một loại lò sưởi dùng dầu hỏa, tuy công nghệ thấp nhưng lại rất hiệu quả trong điều kiện thiếu thốn. Các sinh viên và học viên sau đại học của Học viện nhanh chóng được biết đến dưới cái tên “kerosineshchik”, và ngôi trường đã trở thành thiên đường cho những sinh viên Do Thái có niềm đam mê toán học.

Bằng cách nào mà định mệnh lại chọn Kerosinka làm một kho chứa tài năng lớn như thế? Thật không dễ trả lời câu hỏi này. Chúng ta biết rằng nhiều học viện khác cũng hưởng lợi từ việc loại bỏ các thí sinh Do Thái của MGU. Chúng ta cũng biết rằng việc thiết đặt chính sách gạt bỏ này là một hành động có chủ ý, và có lẽ ban đầu nó cũng gặp phải những cản trở nhất định. Sẽ dễ dàng hơn cho một số học viện nếu họ tiếp tục nhận các sinh viên Do Thái thay vì đưa ra một chính sách mới. Nhưng một khi hiện tượng này phát triển và có cả một lực lượng các sinh viên Do Thái ở Kerosinka, tại sao nó vẫn được dung thứ? Có nhiều lời xì xào kín đáo về một âm mưu của ủy ban an ninh quốc gia (KGB) muốn giám sát các sinh viên Do Thái ở một hay hai

nơi. Nhưng một trong những động lực có lẽ tích cực hơn là: ban điều hành của học viện có thể đã thấy một khoa phát triển tốt và họ làm những gì có thể để duy trì hiện tượng đó.

Tôi tin rằng câu cuối cùng thì chính xác hơn. Chủ tịch (hay Hiệu trưởng, như ông thường được gọi) của Học viện Dầu khí, Vladimir Nikolaevich Vinogradov, là một nhà điều hành thông minh được biết đến qua việc tuyển các giáo sư, những người quyết tâm đổi mới công tác giảng dạy và nghiên cứu và qua việc tích cực áp dụng những công nghệ mới trong lớp học. Ông ban hành một chính sách quy định rằng tất cả các kỳ thi (kể cả kỳ thi tuyển sinh) đều phải thực hiện ở dạng *thi viết*. Dĩ nhiên, vẫn có cơ hội lạm dụng ngay cả trong các bài thi viết (như trường hợp của tôi trong bài thi viết ở MGU), nhưng chính sách này sẽ ngăn chặn kiểu đánh trượt như đã từng xảy ra ở bài thi vấn đáp của tôi. Tôi sẽ không ngạc nhiên nếu đó là quyết định cá nhân của Vinogradov nhằm ngăn chặn sự kỳ thị các thí sinh Do Thái, và nếu quả như vậy, thì nó phải đòi hỏi ở ông sự thiện chí và có lẽ cả lòng can đảm nữa.

Đúng như dự đoán, dường như không hề có sự kỳ thị ở các bài thi tuyển. Tôi đã được nhận sau khi bài thi đầu tiên (thi viết môn toán) của tôi đạt điểm 5, tức là điểm A (thí sinh được huy chương vàng sẽ được nhận vào ngay lập tức nếu họ đạt điểm A ở bài thi đầu tiên). Một điều bất ngờ là, điểm A đó đến với tôi thật không dễ dàng bởi vì hình như một lời giải nào đó của tôi đã bị nhập liệu không chính xác vào hệ thống chấm điểm tự động, và hệ quả là điểm số ban đầu tôi chỉ là 4, tức là điểm B. Tôi đã phải trải qua quá trình phúc khảo, tức là phải xếp hàng chờ đợi trong nhiều giờ, với tất cả những suy tư tồi tệ nhất luẩn quẩn trong đầu. Nhưng ngay khi tôi bước vào và nói chuyện với hội đồng phúc khảo, thì sai lầm được tìm thấy và khắc phục nhanh chóng, lời xin lỗi đã được đưa ra và câu chuyện truyền kỳ về kỳ thi tuyển của tôi đã đến hồi khép lại.

Ngày 1 tháng 9 năm 1984, năm học mới bắt đầu và tôi gặp các bạn cùng lớp mới. Chỉ có năm mươi sinh viên được nhận vào chương trình này mỗi năm (đổi lại, ở *Mekh-Mat* con số này lên tới gần 500). Rất nhiều trong số họ cũng từng có những trải nghiệm giống như tôi. Họ là những người thuộc số các sinh viên toán thông minh nhất, tài năng nhất.

Trừ tôi và một sinh viên khác tên là Misha Smolyak đến từ Kishinev, người trở thành bạn cùng phòng ký túc với tôi, còn thì mọi người đều đến từ Moscow. Những người sống ngoài Moscow có thể nộp đơn dự thi vào đây chỉ khi tốt nghiệp phổ thông với một huy chương vàng, thật may mắn là tôi có nó.

Rất nhiều bạn cùng khóa với tôi từng học ở những trường phổ thông tốt nhất Moscow có các lớp chuyên .toán: đó là các trường số 57, 179, 91 và 2. Một số trong đó sau này đã trở thành các chuyên gia toán học và hiện đang là giáo sư của những trường đại học tốt nhất trên thế giới. Chỉ ở lớp tôi thôi, đã có vài nhà toán học giỏi nhất ở thế hệ chúng tôi: Pasha Etingof, đang là giáo sư ở MIT; Dima Kleinbock, giáo sư ở Đại học Brandeis; và Misha Finkelberg, giáo sư ở Đại học Kinh tế Moscow. Đó là một môi trường học tập rất năng động.

Toán học được dạy ở Kerosinka thuộc trình độ cao cấp, và những môn học cơ bản như giải tích, giải tích hàm, và đại số tuyến tính được dạy ở mức độ chặt chẽ chẳng kém gì ở MGU. Nhưng ở đây không có những môn học ở các lĩnh vực khác của toán học thuần túy như hình học và topo. Kerosinka chỉ cung cấp chương trình toán học ứng dụng, do vậy giáo trình của chúng tôi được soạn hướng tới những ứng dụng cụ thể, mà đặc biệt là việc thăm dò và sản xuất dầu khí. Chúng tôi cũng phải học một vài môn mang tính ứng dụng hơn như: tối ưu, giải tích số, xác suất và thống kê. Cũng có một phần lớn dành cho khoa học máy tính.

Tôi rất mừng vì có cơ hội được tiếp xúc với những môn toán ứng dụng này. Chúng dạy tôi rằng thực sự không có sự tách biệt rạch ròi

giữa toán học “thuần túy” và “ứng dụng”; toán học có giá trị ứng dụng cao luôn dựa trên toán học thuần túy cực phức tạp. Nhưng mặc cho kinh nghiệm này có hữu ích thế nào, tôi vẫn không thể quên được tình yêu đích thực của mình. Tôi biết rằng mình phải tìm cách để học các môn toán thuần túy không được dạy ở Kerosinka.

Giải pháp đã tự xuất hiện khi tôi trở thành bạn với những sinh viên khác, bao gồm cả những sinh viên đã từng học tại những trường chuyên toán uy tín ở Moscow. Chúng tôi kể cho nhau nghe chuyện của mình. Các sinh viên là người Do Thái (theo chuẩn mà tôi đã kể ở trên) cũng trượt kỳ thi tuyển sinh, trượt một cách tàn nhẫn như tôi, trong khi tất cả những bạn cùng lớp của họ đã được nhận vào MGU mà không gặp khó khăn gì. Thông qua những sinh viên ấy, họ được biết những gì diễn ra ở *Mekh-Mat*, những môn học nào hay, các bài giảng diễn ra ở đâu và khi nào. Vậy là ngay tuần thứ hai ở Kerosinka, một bạn cùng lớp (tôi nghĩ rằng đó là Dima Kleinbock) đã đến nói với tôi: “Này, chúng tớ đang định đến nghe bài giảng của Kirillov ở MGU. Cậu có muốn đi cùng không?”

Kirillov là một nhà toán học nổi tiếng, và dĩ nhiên là tôi muốn nghe các bài giảng của ông. Nhưng tôi không thể tưởng tượng nổi làm sao mà điều đó lại xảy ra được. Tòa nhà lớn của MGU được cảnh sát bảo vệ nghiêm ngặt. Muốn vào thì bạn phải có một thẻ đặc biệt.

“Đừng lo,” cậu ấy nói, “chúng ta sẽ leo qua tường rào.”

Nghe thật nguy hiểm nhưng đầy kích thích, do vậy tôi đáp, “Chắc chắn rồi.”

Tường rào bên ngoài của tòa nhà khá cao, dễ tới tầm sáu mét, nhưng ở một chỗ có thanh kim loại đã bị bẻ cong, và có thể chui vào được. Nhưng sau đó thì sao? Chúng tôi bước vào tòa nhà từ cửa ngách sau khi đi dọc vài hành lang dài dằng dặc dẫn tới nhà bếp. Từ đó, qua nhà bếp, cố gắng tránh sự chú ý của các nhân viên làm việc ở đó, chúng tôi đi

qua căng tin, rồi tới cửa chính. Đi thang máy lên tầng 14, là tới giảng đường.

Alexander Alexandrovich Kirillov (hay San Sanych, như ông vẫn thường được gọi một cách trìu mến) là một giảng viên có sức lôi cuốn đặc biệt, và là một nhân cách lớn, như tôi được biết khá rõ nhiều năm sau này. Tôi nghĩ ông đang dạy một giáo trình chuẩn về lý thuyết biểu diễn cho sinh viên đại học dựa theo cuốn sách nổi tiếng của mình. Ông đồng thời còn chủ trì một seminar cho các sinh viên sau đại học, mà chúng tôi cũng tham gia.

Chúng tôi vào đó trót lọt là nhờ sự nhân hậu của Kirillov. Con trai ông, Shurik (bây giờ là giáo sư tại Đại học Stony Brook) đã từng theo học ở trường chuyên toán số 179, cùng với Dima Kleinbock và Syoma Hawkin là các bạn cùng lớp của tôi. Khỏi phải nói, San Sanych đã biết quá rõ về tình hình tuyển sinh ở MGU. Nhiều năm sau này, ông nói với tôi rằng ông không thể can thiệp gì vào việc đó được - người ta không cho ông lai vãng tới gần Ban tuyển sinh, còn những người làm việc ở đó hầu hết đều là những cán bộ đảng viên. Do vậy tất cả những gì ông có thể làm là để chúng tôi lén vào lớp học của ông.

Kirillov làm tất cả những gì có thể để các sinh viên từ Kerosinka đến nghe bài giảng của ông cảm thấy được chào đón. Một trong những kỷ niệm đáng nhớ nhất của tôi trong năm thứ nhất đời sinh viên là được đến dự những bài giảng và tọa đàm sinh động của ông. Tôi cũng dự một buổi tọa đàm tổ chức bởi Alexander Rudakov, đó cũng là một trải nghiệm rất tuyệt vời.

Trong thời gian ở Kerosinka, tôi cũng học tất cả những gì về toán mà tôi có thể học được. Tôi sống trong ký túc nhưng mỗi cuối tuần tôi đều về nhà, và vẫn gặp Evgeny Evgenievich vài tuần một lần. Ông khuyên tôi nên đọc những cuốn sách nào, còn tôi thông báo cho ông tiến bộ của mình. Nhưng tôi nhanh chóng đạt tới trình độ mà để duy trì sự tiến bộ và động lực với toán học, tôi cần phải có một người hướng dẫn, người mà tôi có thể gặp thường xuyên hơn không phải chỉ để học

hỏi mà còn để nhận các đề tài nghiên cứu. Nhưng do tôi không ở *Mekh-Mat*, nên tôi không thể tận dụng lợi thế từ nguồn lực khổng lồ mà nó cung cấp. Và lại, tôi quá nhút nhát để đến gặp ai đó như A. A. Kirillov và xin ông hướng dẫn riêng, hay giao cho một đề tài để làm. Tôi cảm thấy mình như một kẻ ngoài cuộc. Cho tới mùa xuân năm 1986 (năm thứ hai ở Kerosinka), sự tự mãn và trì trệ bắt đầu xuất hiện. Với tất cả những lợi thế và may mắn đều không thuộc về mình, tôi bắt đầu hoài nghi khả năng hiện thực hóa giấc mơ trở thành một nhà toán học.

🔗 Ở thời điểm đó nó được biết đến dưới cái tên Học viện Công nghiệp Hóa dầu và Khí Gubkin (theo tên Bộ trưởng kỳ cựu của Bộ Dầu khí Liên Xô, I.M. Gubkin). Sau khi tôi trở thành sinh viên ở đây, nó được đổi tên thành Học viện Dầu khí Gubkin, và sau này là Đại học Dầu khí Gubkin.

Chương 5

NHỮNG MANH MỐI CỦA LỜI GIẢI

Tôi bắt đầu cảm thấy tuyệt vọng thì một hôm trong giờ nghỉ giải lao giữa buổi học ở Kerosinka, một trong những giáo sư toán học mà tôi kính trọng nhất là Alexander Nikolaevich Varchenko tới gặp tôi ở hành lang. Varchenko vốn là học trò cũ của Vladimir Arnold, một trong những nhà toán học Xô viết hàng đầu, và bản thân Varchenko cũng là một nhà toán học tầm cỡ thế giới.

“Cậu có thích nghiên cứu một đề tài toán học không?” ông hỏi.

“Dạ có, dĩ nhiên rồi thưa thầy,” tôi nói, “Nhưng đó là loại đề tài nào ạ?” như thể mình sẽ vui vẻ hoàn thành bất kỳ điều gì.

“Có một vấn đề xuất hiện trong nghiên cứu của tôi, mà tôi nghĩ nó sẽ là một bài toán phù hợp để giao cho một sinh viên thông minh như cậu. Chuyên gia trong lĩnh vực này là Dmitry Borisovich Fuchs.” Đó là tên nhà toán học nổi tiếng tôi từng được nghe danh trước đây. “Tôi đã nói chuyện với ông ấy, và ông ấy đồng ý sẽ hướng dẫn một sinh viên nghiên cứu về đề tài này. Đây là số điện thoại của ông ấy. Hãy gọi cho thầy Fuchs, và ông ấy sẽ nói cho cậu biết cần phải làm gì.”

Đối với một nhà toán học giàu kinh nghiệm như Varchenko, thì việc gặp phải các vấn đề không giải quyết ngay được trong nghiên cứu của mình là chuyện cơm bữa. Nếu vấn đề Varchenko gặp phải có liên quan gần gũi với chương trình ông đang nghiên cứu, thì ông sẽ cố tự giải quyết nó. Nhưng không một nhà toán học nào lại tự mình làm hết tất cả mọi việc được, do vậy họ thường giao những vấn đề nan giải ấy (thường thì đó là những vấn đề mà họ cho là đơn giản hơn so với đề tài nghiên cứu) cho các sinh viên. Đôi khi vấn đề ấy có thể nằm ngoài mỗi

quan tâm trực tiếp của các giáo sư, nhưng họ lại thấy tò mò muốn biết về nó, như trường hợp của tôi. Đó là lý do Varchenko nhờ Fuchs, một chuyên gia trong lĩnh vực này, hướng dẫn tôi. Xét cho cùng, thì đây là một “giao dịch” điển hình trong mối quan hệ xã hội của thế giới toán học.

Điều bất thường trong chuyện này đó là Fuchs không chính thức liên kết giảng dạy với bất kỳ trường đại học nào. Nhưng trong nhiều năm, Fuchs, cùng nhiều nhà toán học đỉnh cao khác, đã cố gắng làm nhẹ bớt ảnh hưởng của sự phân biệt chủng tộc với các sinh viên Do Thái bằng cách giảng dạy riêng cho những người trẻ tài năng, những người bị từ chối nhận vào MGU.

Như một phần trong những nỗ lực ấy, Fuchs tham gia vào hội mà sau này được biết đến dưới cái tên “Đại học Nhân dân Do Thái”, một trường buổi tối không chính thức, nơi ông và các đồng nghiệp giảng dạy cho các sinh viên. Một vài bài giảng trong số đó được tổ chức ở Kerosinka, mặc dù chúng diễn ra trước khi tôi vào trường.

Trường ấy được Bella Muchnik Subbotovskaya, một người phụ nữ dũng cảm đứng ra tổ chức, bà chính là trái tim và linh hồn của nó. Thật không may, KGB đã biết được, và cảnh báo rằng có sự tụ tập trái phép của một đám đông Do Thái. Cuối cùng, bà bị gọi tới KGB để thẩm vấn. Chẳng bao lâu sau buổi thẩm vấn đó, bà bị xe tải đâm chết, trong một bối cảnh rất đáng ngờ, khiến cho nhiều người nghi ngờ rằng thực tế đó là một vụ giết người máu lạnh^[13]. Không có bà chèo lái, trường buổi tối ấy đã tan vỡ.

Tôi đến Kerosinka hai năm sau khi những chuỗi bi kịch ấy xảy ra. Mặc dù ngôi trường buổi tối không còn tồn tại nữa, nhưng vẫn còn một mạng lưới nhỏ những nhà toán học chuyên nghiệp, cá nhân họ, muốn giúp đỡ những sinh viên không may mắn bị ruồng bỏ như tôi. Họ tìm kiếm những sinh viên có tư chất sáng giá rồi trao cho họ lời khuyên, động viên, và đối với một vài trường hợp, chính thức tư vấn và hướng dẫn. Đây là lý do mà Varchenko giao bài toán ấy cho tôi, một sinh viên

ở Kerosinka, chứ không phải ở *Mekh-Mat*, nơi mà, qua những mối quan hệ của mình, ông có thể dễ dàng tìm được một sinh viên như thế. Điều này cũng giải thích tại sao Fuchs sẵn sàng dành thời gian riêng của mình để hướng dẫn tôi.

Và tôi rất mừng vì ông đã nhận lời. Giờ nghĩ lại, tôi nhận ra rằng nếu không có sự tử tế và hào hiệp của Fuchs, tôi không bao giờ có thể trở thành một nhà toán học. Tôi đã học toán ở Kerosinka, và ngồi nghe giảng ở MGU, nhưng chỉ như thế thôi thì vẫn không đủ. Thực tế, hầu như các sinh viên đều không thể làm nghiên cứu nếu không có ai hướng dẫn. Việc có một người hướng dẫn là vô cùng quan trọng.

Dẫu vậy, ở thời điểm đó, tất cả những gì tôi biết là mình có trong tay số điện thoại của Fuchs, một nhà toán học nổi tiếng, và tôi sắp bắt đầu một dự án dưới sự hướng dẫn của ông. Thật không thể tin nổi! Tôi không biết rồi mọi chuyện sẽ kết thúc thế nào, nhưng tôi có thể nhận thấy ngay rằng một điều lớn lao đã xảy ra.

Tối đó, lấy hết can đảm, tôi gọi cho Fuchs từ một trạm điện thoại công cộng và nói với ông tôi là ai.

“Phải, tôi biết,” Fuchs nói, “Tôi phải giao một bài báo cho cậu đọc.”

Chúng tôi gặp nhau vào ngày hôm sau. Fuchs có vẻ ngoài của một người khổng lồ, không hề giống với những gì tôi tưởng tượng. Ông có vẻ rất nghiêm túc và thực dụng.

“Đây,” ông nói và trao cho tôi một bản của bài báo, “hãy cố đọc bài báo này, và ngay khi thấy từ nào mà cậu không hiểu, hãy gọi cho tôi.”

Tôi cảm thấy như ông vừa trao cho mình chiếc Chén Thánh vậy.

Đây là một bài báo, dài mười hai trang, mà ông đã viết vài năm trước, về chủ đề “các nhóm bện”. Ngay tối hôm đó, tôi bắt đầu đọc nó.

Ba năm trước, quá trình học với Evgeny Evgenievich cùng với việc tự học của tôi đã không vô ích. Tôi không chỉ hiểu từng từ trong bài báo, mà còn hiểu cả nội dung của nó. Vì vậy, tôi quyết định sẽ tự

mình đọc toàn bộ bài báo đó. Đây là vấn đề của lòng kiêu hãnh. Tôi còn tưởng tượng xem Fuchs sẽ có ấn tượng thế nào nếu tôi nói mình đã tự hiểu được mọi thứ.

Trước đây tôi từng nghe nói về các “nhóm bện”. Chúng là các ví dụ tuyệt vời về nhóm, một khái niệm mà chúng ta thảo luận trong chương 2. Evgeny Evgenievich đã dùng khái niệm này để nghiên cứu các đối xứng, và do vậy các phần tử của các nhóm mà chúng ta xem xét là những đối xứng của đối tượng nào đó. Chẳng hạn, nhóm đường tròn bao gồm các đối xứng của một chiếc bàn tròn (hay của bất kỳ một đối tượng tròn nào khác), và nhóm bốn phép quay là nhóm các đối xứng của một chiếc bàn vuông (hay của bất kỳ vật hình vuông nào khác). Một khi đã biết khái niệm “nhóm”, chúng ta có thể tìm kiếm các ví dụ khác. Hóa ra lại có nhiều ví dụ về nhóm mà không liên quan gì tới đối xứng cả, và đó là động lực để tôi giới thiệu khái niệm nhóm ngay từ ban đầu. Đây thực sự là một chuyện điển hình. Việc sáng tạo ra một khái niệm toán học có thể được xuất phát từ những vấn đề hay hiện tượng trong một lĩnh vực toán học (hay vật lý, kỹ thuật, v.v.), rồi sau đó nó lại có thể hữu ích và phù hợp với những lĩnh vực khác.

Thực tế thì rất nhiều nhóm *không* bắt nguồn từ những đối xứng. Và các nhóm bện là những nhóm như vậy.

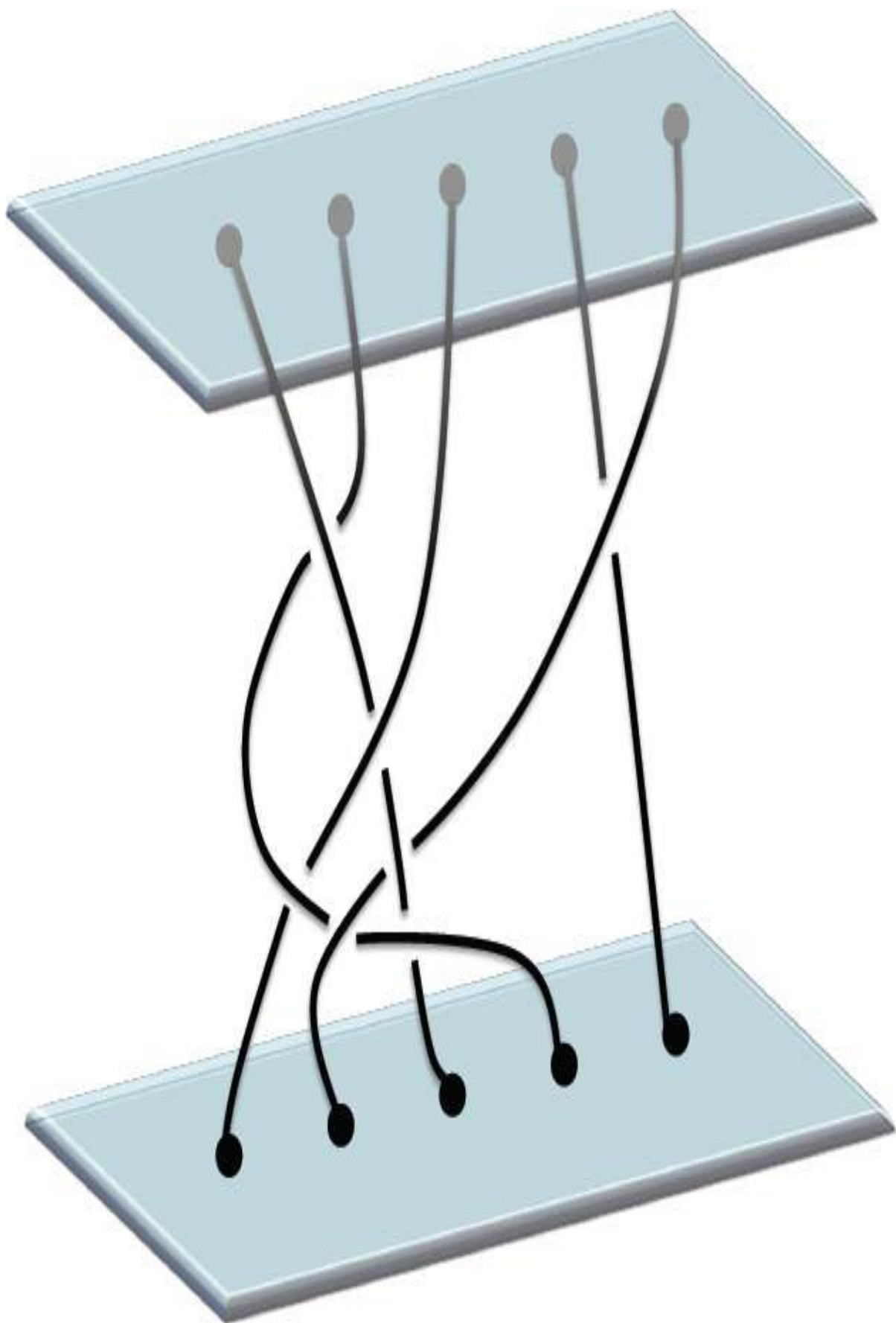
Tôi còn chưa biết những ứng dụng thực tế của các nhóm bện trong những lĩnh vực như mật mã, tính toán lượng tử và sinh học, điều ta sẽ nói tới sau này. Nhưng tôi bị mê hoặc bởi vẻ đẹp thiên bẩm của những khái niệm toán học trừu tượng ấy.

Có một nhóm bện cho mỗi số tự nhiên $n = 1, 2, \dots$. Chúng ta có thể sử dụng những con số này để đặt tên cho mỗi nhóm. Một cách tổng quát, chúng ta gọi chúng là B_n , do vậy với $n = 1$ ta có nhóm gọi là B_1 , với $n = 2$, ta có nhóm gọi là B_2 , v.v.

Để mô tả nhóm B_n , chúng ta trước tiên phải mô tả các phần tử của nó, như đã làm với nhóm các phép quay của chiếc bàn tròn và vuông. Các phần tử của nhóm B_n được gọi là các *bện với n sợi*, như được vẽ

trong hình dưới đây, với $n = 5$. Hãy tưởng tượng hai tấm cứng trong suốt, mỗi tấm có năm chiếc đinh, với một sợi dây nối mỗi đinh ở tấm này tới một đinh ở tấm kia. Bởi vì các tấm trong suốt nên chúng ta có thể nhìn thấy toàn thể từng sợi dây một. Mỗi sợi được cho phép quấn quanh sợi khác thế nào cũng được, nhưng không được *tự* quấn rối chính nó. Mỗi đinh chỉ kết nối với đúng một sợi.

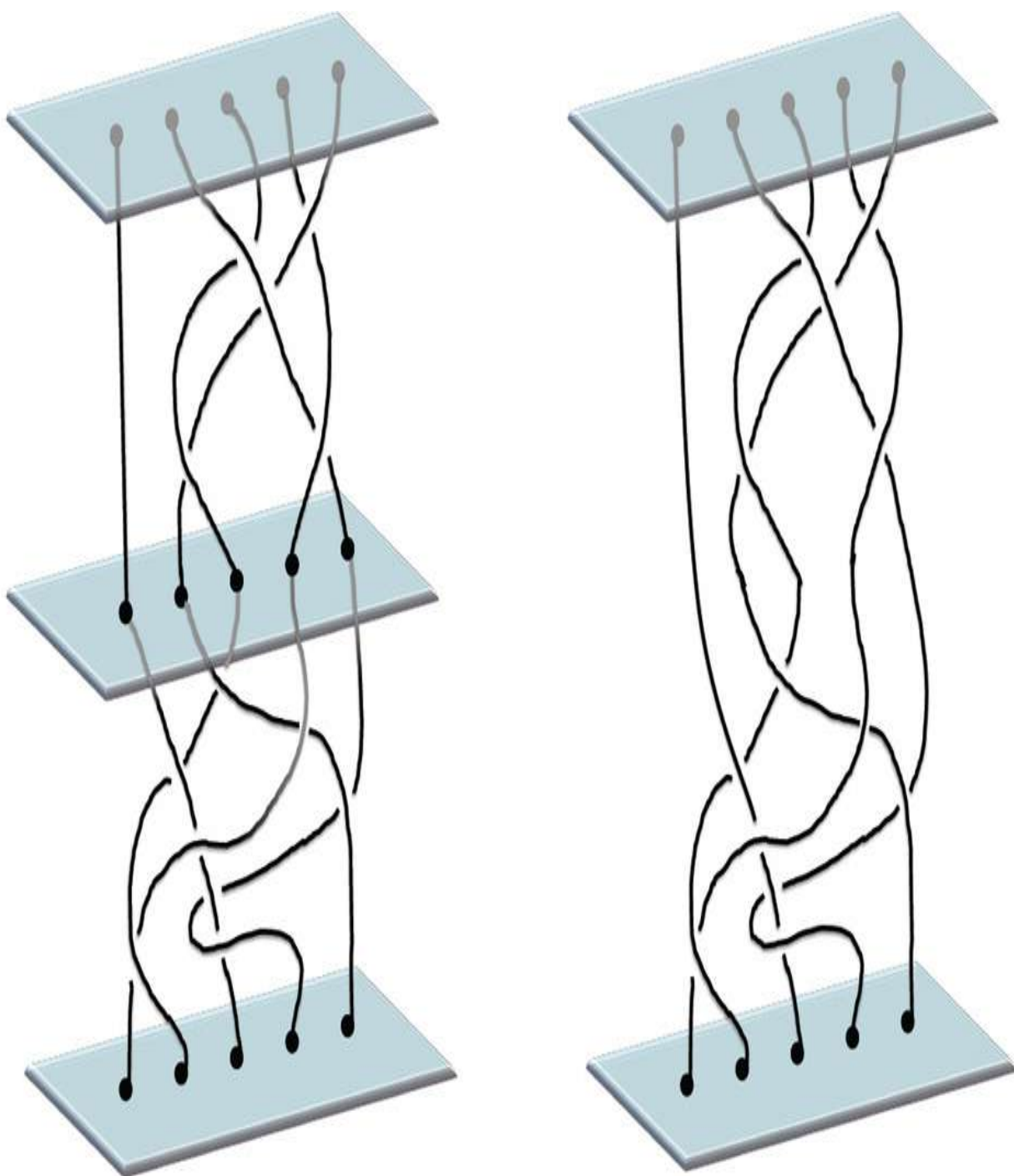
Thứ tổng thể này - hai tấm và nhiều sợi - tạo thành một bện đơn, giống như chiếc xe ô tô có bốn bánh, một động cơ, bốn cánh cửa, v.v. Chúng ta không xét từng thành phần đó một cách riêng rẽ, mà tập trung vào cả bện.



Đó là các bện với n sợi. Bây giờ chúng ta phải chỉ ra rằng tất cả các bện với n sợi tạo thành một nhóm. Điều này có nghĩa là chúng ta phải mô tả cách hợp thành của hai bện như vậy. Nói cách khác, với mỗi cặp các bện với n sợi, chúng ta phải tạo được một bện khác với n sợi, cũng giống như việc áp dụng hai phép quay liên tiếp cho ta một phép quay thứ ba vậy. Và sau đó chúng ta phải kiểm tra xem hợp thành đó có thỏa mãn những tính chất liệt kê trong chương 2 hay không.

Vậy thì, giả sử rằng chúng ta có hai bện. Để tạo ra một bện mới từ đó, chúng ta đặt bện này lên trên bện kia, đóng thẳng các đỉnh, như trong hình vẽ. Sau đó chúng ta bỏ tấm ở giữa đi, đồng thời nối những sợi ở bên trên với những sợi ở bên dưới cùng gần với các đỉnh đã ghép với nhau.

Bện nhận được sẽ cao gấp đôi, nhưng điều này không quan trọng. Chúng ta chỉ cần rút ngắn các sợi và bện thu được sẽ có cùng chiều cao như những bện ban đầu, trong khi vẫn bảo toàn cách các sợi dây đi vòng quanh nhau. Thế đấy! Chúng ta bắt đầu với hai bện, và thu được một bện mới. Đây chính là luật hợp thành của hai bện trong nhóm bện.

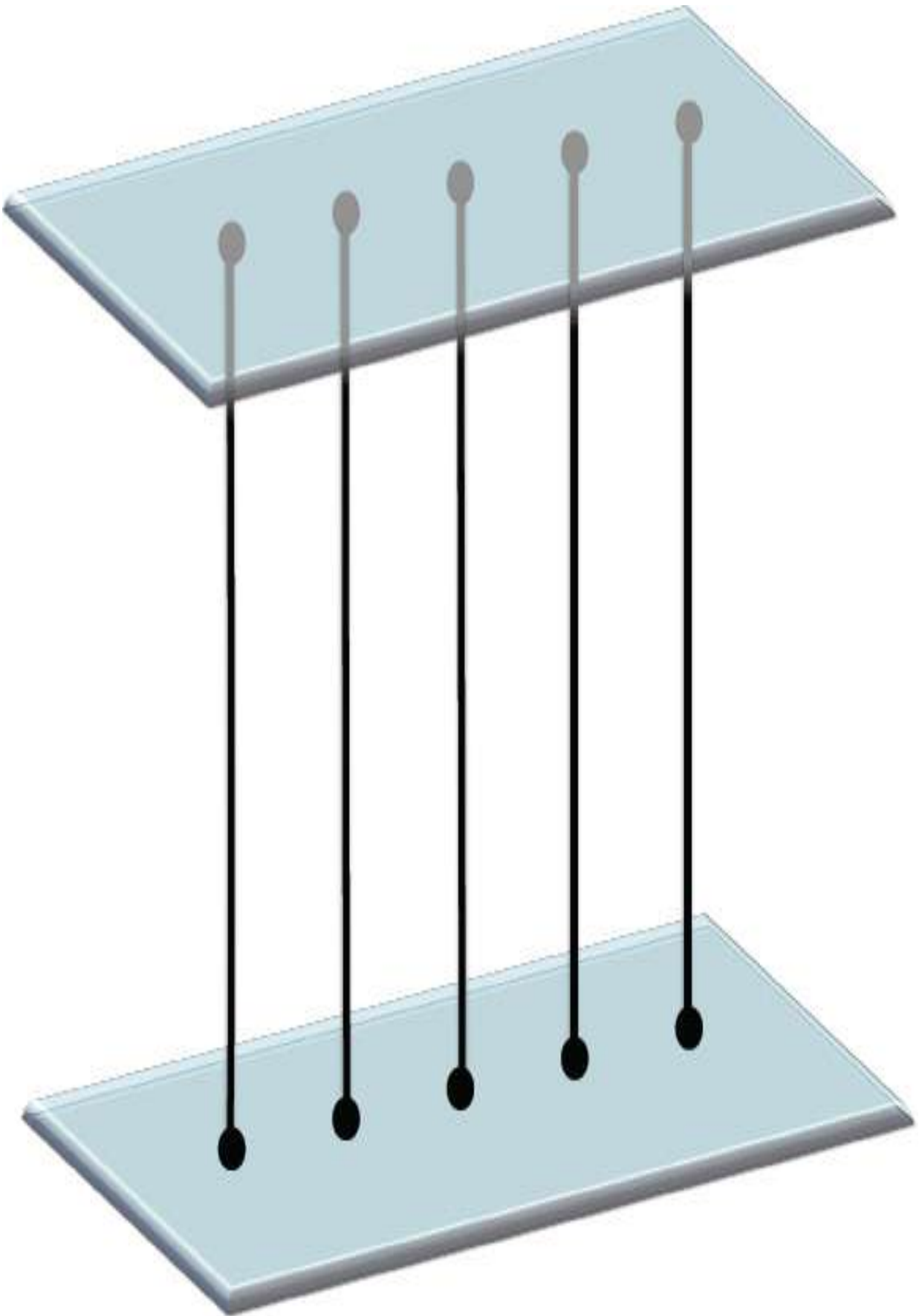


Bởi vì một nhóm bện không bắt nguồn từ các đối xứng, nên đôi khi sẽ tốt hơn nếu ta không nghĩ về phép toán này như là sự “hợp thành” (thuật ngữ tự nhiên hơn trong trường hợp nhóm đối xứng), mà là như phép “cộng” hay “nhân”, tương tự như những phép toán mà chúng ta thực hiện trên các con số. Từ quan điểm này, các bện sẽ giống

như những con số - chúng là những con số “có tóc”, nếu bạn thích nghĩ thế.

Cho trước hai số nguyên, chúng ta có thể cộng chúng lại để thu được một số mới. Giống như vậy, cho trước hai bện, chúng ta có thể tạo thành một bện mới bằng quy tắc đã mô tả ở trên. Nên chúng ta có thể nghĩ về quy tắc này như là “phép cộng” của hai bện.

Bây giờ chúng ta cần kiểm tra xem phép cộng các bện này có thỏa mãn tất cả các tính chất (hay các tiên đề) của một nhóm hay không. Đầu tiên, chúng ta cần có phần tử đơn vị. (Trong nhóm đường tròn, đó là điểm tương ứng với phép quay 0 độ.) Ở đây sẽ là bện mà tất cả các sợi đi thẳng xuống dưới mà không quấn quanh sợi nào khác như trong hình dưới đây. Đây là một dạng bện “tầm thường”, theo nghĩa là thực tế chẳng có bện nào thực sự tồn tại dưới dạng đó, cũng giống như phép quay một góc 0 độ thì thực ra là chẳng quay gì cả.^[14]



Tiếp theo, chúng ta phải tìm một bện là nghịch đảo của một bện b cho trước (trong trường hợp nhóm đường tròn, đó là phép quay cùng một góc nhưng theo chiều ngược lại). Theo định nghĩa phát biểu ở trên, thì nếu ta cộng bện đó với bện b , ta phải thu được bện đơn vị.

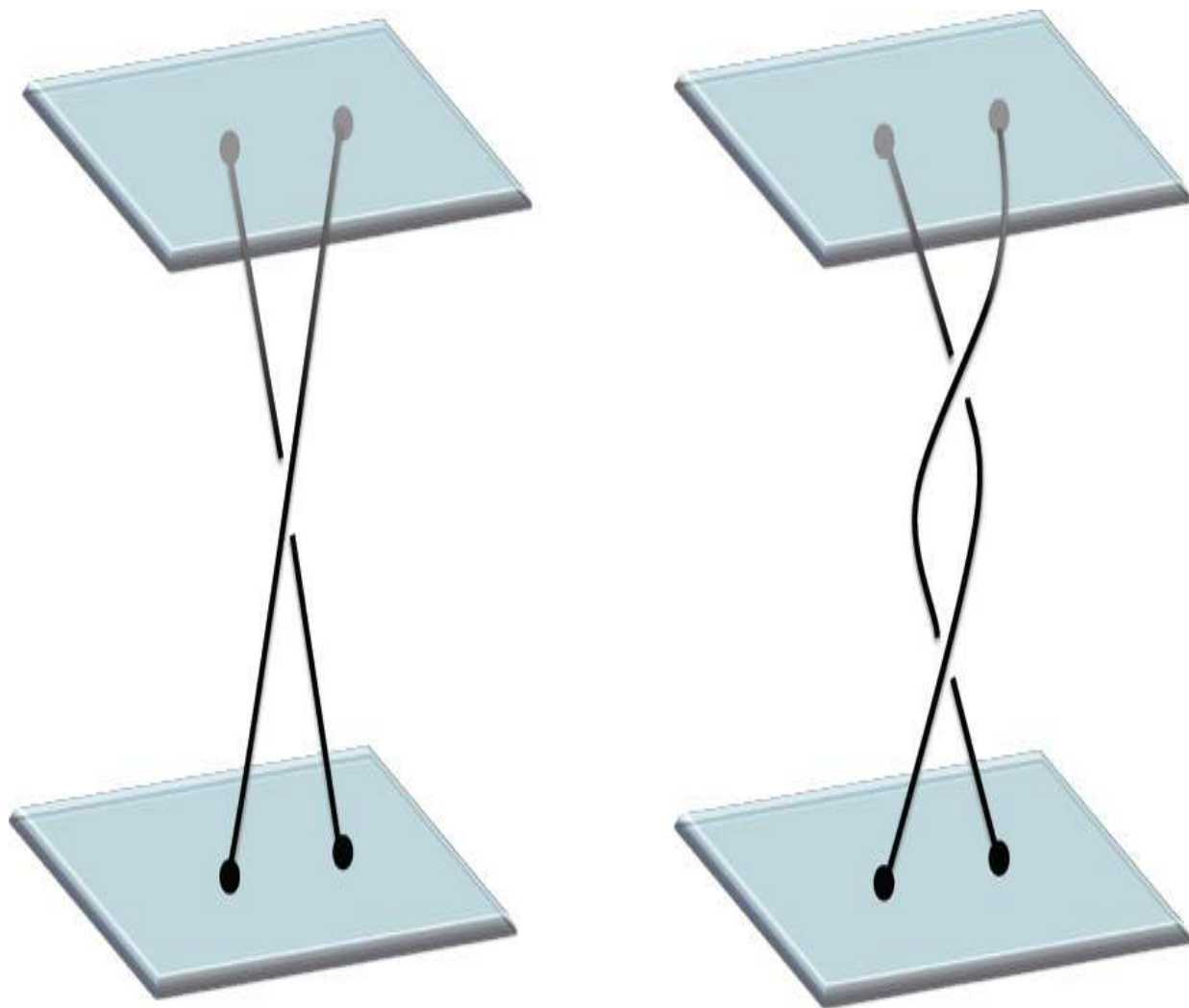
Bện nghịch đảo sẽ là ảnh qua phép đối xứng gương của b qua tấm ở đáy của nó. Nếu chúng ta cộng bện nhận được với bện ban đầu, theo quy tắc vừa nói ở trên, chúng ta có thể sắp xếp lại tất cả các sợi sao cho kết quả thu được là bện đơn vị.

Ở đây tôi cần nhấn mạnh một điểm quan trọng, mà cho tới tận bây giờ tôi vẫn giấu nhem: chúng ta sẽ không phân biệt các bện có thể thu được từ một bện khác bằng cách lôi các sợi, kéo căng và rút ngắn chúng theo bất kỳ kiểu nào mà ta muốn, nếu như không cắt hay gán chúng lại. Nói cách khác, các sợi vẫn phải được gán với các đỉnh, chứ không được đi xuyên qua nhau, nếu không chúng ta có thể tùy ý chỉnh sửa chúng. Hãy hình dung chúng ta chỉ đang sửa lại cái bện cho trước mà thôi. Khi làm như vậy, bện vẫn giữ nguyên (chỉ đẹp hơn thôi!). Theo nghĩa đó thì phép cộng các bện và ảnh đối xứng gương của chúng cho ta bện “giống” như bện đơn vị vậy; nó không hẳn là giống theo nghĩa đen nhưng sẽ trở thành như thế sau khi chúng ta đã chỉnh lại các sợi.^[15]

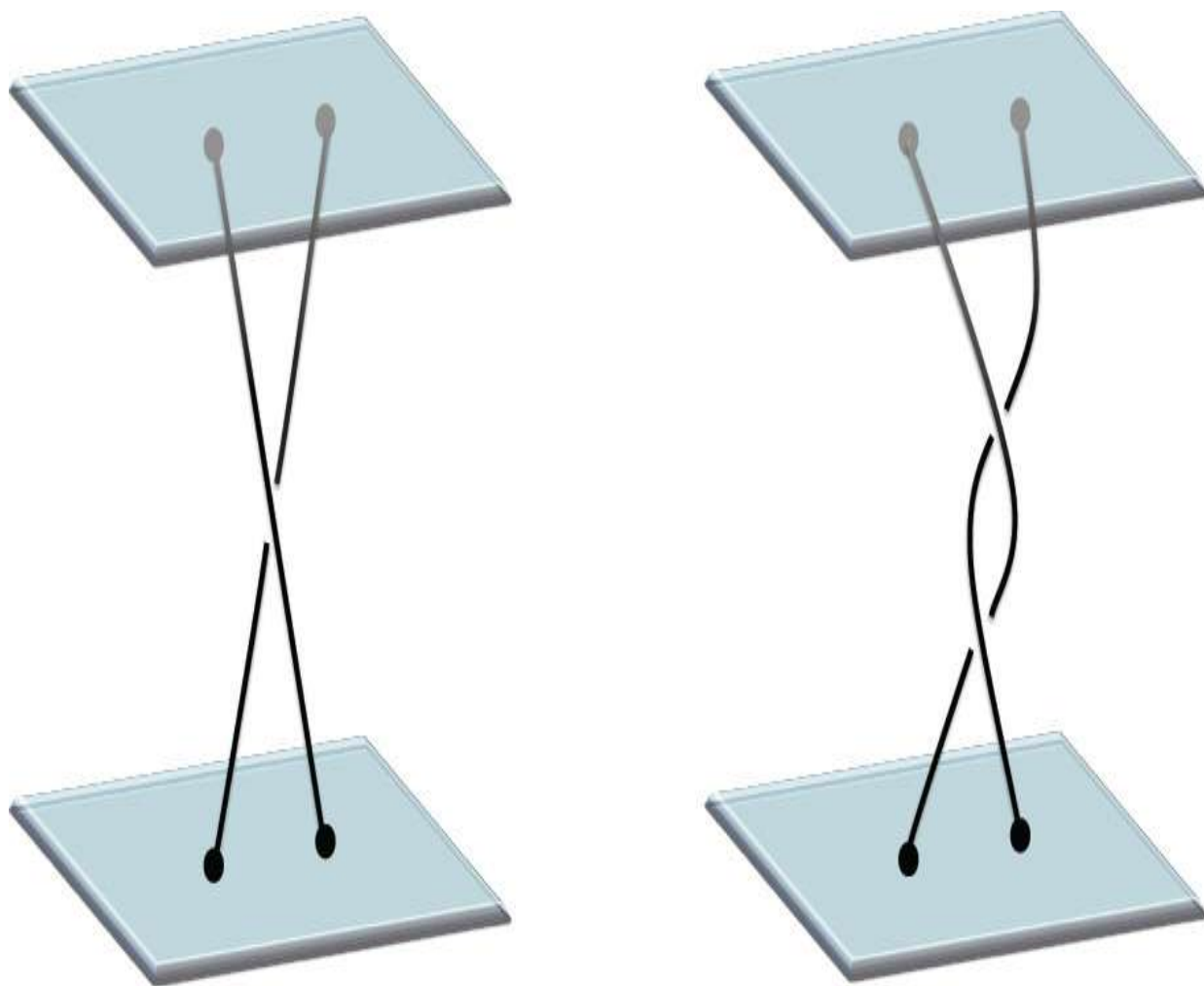
Giờ đây, chúng ta thấy rằng các tiên đề của một nhóm như hợp thành (hay phép cộng), phần tử đơn vị và nghịch đảo - đều được thỏa mãn. Nghĩa là chúng ta đã chứng minh được rằng các bện với n sợi lập thành một nhóm.^[16]

Để xem cụ thể nhóm bện là gì, ta hãy cùng xem xét kỹ lưỡng hơn nhóm đơn giản nhất: nhóm B_2 của các bện với 2 sợi (nhóm B_1 với một sợi chỉ có 1 phần tử, do vậy không có gì để thảo luận thêm cả^[17]). Chúng ta sẽ gán cho mỗi bện như vậy một số nguyên N . Số nguyên mà tôi muốn nói tới ở đây là một số tự nhiên 1, 2, 3...; hoặc 0; hoặc các số âm -1, -2, -3...

Trước tiên, chúng ta gán số 0 cho bện đơn vị. Thứ hai, nếu sợi bắt đầu từ đỉnh bên trái ở tấm bên trên đi xuống nằm bên dưới sợi thứ hai, chúng ta sẽ gán cho bện đó số 1. Còn nếu nó đi vòng quanh sợi kia, chúng ta sẽ gán cho bện tương ứng số 2, cứ thế, như chỉ ra trên hình.



Còn nếu sợi đi từ đỉnh bên trái của tấm trên nằm ở phía trên của sợi còn lại, thì chúng ta sẽ gán cho bện tương ứng số -1, và nếu nó đi vòng quanh sợi kia như ở hình bên dưới, chúng ta sẽ gán cho bện đó số -2 và cứ như thế.



Ta gọi số gán cho một bện theo cách này là “số chồng chéo”. Nếu hai bện có cùng số chồng chéo, chúng ta có thể biến đổi bện này thành bện kia bằng cách “chỉnh lại” các sợi. Nói cách khác, một bện hoàn toàn được xác định bởi số chồng chéo của nó. Do vậy chúng ta có một tương ứng 1-1 giữa các bện hai sợi và các số nguyên.

Sẽ rất hữu ích nếu chú ý tới điều mà chúng ta luôn coi là hiển nhiên: bản thân tập các số nguyên cũng là một nhóm! Tức là, chúng ta cũng có các phép toán cộng, “phần tử đơn vị” là số 0, với số nguyên N bất kỳ, “nghịch đảo” của nó là $-N$. Do vậy tất cả các tính chất của một nhóm được liệt kê ở chương 2 đều thỏa mãn. Thực vậy, ta có $N + 0 = N$, và $N + (-N) = 0$.

Điều mà chúng ta vừa mới tìm ra đó là nhóm bện 2 sợi có cùng cấu trúc như nhóm các số nguyên. ^[18]

Bây giờ, trong nhóm các số nguyên, tổng của hai số nguyên a và b thì cũng giống với tổng lấy theo thứ tự ngược lại:

$$a + b = b + a.$$

Điều này cũng xảy ra trong nhóm B_2 . Những nhóm thỏa mãn tính chất này được gọi là nhóm “giao hoán”, hay nhóm “aben” (để vinh danh nhà toán học Na Uy, Niels Henrik Abel).

Trong một bện với 3 sợi hay nhiều hơn, các sợi có thể quấn rối vào nhau theo những kiểu phức tạp hơn rất nhiều so với bện chỉ có 2 sợi. Hình mẫu thắt nút vào nhau không còn mô tả được chỉ bằng số chồng chéo (hãy xem hình với 5 sợi ở trên). Mẫu hình xảy ra sự chồng chéo cũng quan trọng. Hơn nữa, hóa ra phép cộng hai bện 3 sợi (hay nhiều hơn) phụ thuộc vào thứ tự mà nó được thực hiện (tức là, bện nào sẽ đặt ở trên trong hình mô tả phép cộng các bện). Hay nói cách khác, trong nhóm B_n với $n = 3, 4, 5 \dots$ nói chung ta có:

$$a + b \neq b + a.$$

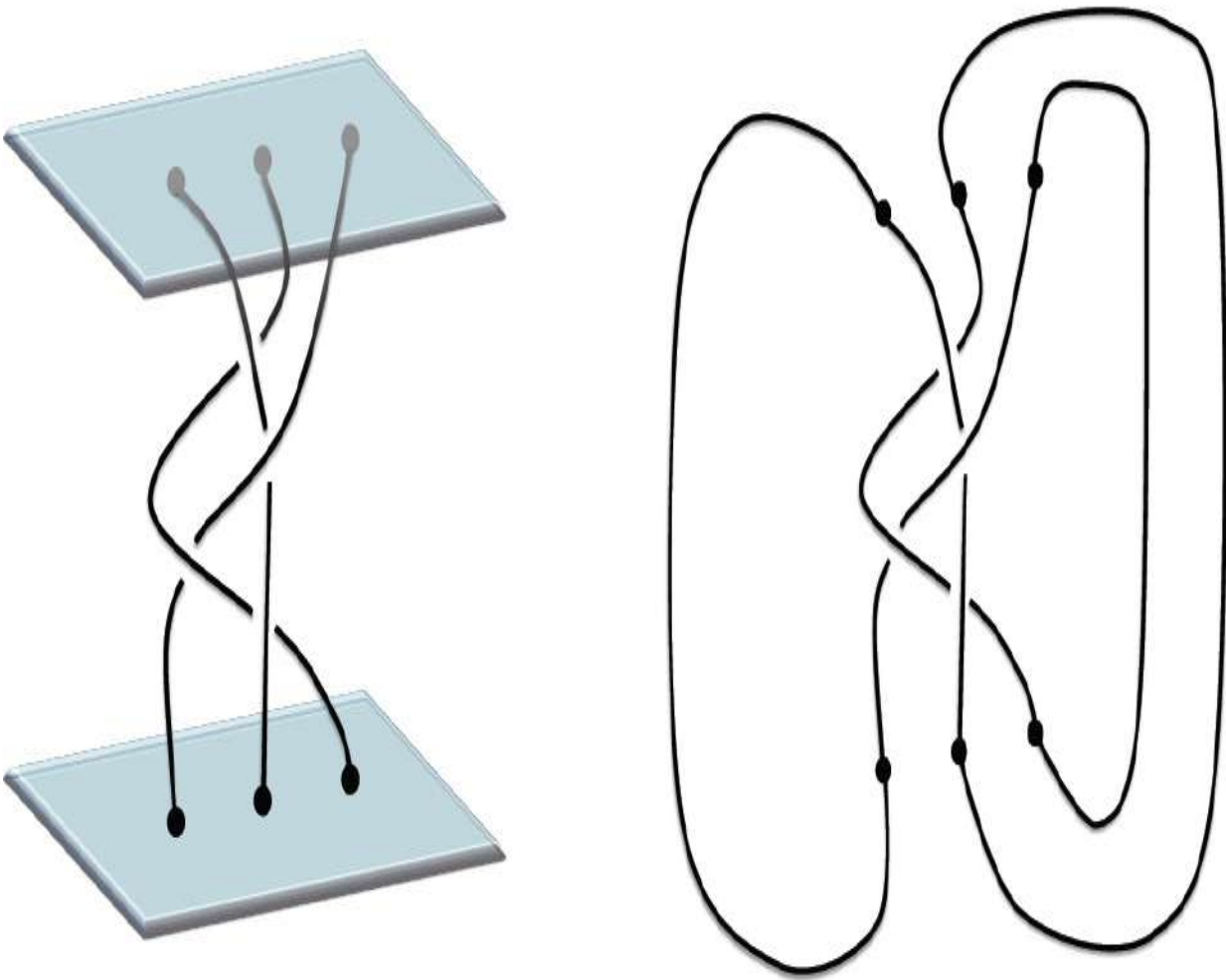
Những nhóm như vậy gọi là nhóm “không giao hoán” hay “không aben”.

Các nhóm bện có rất nhiều ứng dụng thực tiễn quan trọng. Chẳng hạn, chúng được sử dụng để xây dựng các thuật toán mật mã chìa khóa công khai hiệu quả và chắc chắn.^[19]

Một hướng hứa hẹn khác đó là thiết kế các máy tính lượng tử dựa trên cách sáng tạo ra các bện phức của những hạt lượng tử được biết đến dưới cái tên anyon. Quỹ đạo của chúng quấn quanh nhau, và sự chồng chéo của chúng được sử dụng để tạo ra các “cổng logic” của máy tính lượng tử.^[20]

Cũng có cả những ứng dụng trong sinh học. Cho trước một bện với n sợi, chúng ta có thể đánh số các đỉnh trên hai tấm từ 1 đến n từ trái sang phải. Sau đó, nối đầu của các sợi gắn với các đỉnh có cùng số

trên hai tấm. Việc này sẽ tạo thành cái mà các nhà toán học gọi là một “liên kết”: một sự kết hợp các vòng quấn quanh nhau.



Trong ví dụ chỉ ra trên hình, chỉ xuất hiện một vòng mà thôi. Các nhà toán học gọi đó là “nút”. Nói chung, sẽ có vài sợi đóng (khép kín).

Lý thuyết toán học về các liên kết và các nút đã được sử dụng trong sinh học: chẳng hạn, để nghiên cứu các liên kết giữa ADN và các enzym.^[21] Chúng ta coi phân tử ADN như một sợi, và phân tử enzym như một sợi khác. Hóa ra khi liên kết với nhau, giữa chúng có thể nảy sinh các nút rất không tầm thường, và điều đó có thể làm biến đổi ADN. Bởi vậy, cách thức chúng quấn rối lẫn nhau là rất quan trọng. Thực tế cho thấy nghiên cứu toán học về các liên kết đã mở ra hiểu biết mới về các cơ chế tái tổ hợp ADN.

Trong toán học, các bện cũng rất quan trọng bởi cách diễn giải hình học của chúng. Để giải thích điều này, ta hãy xét tất cả những tập hợp khả dĩ của n điểm trên mặt phẳng. Chúng ta sẽ giả sử rằng các điểm này hoàn toàn phân biệt; tức là với hai điểm bất kỳ, chúng phải chiếm hai vị trí khác nhau trên mặt phẳng. Chọn một trong số các tập hợp đó: một tập hợp n điểm trên một đường thẳng, cách đều nhau. Hãy coi mỗi điểm như một con rệp. Khi chúng ta bật nhạc lên thì những con rệp này sống dậy và bắt đầu di chuyển trên mặt phẳng. Nếu chúng ta coi thời gian là trục thẳng đứng, thì quỹ đạo của mỗi con rệp sẽ trông giống như một sợi dây. Nếu vị trí của mỗi con rệp luôn khác nhau tại mọi thời điểm - tức là chúng ta giả định rằng những con rệp này không va chạm nhau thì những sợi dây tương ứng cũng không bao giờ cắt nhau. Khi nhạc vẫn đang bật, thì chúng có thể đi vòng quanh nhau, giống như các sợi của một bện. Tuy nhiên, chúng ta yêu cầu rằng khi nhạc tắt sau một khoảng thời gian cố định, những con rệp phải sắp thẳng hàng giống như ban đầu, nhưng mỗi con rệp được phép dừng ở một vị trí mà ban đầu đã bị chiếm bởi một con rệp khác. Khi đó tập hợp các quỹ đạo của chúng sẽ trông như một bện với n sợi.

Do vậy, các bện với n sợi có thể được xem như là quỹ đạo trong không gian của tập hợp gồm n điểm phân biệt trên mặt phẳng.^[22]

Vấn đề mà Varchenko giao cho tôi, và tôi sắp bắt tay thực hiện với Fuchs, liên quan đến một phần của nhóm bện gọi là các “nhóm con giao hoán tử”. Nhớ rằng với các bện 2 sợi, chúng ta định nghĩa được số chồng chéo. Ta cũng có thể gán một con số tương tự cho một bện với số sợi bất kỳ.^[23] Chúng ta sử dụng nó để định nghĩa nhóm con giao hoán tử B'_n của nhóm bện với n sợi. Nó bao gồm tất cả các bện mà tổng các số chồng chéo bằng không.^[24]

Bài toán mà tôi phải giải là tính toán “số Betti” của nhóm B'_n . Những số Betti phản ánh các tính chất sâu sắc của nhóm này, và có nhiều ứng dụng quan trọng. Hãy tưởng tượng về một đối tượng vật lý

tương tự như một ngôi nhà chẳng hạn. Nó có rất nhiều đặc trưng: một số là rất hiển nhiên, như số các tầng, phòng, cửa, cửa sổ,... và một số ít hiển nhiên hơn, như tỉ lệ các vật liệu dùng để xây dựng nó. Giống như vậy, một nhóm cũng có rất nhiều đặc trưng khác nhau, và trong số đó có những số Betti.^[25] Trước đó Fuchs đã tính toán những số Betti của chính nhóm bện B_n . Ông giao bài báo của mình cho tôi đọc để tôi có thể học được nền tảng của chủ đề nghiên cứu.

Trong vòng một tuần, tôi đã có thể tự đọc hiểu toàn bộ bài báo của Fuchs, thi thoảng phải tìm hiểu một số khái niệm và định nghĩa mà trước đây tôi chưa biết đến trong từ sách toán khi đó đã khá lớn của mình. Tôi gọi cho Fuchs.

“À, là cậu đó hả,” ông nói, “Tôi đang tự hỏi là tại sao không thấy cậu gọi. Cậu đã đọc bài báo chưa?”

“Dạ em đọc rồi. Thực ra là em đọc xong rồi ạ.”

“Đọc xong rồi hả?” Fuchs tỏ vẻ ngạc nhiên. “Vậy chúng ta phải gặp nhau thôi. Tôi muốn xem cậu đã học được những gì.”

Fuchs đề nghị tôi đến gặp ông ngay hôm sau ở MGU, sau một buổi seminar mà ông tham dự. Để chuẩn bị cho buổi gặp gỡ, tôi đọc đi đọc lại bài báo và chuẩn bị các kiểu câu hỏi mà tôi nghĩ Fuchs có thể sẽ hỏi tới. Một nhà toán học tầm cỡ thế giới như Fuchs sẽ không nhận học trò mới chỉ vì thấy thương cảm anh ta. Ông đặt ra tiêu chuẩn rất cao. Tôi hiểu rằng buổi nói chuyện đầu tiên của tôi với Fuchs sẽ giống như một buổi “thử giọng”, và đó là lý do tôi cảm thấy hứng khởi khi muốn tạo ấn tượng tốt trước ông.

Chúng tôi gặp nhau vào giờ đã hẹn trước, đi bộ dọc hành lang ở *Mekh-Mat* tìm một chiếc ghế băng nơi cả hai sẽ không bị làm phiền. Sau khi ngồi xuống, tôi bắt đầu nói với Fuchs về những gì mình học được từ bài báo của ông. Ông lắng nghe chăm chú, và thỉnh thoảng đặt ra vài câu hỏi. Tôi nghĩ rằng ông hài lòng về những gì mà mình nghe được. Ông tò mò muốn biết tôi đã học những kiến thức ấy từ đâu, và tôi kể cho ông nghe việc học của tôi với Evgeny Evgenievich, đọc sách,

rời đến dự những bài giảng ở *Mekh-Mat*. Thậm chí chúng tôi còn nói về kỳ thi ở MGU của tôi (và dĩ nhiên đây không phải là chuyện mới mẻ với Fuchs).

Thật may mắn, buổi gặp gỡ của chúng tôi diễn ra tốt đẹp. Fuchs rất ấn tượng với kiến thức của tôi. Ông bảo tôi đã sẵn sàng để giải bài toán của Varchenko và muốn giúp tôi làm điều đó.

Tôi cảm thấy rất phấn chấn sau khi rời MGU tối hôm đó. Vậy là tôi sắp bắt tay vào thử thách toán học đầu tiên của mình, dưới sự hướng dẫn của một trong những nhà toán học hàng đầu thế giới. Chưa đầy hai năm trôi qua kể từ kỳ thi của tôi vào *Mekh-Mat*. Tôi đã trở lại với toán học.

Chương 6

NHÀ TOÁN HỌC TẬP SỰ

Giải một bài toán cũng giống như giải một câu đố ghép hình vậy, chỉ có điều bạn chẳng biết trước được bức tranh hoàn thiện sẽ trông như thế nào. Nó có thể khó, cũng có thể dễ, hoặc cũng có thể là không giải được. Bạn sẽ không bao giờ biết được cho tới khi thực sự giải được nó (hoặc nhận ra là nó không thể giải được). Tính bất định này có lẽ là một trong những khía cạnh khó nhất của việc trở thành một nhà toán học. Ở những lĩnh vực khác, bạn có thể ứng biến, đưa ra những đáp án khác, thậm chí là thay đổi các luật lệ của cuộc chơi. Ngay cả ý niệm về điều tạo nên một lời giải cũng chưa được xác định rõ ràng. Chẳng hạn, nếu được giao nhiệm vụ cải thiện năng suất của một công ty, vậy chúng ta sẽ sử dụng thước đo nào để đo lường sự thành công? Liệu sự cải thiện cỡ 20% có được tính là một giải pháp hay chưa? Còn 10% thì sao? Trong toán học, một bài toán luôn được xác định rõ; và không có gì mơ hồ về việc giải nó nghĩa là thế nào. Hoặc là bạn giải được, hoặc là không.

Với bài toán của Fuchs, tôi phải tính các số Betti của các nhóm B'_n . Điều này có ý nghĩa rất rõ ràng, không hề có chút mơ hồ nào. Nó mang cùng một ý nghĩa với những ai đã quen với ngôn ngữ của toán học, hiện nay cũng như vào năm 1986, khi tôi mới bắt đầu nghiên cứu về bài toán này, và một trăm năm sau thì nó vẫn có ý nghĩa như thế.

Tôi biết rằng Fuchs đã giải một bài toán tương tự, và tôi cũng biết ông đã hoàn thành việc đó như thế nào. Tôi chuẩn bị cho nhiệm vụ này bằng cách làm việc với những bài toán tương tự đã có lời giải. Điều đó mang lại cho tôi trực giác, các kỹ năng, và một bộ phương pháp. Nhưng

tôi không thể *tiên đoán* trước mình sẽ sử dụng được phương pháp nào trong đó, hoặc tôi nên tiếp cận bài toán theo cách nào hay thậm chí liệu tôi có thể giải nó mà không cần phải sáng tạo ra một kỹ thuật về căn bản là mới hoặc một phương pháp hoàn toàn khác.

Tình thế khó xử này thường làm tất cả các nhà toán học bối rối. Hãy cùng xét một trong những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học, Định lý cuối cùng của Fermat, để xem người ta có thể giải như thế nào khi gặp phải một bài toán nghe phát biểu thì rất dễ nhưng lời giải thì chẳng hiển nhiên chút nào. Cố định một số tự nhiên n , $n = 1, 2, 3, \dots$ và xét phương trình:

$$x^n + y^n = z^n$$

với x, y, z là các số tự nhiên.

Với $n = 1$, ta có phương trình:

$$x + y = z$$

một phương trình chắc chắn có vô số nghiệm: chỉ cần lấy x, y bất kỳ và sau đó lấy $z = x + y$. Chú ý rằng ở đây chúng ta sử dụng phép toán cộng các số tự nhiên đã thảo luận ở chương trước.

Nếu $n = 2$, ta có phương trình:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Phương trình này cũng có vô số nghiệm, chẳng hạn:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Tất cả những điều này đã đều được biết đến từ thời cổ đại. Điều chưa được biết tới lúc đó là phương trình này có bao nhiêu nghiệm với $n > 2$. Nghe thì khá đơn giản thôi, phải không? Nhưng trả lời một câu hỏi kiểu như thế này thì khó khăn cỡ nào nhỉ?

Thực tế hóa ra lại khó ra trò. Năm 1637, một nhà toán học người Pháp là Pierre Fermat đã để lại một ghi chú trên lề một cuốn sách cổ, rằng nếu $n > 2$ thì phương trình này không có nghiệm x, y, z là số tự nhiên nào cả. Nói cách khác, chúng ta không thể tìm được ba số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

và cũng không thể tìm được bộ ba số tự nhiên x, y, z thỏa mãn:

$$x^4 + y^4 = z^4$$

rồi cứ tiếp tục như thế.

Fermat viết rằng ông đã tìm thấy một phép chứng minh đơn giản cho mệnh đề này, với mọi $n > 2$, nhưng “lề sách này quá nhỏ để có thể viết ra phép chứng minh đó”. Rất nhiều người, nhiều nhà toán học chuyên nghiệp cũng như nghiệp dư đã coi ghi chú của Fermat như một thách thức và cố gắng tái tạo lại phép “chứng minh” của ông, khiến mệnh đề này trở thành một bài toán nổi tiếng nhất trong toán học ở mọi thời đại. Nhiều giải thưởng được đặt ra. Hàng trăm phép chứng minh được viết ra và công bố, nhưng rồi chỉ luôn chuốc lấy thất bại sau đó. Bài toán này vẫn chưa được giải, cho tới tận 350 năm sau.

Năm 1993, Andrew Wiles, một nhà toán học ở Đại học Princeton, công bố phép chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat của riêng ông. Nhưng nhìn thoáng qua thì chứng minh của ông chẳng có gì liên quan tới bài toán ban đầu cả. Thay vì chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, Wiles đã giải bài toán gọi là giả thuyết Taniyama-Shimura-Weil, một giả thuyết về một cái hoàn toàn khác, có phát biểu phức tạp hơn rất nhiều. Nhưng một vài năm trước đó, nhà toán học Ken Ribet ở Đại học Berkeley đã chứng minh được rằng từ mệnh đề của giả thuyết này sẽ suy ra được Định lý cuối cùng của Fermat. Điều đó giải thích tại sao phép chứng minh của giả thuyết ấy cũng chính là phép chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat. Chúng ta sẽ nói chi tiết hơn về đề tài này trong chương 8; điểm mà tôi muốn chỉ ra ở đây đó là một bài toán trông tưởng như đơn giản có thể không nhất thiết phải có một lời giải sơ cấp. Ngày nay chúng ta hiểu rằng Fermat có thể đã không chứng minh được bài toán mang tên ông. Toàn bộ các ngành toán học đã được tạo ra chỉ để làm điều đó, một phát triển như vậy đã lấy đi biết bao công sức của nhiều thế hệ các nhà toán học. ^[26]

Nhưng liệu chúng ta có thể tiên đoán tất cả những điều đó, mà chỉ căn cứ vào một phương trình giản dị như thế này chẳng?

$$x^n + y^n = z^n$$

Không thể nào!

Với bất kỳ một bài toán nào, bạn sẽ không bao giờ biết được lời giải của nó sẽ bao gồm những gì. Bạn hy vọng và cầu mong sẽ có thể tìm thấy một lời giải hay và thanh nhã, và trên con đường đi tới lời giải đó rất có thể bạn sẽ khám phá ra được điều gì đó thú vị. Và chắc chắn bạn cũng sẽ hy vọng có thể giải được nó trong một khoảng thời gian hợp lý, chứ không phải mất tới 350 năm mới tìm ra câu trả lời. Nhưng bạn cũng chẳng bao giờ có thể biết chắc được.

Còn tôi đã gặp may mắn; thực sự tôi có thể tìm ra một lời giải thanh nhã trong khoảng thời gian tương đối ngắn, khoảng hai tháng. Nhưng điều đó đến với tôi không hề dễ dàng. Tuyệt đối không bao giờ là dễ dàng cả. Tôi đã thử nhiều phương pháp khác nhau. Mỗi khi một phương pháp dẫn tới thất bại, tôi lại cảm thấy càng thất vọng và hoang mang. Đây là vấn đề toán học đầu tiên của tôi, và tôi vẫn thường tự hỏi rằng liệu mình có thể trở thành một nhà toán học hay không. Bài toán này chính là phép thử đầu tiên xem tôi có khả năng gì hay không.

Việc giải bài toán này không giúp tôi được miễn trừ các bài giảng và các kỳ thi ở Kerosinka, nhưng nó vẫn là ưu tiên số một, và tôi dành cho nó vô khối thời gian, nhiều đêm và những ngày cuối tuần. Tôi đặt quá nhiều áp lực lên bản thân mình. Tôi bắt đầu cảm thấy khó ngủ, và đây là lần đầu tiên chuyện này xảy ra. Chứng mất ngủ mà tôi mắc phải khi giải bài toán này là “tác dụng phụ” đầu tiên trong sự nghiệp nghiên cứu toán học. Nó đeo bám tôi trong nhiều tháng sau, và kể từ đó, tôi không bao giờ để cho mình chìm đắm hoàn toàn trong một vấn đề toán học nữa.

Tôi gặp Fuchs hằng tuần ở tòa nhà của *Mekh-Mat*, để trình bày với ông về những sự tiến bộ hoặc không tiến bộ trong công việc của mình

(khi ấy ông đã lấy giúp tôi một thẻ ID, do vậy tôi không còn phải chui qua hàng rào nữa). Fuchs luôn ủng hộ và động viên tôi, mỗi lần chúng tôi gặp nhau ông lại giảng cho tôi về một mẹo mực mới, hay đưa ra một góc nhìn mới, mà tôi có thể áp dụng cho bài toán của mình.

Và rồi, đột nhiên, tôi ngộ ra. Tôi tìm ra được lời giải, hay nói chính xác hơn là lời giải tự tìm đến với tôi, với toàn bộ vẻ đẹp lộng lẫy của nó.

Tôi cố gắng sử dụng một trong những phương pháp thông thường mà Fuchs đã dạy tôi để tính các số Betti, được gọi là “dãy phổ”. Tôi đã có thể áp dụng nó theo một cách nào đó, mà từ đó cho phép tôi, về nguyên tắc, sẽ tính được các số Betti của nhóm B'_n từ những hiểu biết về các số Betti của tất cả các nhóm B'_m với $m < n$. Dĩ nhiên, vấn đề là ở chỗ tôi vẫn chưa biết những số Betti ấy là gì.

Nhưng nó cho tôi một cách để tấn công bài toán của mình: nếu tôi có thể *đoán* được đáp số đúng, thì tôi sẽ có cách *chứng minh* được nó dựa theo phương pháp này.

Nói thì thật dễ, nhưng để có thể *đoán* được như vậy cần có rất nhiều tính toán mẫu, những thứ mà chỉ càng lúc càng trở nên phức tạp hơn thôi. Trong suốt một thời gian dài, không hề có quy luật nào xuất hiện cả.

Đột nhiên, như có phép thần, mọi thứ trở nên rõ ràng với tôi. Trò chơi ghép hình được hoàn tất, và hình ảnh cuối cùng hiện ra, với đầy đủ vẻ đẹp và sự thanh nhã, trong một thời khắc mà tôi luôn ấp ủ và nhớ mãi. Đó là một cảm xúc mãnh liệt không tưởng tượng nổi, tạo nên giá trị của bao đêm tôi thức trắng.

Đây là lần đầu tiên trong đời, tôi sở hữu một thứ mà *không một ai khác trên thế giới này* có được. Tôi có thể nói điều gì đó mới mẻ về vũ trụ. Đó không phải là giải pháp chữa ung thư, nhưng nó là một phần kiến thức đáng giá, mà không ai có thể lấy nó đi khỏi tôi được.

Nếu bạn trải cảm giác này một lần, bạn sẽ muốn quay lại và thử một lần nữa. Đây là lần đầu tiên nó xảy đến với tôi, và cũng giống như nụ hôn đầu; nó rất đặc biệt. Khi đó tôi biết có thể gọi mình là nhà toán học.

Câu trả lời thực ra khá bất ngờ, và thú vị hơn rất nhiều so với những gì mà Fuchs hay tôi có thể tưởng tượng. Tôi phát hiện ra rằng đối với mỗi ước của số tự nhiên n (số các sợi của bện mà chúng ta đang xét), có một số Betti của nhóm B'_n và số đó bằng với “hàm Euler” nổi tiếng của ước số đó.^[27]

Hàm Euler gán cho một số tự nhiên d bất kỳ một số tự nhiên khác gọi là $\phi(d)$. Đây là số nguyên nằm giữa 1 và d , và là *nguyên tố cùng nhau* với d , tức là không có ước số chung với d (tất nhiên, không kể số 1).

Chẳng hạn, lấy $d = 6$. Khi đó 1 là nguyên tố cùng nhau với 6, nhưng 2 thì không (nó là ước của 6), 3 cũng vậy (nó cũng là một ước của 6), 4 cũng không (4 và 6 có chung ước số là 2), 5 nguyên tố cùng nhau với 6 còn 6 thì hiển nhiên là không. Như vậy, có 2 số từ 1 đến 6 là nguyên tố cùng nhau với 6; đó là 1 và 5. Do vậy hàm Euler của 6 có giá trị bằng 2. Chúng ta viết điều đó dưới dạng $\phi(6) = 2$.

Hàm Euler có rất nhiều ứng dụng. Chẳng hạn, nó được dùng trong thuật toán RSA để mã hóa thẻ tín dụng trong các giao dịch trực tuyến (điều này sẽ được giải thích ở chú thích 7 của chương 14). Hàm này được đặt tên như thế để vinh danh nhà toán học Thụy Sĩ thế kỷ 17, Leonhard Euler.

Thực tế rằng những số Betti mà tôi phát hiện ra được cho bởi hàm Euler đã gợi ra ý tưởng về sự tồn tại của một số mối liên hệ ẩn giấu giữa các nhóm bện và lý thuyết số. Bởi vậy, bài toán mà tôi vừa giải được có thể có những hệ quả tiềm tàng, vượt ra xa mục tiêu ban đầu của nó.

Dĩ nhiên, tôi rất hào hứng muốn nói với Fuchs về những kết quả của mình. Đó là tháng 6 năm 1986, sau gần ba tháng kể từ lần đầu tôi gặp ông. Lúc đó, Fuchs cùng với vợ và hai con gái đã rời Moscow đi nghỉ hè ở căn nhà ngoại ô của ông gần Moscow. Thật may, căn nhà đó nằm gần tuyến đường xe lửa về quê tôi, nhưng chỉ bằng nửa đường mà thôi, vậy nên tôi dễ dàng ghé thăm ông trên đường về nhà.

Sau khi mời tôi một cốc trà theo thông lệ, Fuchs hỏi tôi về tiến độ làm việc.

“Em đã giải xong bài toán đó rồi!”

Tôi không thể che giấu sự phấn khích của mình, và tôi đoán rằng mình đã giải thích, lời giải khá dông dài. Nhưng chẳng có gì đáng lo cả, Fuchs nhanh chóng hiểu hết mọi thứ. Trông ông có vẻ rất hài lòng.

“Thật tuyệt vời,” ông đáp, “Cậu đã làm rất tốt, bây giờ cậu phải bắt đầu viết một bài báo về chủ đề này.”

Đây là lần đầu tiên tôi viết một bài báo toán học, và hóa ra là việc này gây thất vọng không kém việc nghiên cứu toán, nhưng kém vui hơn nhiều. Tìm kiếm những mẫu hình mới ở tuyến trước của tri thức luôn rất quyến rũ và đầy kích thích. Nhưng ngồi bên bàn, cố gắng sắp xếp những ý tưởng và viết chúng ra giấy, lại là một quá trình hoàn toàn khác. Như ai đó sau này nói với tôi, việc viết các bài báo là hình phạt mà chúng ta phải chịu đựng vì đã được hưởng niềm vui khám phá ra những khía cạnh mới của toán học. Đây là lần chịu phạt đầu tiên của tôi.

Tôi trở lại gặp Fuchs sau đó với những bản thảo khác nhau, và ông đọc chúng rất kỹ, chỉ ra những khiếm khuyết rồi gợi ý những sửa chữa. Như mọi khi, ông luôn giúp đỡ với tinh thần cực kỳ hào hiệp. Ngay từ đầu, tôi đã đề tên Fuchs là đồng tác giả, nhưng ông thẳng thừng từ chối. “Đây là bài báo của cậu,” ông nói. Cuối cùng, Fuchs tuyên bố rằng bài báo đã sẵn sàng để gửi đi, và ông khuyên tôi nên gửi nó cho tạp chí *Functional Analysis and Applications* (Giải tích hàm và ứng dụng), một

tạp chí toán học được Moiseevich Gelfand, đại diện lớn nhất của trường phái toán học Xô viết, điều hành.

Với khổ người chắc nịch nhưng đầy quyến rũ, ở tuổi bảy mươi, Gelfand là một huyền thoại trong cộng đồng toán học ở Moscow. Ông chủ trì một seminar tổ chức hằng tuần trong khán phòng lớn trên tầng 14 ở toà nhà chính của MGU. Đây là một sự kiện toán học và xã hội lớn, nó đã diễn ra trong suốt hơn năm mươi năm và nổi tiếng khắp thế giới. Fuchs trước đó từng cộng tác với Gelfand (công trình của họ sau này mang tên “đối đồng điều Gelfand-Fuchs” được biết đến rộng rãi và được đánh giá cao) và cũng là một trong những thành viên thâm niên nhất ở seminar của Gelfand (những người khác gồm có A. A. Kirillov, cựu sinh viên của Gelfand, và M. I. Graev, một cộng tác viên lâu năm của Gelfand).

Seminar này không giống với những seminar khác mà tôi từng tham gia. Thường thì, một seminar sẽ kéo dài trong một khoảng thời gian nhất định - ở Mỹ là một giờ hay một giờ rưỡi - và người báo cáo sẽ chuẩn bị trình bày về một chủ đề được chọn trước. Thi thoảng, các thính giả đặt câu hỏi. Nhưng ở seminar của Gelfand thì không như thế. Nó diễn ra vào thứ Hai hằng tuần, và chính thức bắt đầu lúc 7h tối. Tuy nhiên, seminar này hiếm khi diễn ra trước 7h30, và thường bắt đầu vào khoảng từ 7h45 đến 8h tối. Trong khoảng một giờ trước khi seminar bắt đầu, các thành viên tham dự, kể cả Gelfand (người thường đến vào khoảng 7h15 đến 7h30), sẽ đi loanh quanh và nói chuyện với nhau trong khán phòng và cả ở phòng giải lao rộng lớn bên ngoài. Rõ ràng đây là ý định của Gelfand. Nó giống một hoạt động xã hội hơn là một seminar toán học.

Hầu hết những nhà toán học đến dự seminar của Gelfand làm việc ở nhiều nơi khác nhau và không có liên hệ gì tới MGU cả. Seminar của Gelfand là nơi duy nhất mà họ có thể gặp đồng nghiệp, để biết điều gì đang diễn ra trong thế giới toán học, để chia sẻ những ý tưởng và tìm kiếm sự cộng tác. Vì bản thân Gelfand cũng là người Do Thái, seminar

của ông được coi là một “nơi trú ẩn an toàn” cho những người Do Thái và thậm chí còn được hoan nghênh như một “chỗ chơi” duy nhất trong thành phố (hay một trong số rất ít) mà các nhà toán học Do Thái có thể tham gia (mặc dù, công bằng mà nói thì có rất nhiều seminar ở MGU luôn rộng mở với công chúng, và được điều hành bởi những người không có thành kiến với bất kỳ dân tộc nào). Hẳn nhiên, Gelfand rất vui mừng nắm lấy lợi thế này.

Chủ nghĩa bài Do Thái mà tôi trải qua ở kỳ thi tuyển sinh vào MGU đã lan tỏa ra khắp các học viện thuộc các cấp ở Liên bang Xô viết. Trước đó, vào những năm 1960 và đầu những năm 1970, mặc dù có những hạn chế, hay “chỉ tiêu”, cho những sinh viên gốc Do Thái, nhưng họ vẫn có thể đặt chân vào học ở *Mekh-Mat* (tình hình này trở nên tồi tệ hơn trong suốt thập niên 1970 và đầu những năm 1980, cho tới thời điểm 1984, khi tôi thi vào *Mekh-Mat*, gần như không có sinh viên Do Thái nào được chấp nhận).^[28] Nhưng kể cả trong quãng thời gian đó, những sinh viên được nhận hầu như cũng không thể nào tiếp tục học sau đại học. Cách duy nhất để sinh viên Do Thái có thể vượt qua hoàn cảnh này là đi làm ở đâu đó trong ba năm sau khi nhận bằng cử nhân, và họ có thể được cơ quan chủ quản (thường thì những cơ quan này nằm ở vùng nào đó rất xa xôi) gửi đi học sau đại học. Thậm chí dù vượt qua được chướng ngại này và có được học vị tiến sĩ, thì họ cũng không có cách nào để tìm được một công việc hàn lâm liên quan tới toán học ở Moscow (như ở MGU chẳng hạn). Hoặc là họ phải chọn một công việc nào đó trong vùng, hoặc tham gia nghiên cứu trong các viện ở Moscow mà công việc gần rất ít hoặc không liên quan gì tới toán học. Tình thế này còn trở nên khó khăn hơn với những người không xuất thân từ Moscow, bởi vì họ không có hộ khẩu, một loại tem cư trú trong hộ chiếu nội địa của họ, thứ bị đòi hỏi để xin việc ở thủ đô.

Ngay cả những sinh viên giỏi hiếm có cũng bị đối xử như vậy. Vladimir Drinfeld, một nhà toán học lỗi lạc, người sau này được nhận huy chương Fields mà chúng ta sẽ nhắc tới nhiều về sau, đã được tiếp tục học sau đại học ở *Mekh-Mat* ngay sau khi nhận bằng cử nhân (dù

theo những gì tôi được biết thì chuyện ấy cũng rất khó sắp xếp), nhưng là một người sinh ra ở Kharkov, Ukraina, ông không được nhận làm ở Moscow. Ông phải nhận giảng dạy tại một đại học tỉnh lẻ ở Ufa, một thành phố công nghiệp ở dãy Ural. Cuối cùng ông được nhận làm nghiên cứu viên trong viện Vật lý nhiệt độ thấp ở Kharkov.

Những người ở lại Moscow thì được nhận vào những nơi như viện Nghiên cứu địa chấn hay viện Xử lý tín hiệu. Công việc hằng ngày của họ là làm những tính toán tế nhị liên quan tới một ngành công nghiệp cụ thể mà viện hợp tác (dù sao thì một vài trong số họ đã tìm ra hướng đi mới trong những lĩnh vực ấy, quả là đa tài). Họ chỉ có thể làm việc với niềm đam mê thực sự một cách không chính thức, trong thời gian rảnh rỗi.

Bản thân Gelfand cũng bị đẩy khỏi vị trí giảng dạy ở *Mekh-Mat* vào năm 1968, sau khi ông ký vào lá thư nổi tiếng của 99 nhà toán học yêu cầu trả tự do cho nhà toán học và nhà hoạt động nhân quyền Alexander Esenin-Volpin (con trai của nhà thơ Sergei Esenin) đang bị giam cầm trong một bệnh viện tâm thần do những động cơ chính trị. Lá thư này viết khéo léo đến mức sau khi nó được phát trên đài phát thanh BBC, sự phẫn nộ rộng rãi trên khắp thế giới đã khiến giới lãnh đạo Xô viết buộc phải thả Esenin-Volpin gần như ngay lập tức.^[29] Nhưng nó cũng làm cho chính quyền vô cùng tức giận. Sau đó, giới quan chức tìm đủ cách để trừng phạt những người đã ký vào lá thư kia. Cụ thể, rất nhiều người đã bị sa thải khỏi vị trí giảng dạy.^[30]

Vì lẽ đó, Gelfand không còn là giáo sư toán học của MGU nữa, dù ông vẫn có thể duy trì các buổi seminar ở tòa nhà chính của MGU. Công việc chính thức của ông là ở một phòng thí nghiệm sinh học của MGU do ông lập ra, nơi tiến hành những nghiên cứu trong sinh học, và cũng là một niềm đam mê của ông.^(*) Fuchs cũng từng làm việc ở chính phòng thí nghiệm này.

Trước đó Fuchs từng thúc giục tôi tham gia seminar của Gelfand, và tôi có đến đó một vài lần vào cuối kỳ học mùa xuân. Những buổi

gặp gỡ như thế đã để lại trong tôi những ấn tượng sâu đậm. Gelfand tổ chức seminar của mình theo cách độc đoán nhất. Ông quyết định mọi mặt của nó, và dù trong suy nghĩ của những người chưa am tường thì seminar của ông có vẻ hỗn loạn và thiếu tính tổ chức, nhưng thực ra ông đã dành rất nhiều thời gian và tâm huyết để chuẩn bị và đạo diễn những buổi gặp gỡ hằng tuần ấy.

Ba năm sau, khi Gelfand đề nghị tôi nói về công trình của mình, tôi lại có cơ hội để thấy được rõ hơn cách thức hoạt động nội tại của seminar này. Còn bây giờ tôi chỉ quan sát nó từ góc nhìn của một sinh viên mười bảy tuổi, mới vừa bắt đầu sự nghiệp toán học.

Về nhiều phương diện, seminar là nhà hát của độc một diễn viên. Theo lệ thường, sẽ có một báo cáo viên được chỉ định trình bày về một chủ đề lựa chọn trước, nhưng thường thì chỉ có một phần thời gian của seminar dành cho việc này mà thôi. Gelfand thường đưa ra những chủ đề khác và kêu gọi các nhà toán học, những người chưa được báo chuẩn bị trước, lên bảng để giải thích về những vấn đề đó. Nhưng ông luôn ở trung tâm của những hoạt động ấy. Ông và chỉ có mình ông điều khiển dòng chảy của seminar và có quyền lực tuyệt đối để ngắt lời diễn giả bằng các câu hỏi, các đề xuất và những nhận xét. Tôi dường như vẫn đang nghe ông nói “*Dayte opredelenie*” - “Hãy nêu ra định nghĩa đi”, câu nhắc nhở quen thuộc của ông với người báo cáo.

Ông cũng có thói quen khơi mào những cuộc đả kích kéo dài về những chủ đề khác nhau (đôi khi là những chủ đề không liên quan tới những gì đang thảo luận), kể chuyện cười, chuyện tiểu lâm, và đủ thứ chuyện khác, rất nhiều trong số đó chỉ mang tính giải trí. Đây chính là nơi mà tôi được nghe câu chuyện ngụ ngôn đề cập trong phần lời nói đầu: một người say rượu thì không biết số nào lớn hơn, $2/3$ hay $3/5$, nhưng ông ấy hiểu rằng 2 chai vodka cho 3 người thì tốt hơn là 3 chai vodka cho 5 người. Một trong những kỹ năng của Gelfand đó là khả năng “diễn đạt lại” các câu hỏi của những người tham gia seminar theo cách chứa đựng sẵn câu trả lời.

Một trong số những câu chuyện tếu mà ông thích kể là về điện báo không dây: “Quãng đầu thế kỷ 20, trong một bữa tiệc, có người hỏi một nhà vật lý: ông có thể giải thích cách thức vận hành của điện báo không dây không? Nhà vật lý liền trả lời rằng việc ấy rất đơn giản thôi. Đầu tiên anh phải hiểu cách thức hoạt động của điện báo thông thường - điện báo có dây: hãy tưởng tượng một con chó với cái đầu ở London và đuôi ở Paris. Bạn kéo cái đuôi nó ở Paris, và con chó sẽ sủa ở London. Điện báo không dây thì cũng thế thôi, nhà vật lý nói, chỉ có điều là không có chó thôi.”

Sau khi thuật lại câu chuyện này, và đợi cho tiếng cười lắng xuống (kể cả là từ những người đã nghe câu chuyện ấy hàng nghìn lần), Gelfand quay ngay trở lại bất kỳ vấn đề toán học nào đang được thảo luận. Nếu ông nghĩ rằng lời giải cho vấn đề này đòi hỏi một cách tiếp cận hoàn toàn mới, ông sẽ bình luận rằng, “Điều mà tôi muốn nói đó là chúng ta phải làm được mà không cần tới con chó.”

Một hình thức thường được sử dụng ở seminar đó là chỉ định một *kontrol' nyj slushatel'*, một người nghe mẫu, thường là một thành viên nhỏ tuổi trong số thính giả, cứ sau những khoảng thời gian đều đặn, người này phải nhắc lại những gì mà người báo cáo đã trình bày. Nếu “người nghe mẫu” này theo được bài giảng, điều đó có nghĩa rằng người báo cáo đang làm tốt công việc của mình. Nếu không, người báo cáo phải nói chậm lại, và giải thích rõ ràng hơn. Đôi khi Gelfand thậm chí còn đuổi báo cáo viên xuống theo cách đầy hồ thẹn nếu anh ta/cô ta trình bày tệ không thể hiểu nổi và thay thế bằng một người khác trong số những thính giả. (Dĩ nhiên, Gelfand cũng sẽ chọc cười cả người nghe mẫu.) Tất cả những điều này khiến cho seminar của ông trở nên hết sức thú vị.

Hầu hết các seminar đều diễn ra ở tốc độ đều đều, với các thính giả lịch sự ngồi nghe (một vài trong số đó ngủ gà ngủ gật) - có thể do họ quá tự mãn, quá lịch sự, hay quá sợ phải hỏi người trình bày câu hỏi nào đó, và chắc chắn ai học hỏi được gì. Hẳn nhiên tốc độ thường

xuyên thay đổi và tính chất đột phá đặc trưng trong seminar của Gelfand không chỉ giữ mọi người tỉnh táo (không hề là một nhiệm vụ dễ dàng khi seminar luôn kết thúc vào tận nửa đêm), mà còn kích thích các thính giả theo cách mà những seminar khác không thể làm được. Gelfand đòi hỏi rất nhiều ở những người báo cáo trong seminar. Họ phải làm việc chăm chỉ, và ông cũng vậy. Cho dù ai đó có nói gì về phong cách của Gelfand, thì mọi người cũng không bao giờ tay trắng mà rời seminar của ông.

Tuy nhiên, theo tôi, một seminar như thế này chỉ có thể tồn tại trong một xã hội toàn trị, giống như Liên bang Xô viết. Mọi người đều đã quen với kiểu quyền lực độc tài và cách hành xử mà Gelfand thể hiện. Ông có thể thô lỗ, một số thời điểm còn xúc phạm đến phẩm giá mọi người. Tôi không nghĩ rằng ở các nước phương Tây người ta sẽ dung thứ cho cách hành xử như thế. Nhưng ở Liên Xô, hành động của ông không bị coi là bất thường, và không ai phản đối cả. (Một ví dụ nổi tiếng cũng giống như thế đó là seminar vật lý lý thuyết của Lev Landau.)

Khi tôi mới lần đầu đến seminar, Gelfand để cho Vladimir Kazakov, một nhà vật lý trẻ, trình bày một chuỗi các báo cáo về công trình của anh về các mô hình ma trận. Kazakov sử dụng các phương pháp của cơ học lượng tử theo cách hoàn toàn mới để thu được những hệ quả toán học sâu sắc mà các nhà toán học không thể thu được từ những phương pháp thông thường. Gelfand luôn quan tâm tới cơ học lượng tử, và chủ đề này thường đóng một vai trò lớn trong seminar của ông. Ông đặc biệt ấn tượng với công trình của Kazakov nên tích cực quảng bá cho nó trước các nhà toán học. Giống như nhiều dự đoán trước của ông, công trình của Kazakov quả là quý như vàng: vài năm sau nó trở nên nổi tiếng và trở thành thời thượng, mang lại rất nhiều tiến bộ quan trọng trong vật lý và toán học.

Trong các bài giảng của mình ở seminar, Kazakov đã thể hiện nỗ lực đáng ngưỡng mộ trong việc giải thích các ý tưởng của anh cho các nhà toán học. Gelfand tỏ ra tôn trọng anh hơn thường lệ, để anh trình bày mà không ngắt lời trong quãng thời gian dài hơn những báo cáo viên khác.

Khi đang trình bày những bài giảng này, thì một bài báo mới của John Harer và Don Zagier được đưa tới, trong đó họ đưa ra một lời giải hay cho một bài toán tổ hợp cực khó.^[31] Zagier nổi tiếng nhờ giải được các bài toán dường như không thể giải nổi, mà lại giải rất nhanh. Điều đáng nói là Zagier chỉ mất có sáu tuần để giải bài toán kia, và ông rất tự hào về điều đó. Ở buổi seminar tiếp theo, Kazakov vẫn tiếp tục trình bày kết quả của mình. Gelfand yêu cầu anh giải bài toán của Harer-Zagier bằng cách sử dụng công trình về các mô hình ma trận. Gelfand cảm thấy rằng phương pháp của Kazakov có thể rất hữu dụng để giải loại bài toán này và ông đã đúng. Kazakov không hề biết bài báo của Harer-Zagier, và đây là lần đầu tiên anh nghe về vấn đề này. Đứng trên bảng, anh nghĩ về nó trong vài phút và ngay lập tức viết ra Lagrangian của một lý thuyết trường lượng tử mà từ đó dẫn ngay tới câu trả lời bằng cách dùng các phương pháp của anh.

Mọi người trong khán phòng đều sửng sốt. Nhưng Gelfand thì không hề. Ông giả bộ hỏi Kazakov, “Volodya, cậu đã làm việc với đề tài này bao nhiêu năm rồi?”

“Em không chắc, Israel Moiseevich ạ, có lẽ là sáu năm gì đó.”

“Vậy cậu đã mất sáu năm và hai phút, còn Zagier thì chỉ mất có sáu tháng. Hừm... Cậu thấy anh ta giỏi thế nào rồi chứ?” Và đây là một “câu nói đùa” khá nhẹ nhàng so với những câu nói đùa khác. Bạn phải mặt dạn mày dày thì mới tồn tại được trong môi trường này. Thật không may, một số báo cáo viên lại nhìn nhận những lời chỉ trích công khai này dưới góc độ cá nhân, và điều đó gây cho họ rất nhiều buồn khổ. Nhưng tôi cũng phải nói thêm rằng, Gelfand chỉ cay nghiệt với

những nhà toán học già dặn hơn và nổi tiếng hơn, còn với những nhà toán học trẻ, đặc biệt là với các sinh viên thì ông lại rất ân cần.

Ông thường nói rằng, ông rất vui mừng chào đón mọi sinh viên, các học viên sau đại học tài năng, và chỉ những giáo sư toán học lỗi lạc tới dự seminar. Ông hiểu rằng để giữ cho môn học luôn tiến triển, việc chuẩn bị cho thế hệ các nhà toán học mới là rất quan trọng, và ông luôn thu hút các tài năng trẻ quanh mình. Họ cũng mang tới cho ông sự tươi trẻ (ông vẫn còn tích cực tham gia nghiên cứu ở những địa hạt tân tiến nhất trong toán học cho tới cuối những năm tám mươi của cuộc đời). Thường thì ông cũng mời cả học sinh phổ thông đến dự seminar của mình, và cho chúng ngồi ở hàng đầu để dễ theo dõi những gì đang diễn ra. (Dĩ nhiên, đó không phải là những học sinh phổ thông bình thường. Rất nhiều trong số họ sau này trở thành những nhà toán học nổi tiếng thế giới).

Theo nhiều người, Gelfand là người rất hào phóng với các sinh viên, ông thường xuyên dành nhiều giờ liền để trò chuyện cùng họ. Rất ít giáo sư làm như vậy. Nhưng không dễ để trở thành học trò của ông: ông dành cho họ một kiểu tình yêu nghiêm ngặt, và họ phải chịu đựng được những lời châm biếm đa dạng và thói quen độc tài của ông. Nhưng ấn tượng của tôi sau khi nói chuyện với nhiều người trong số họ, đó là tất cả họ đều rất trung thành với ông và luôn cảm thấy mắc nợ ông một món nợ to lớn.

Tôi không phải là học trò thực thụ của Gelfand - tôi chỉ là “đồ tôn” của ông, cũng như cả hai thầy của tôi là Fuchs và Feign (người lúc này vẫn chưa xuất hiện trong đời tôi), ở mặt nào đó họ cũng là học trò của Gelfand. Do vậy, tôi luôn cho rằng mình là một phần trong “trường phái toán học của Gelfand”. Rất lâu sau này, khi ông và tôi đều đã ở Mỹ, Gelfand đã hỏi thẳng tôi về điều đó, và lúc quan sát thấy sự hài lòng hiển lộ trên gương mặt ông khi tôi thừa nhận, tôi có thể nói rằng vấn đề trường phái và sự công nhận từ những thành viên trong đó đối với ông quan trọng thế nào.

Trường phái này, mà seminar kia là trọng tâm của nó, với cánh cửa hướng ra thế giới, không chỉ có ảnh hưởng to lớn tới toán học ở Moscow, mà còn trên cả thế giới. Những nhà toán học nước ngoài đến Moscow chỉ để gặp Gelfand và tham dự seminar của ông, rất nhiều trong số họ xem việc giảng bài ở đó là một vinh dự.

Cá tính quyến rũ và quảng đại của Gelfand đóng vai trò lớn tạo ra sự nổi tiếng của seminar. Một vài năm sau đó, ông bắt đầu quan tâm tới công trình của tôi và yêu cầu tôi báo cáo ở seminar. Tôi dành nhiều giờ nói chuyện với ông, không chỉ về toán mà còn về rất nhiều thứ khác nữa. Ông rất quan tâm tới lịch sử toán học và đặc biệt là di sản của riêng mình. Tôi còn nhớ như in, khi lần đầu tôi đến thăm tư gia của Gelfand ở Moscow (tôi vừa mới bước sang tuổi hai mươi mốt), điệu bộ của ông khi nói rằng ông coi mình như Mozart trong toán học.

“Hầu hết những nhà soạn nhạc được nhớ đến nhờ những bản nhạc tiêu biểu mà họ viết ra,” ông nói. “Nhưng trường hợp của Mozart, thì không phải như vậy. Chính khối lượng công việc đồ sộ đã làm cho ông trở thành một thiên tài.” Ngừng lại giây lát, ông tiếp tục: “Những công trình toán học của tôi cũng vậy.”

Gạt sang một bên các câu hỏi thú vị nảy sinh từ sự tự đánh giá bản thân như vậy, tôi nghĩ rằng đây là một sự so sánh phù hợp. Mặc dù Gelfand không chứng minh được một giả thuyết nào tồn đọng từ lâu đời (như Định lý cuối cùng của Fermat chẳng hạn), nhưng những ảnh hưởng tích tụ từ các ý tưởng về toán học của ông đã làm mọi người sửng sốt. Có lẽ quan trọng hơn là việc Gelfand có một cảm quan tuyệt vời về những ngành toán học đẹp đẽ cũng như trực quan sắc bén về những lĩnh vực nào trong toán học sẽ là thú vị và hứa hẹn nhất. Ông giống như một nhà tiên tri, người có sức mạnh tiên đoán đâu sẽ là hướng đi của toán học.

Trong một lĩnh vực đang ngày càng trở nên phân mảnh và chuyên môn hóa, ông là một trong những người của thời Phục hưng cuối cùng còn sót lại, người có khả năng bắc cầu nhiều chuyên ngành khác nhau.

Ông là hình ảnh thu nhỏ của sự thống nhất toán học. Không giống hầu hết các seminar khác tập trung vào một ngành toán học riêng biệt, nếu bạn đến nghe seminar của Gelfand, bạn có thể thấy các ngành toán học khác nhau ghép khít với nhau như thế nào. Đó chính là lý do tại sao tất cả chúng tôi tập trung lại mỗi tối thứ Hai hằng tuần trên tầng thứ mười bốn trong tòa nhà chính của MGU và hào hứng chờ đợi tiếng nói từ bậc tôn sư. Và Fuchs khuyến khích tôi gửi đăng bài báo toán học đầu tiên cho chính người đàn ông gây cảm hứng đáng sợ đó. Tạp chí của Gelfand, *Functional Analysis and Applications* (Giải tích hàm và ứng dụng), xuất bản bốn số mỏng một năm, với không quá một trăm trang mỗi số (một điều đáng tiếc cho một tạp chí tầm cỡ như vậy, nhưng nhà xuất bản không cho phép tăng thêm, vậy nên đành phải chịu thế thôi), và nó được đánh giá rất cao trên khắp thế giới. Tạp chí này được dịch sang tiếng Anh và được rất nhiều thư viện khoa học từ khắp nơi đặt mua dài hạn.

Rất khó để được nhận đăng bài trên tạp chí này, một phần bởi vì giới hạn số trang của nó. Thực tế, có hai loại bài báo khoa học được đăng ở đây: những bài báo nghiên cứu, mỗi bài thường dài khoảng mười-mười lăm trang, có chứa các chứng minh chi tiết, loại còn lại là những thông báo ngắn, trong đó chỉ có các kết quả được phát biểu mà không kèm theo chứng minh. Những thông báo này không được dài quá hai trang. Trên lý thuyết thì một bài báo ngắn như vậy được coi như là sẽ có một bài báo chi tiết tiếp theo có chứa tất cả các chứng minh, nhưng thực tế thì việc ấy không xảy ra thường xuyên bởi vì công bố một bài báo dài hơn là cực kỳ khó. Thực vậy, việc công bố bài báo ở nước ngoài đối với một nhà toán học Liên Xô là việc gần như không thể (bạn phải có đủ thứ giấy phép của an ninh, mà điều này có thể dễ dàng lấy mất của bạn một năm hoặc hơn, và phải tốn rất nhiều công sức). Mặt khác, số lượng những công bố toán học ở Liên Xô, xét trên số lượng những nhà toán học ở đó, là rất nhỏ. Thật không may, rất nhiều trong số chúng lại bị chi phối bởi những nhóm khác nhau, những

nhóm này thường không cho phép người bên ngoài được công bố, và chủ nghĩa bài Do Thái cũng thường xuất hiện ở đây.

Vì tất cả những điều trên, ở Liên Xô đã xuất hiện một kiểu “văn hóa nhóm” của các bài báo toán học, thứ sau này được nhắc đến như là “truyền thống Nga”: đó là lối viết cực kỳ cô đọng với rất ít thông tin được cung cấp. Điều các nhà toán học ở ngoài Liên Xô không nhận thấy, đó là điều này được thực hiện chủ yếu do bắt buộc, chứ không phải do chọn lựa.

Fuchs có ý nhắm cho bài báo đầu tiên của tôi là một dạng thông báo ngắn.

Mỗi bài báo được nhận đăng trên Tạp chí *Giải tích hàm và ứng dụng*, bao gồm cả các thông báo ngắn, sẽ phải được Gelfand kiểm tra và chấp thuận. Nếu thích nó, ông sẽ cho đăng luôn mà không cần phải qua quá trình phản biện thông thường. Điều này có nghĩa là để bài báo của mình được nhận đăng, tôi phải gặp trực tiếp Israel Moiseevich. Vì lẽ đó, trước buổi seminar đầu tiên của kỳ học mùa thu năm 1986, Fuchs đã giới thiệu tôi với ông.

Gelfand bắt tay tôi, mỉm cười, và nói: “Tôi rất vui được gặp cậu. Tôi đã được nghe nói về cậu.”

Tôi hết sức phấn khích. Tôi có thể thề rằng đã thấy một vầng hào quang quanh đầu của Gelfand.

Sau đó Gelfand quay sang Fuchs, bảo ông đưa bài báo của tôi, và Fuchs trao nó tận tay cho ông. Gelfand bắt đầu lật lật các trang. Có tổng cộng năm trang, mà tôi đã đánh chi chít chữ (rất chậm, bằng hai ngón tay) bằng một chiếc máy đánh chữ mượn được ở Kerosinka, và sau đó chèn các công thức vào bằng tay.

“Thú vị đấy,” Gelfand nói vẻ hài lòng, rồi quay sang Fuchs: “Nhưng tại sao nó lại quan trọng?”

Fuchs bắt đầu giải thích vài thứ về biệt thức của các đa thức bậc n với các nghiệm phân biệt, và việc kết quả của tôi có thể được sử dụng để mô tả topo của thớ biệt thức như thế nào, và... Gelfand ngắt lời ông:

“Mitya,” ông nói, sử dụng tên thân mật của Fuchs, “Anh biết có bao nhiêu người đặt mua dài hạn tạp chí của tôi không?”

“Không, Isarel Moiseevich, em không biết.”

“Hơn nghìn người đấy.” Đây là một số lượng khá lớn cho thấy tạp chí này có tính chuyên môn cỡ nào. “Tôi không thể gửi cho anh mọi số báo để anh giải thích kết quả này là tốt như thế nào, giờ tôi có thể sao?”

Fuchs lắc đầu.

“Nó phải được viết rõ ràng trong bài báo, hiểu chứ?” Gelfand coi việc nói tất cả những điều đó với Fuchs là rất quan trọng, cứ như tất cả đều là *lỗi của ông ấy* vậy. Sau đó, ông nói với cả hai chúng tôi: “Dẫu sao, tôi thấy bài báo có vẻ tốt đấy.”

Rồi ông lại mỉm cười với tôi và quay sang nói chuyện với người khác.

Đúng là một cuộc trao đổi! Fuchs chờ tới khi Gelfand đi ra khỏi tầm nghe mới nói với tôi: “Đừng lo. Ông ấy chỉ muốn tạo ấn tượng với cậu thôi.” (Và quả là ông ấy đã làm được!) “Chúng ta sẽ phải thêm một đoạn giải thích như Gelfand yêu cầu vào phần đầu của bài báo, rồi sau đó có lẽ ông ấy sẽ đồng ý nhận đăng nó thôi.”

Đây là kết cục tốt nhất có thể rồi. Sau khi thêm vào đoạn được Gelfand yêu cầu, tôi chính thức gửi đăng bài báo và cuối cùng nó cũng xuất hiện trong tạp chí. Với thành quả này, công trình toán học đầu tiên của tôi thế là đã hoàn tất. Tôi đã vượt qua ngưỡng cửa đầu tiên và cũng là điểm khởi đầu cho một hành trình dẫn tôi tới thế giới diệu kỳ của toán học hiện đại.

Một thế giới mà tôi muốn chia sẻ với các bạn.

☞ Có một điều cũng đáng chú ý đó là Gelfand không được bầu là viện sĩ chính thức của viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô cho tới tận giữa thập niên 1980 bởi vì ngành Toán của viện Hàn lâm đã bị viện trưởng của viện Toán học Steklov ở Moscow là Ivan Mateevich Vinogradov thao túng trong nhiều thập kỷ. Ông ta có biệt danh là “Trưởng ban bài Do Thái của Liên bang Xô viết”. Vinogradov đã áp đặt những chính

sách bài Do Thái rất hà khắc ở viện Hàn lâm và viện Steklov, những nơi nằm trong vòng kìm kẹp của ông ta trong gần năm mươi năm.

Chương 7

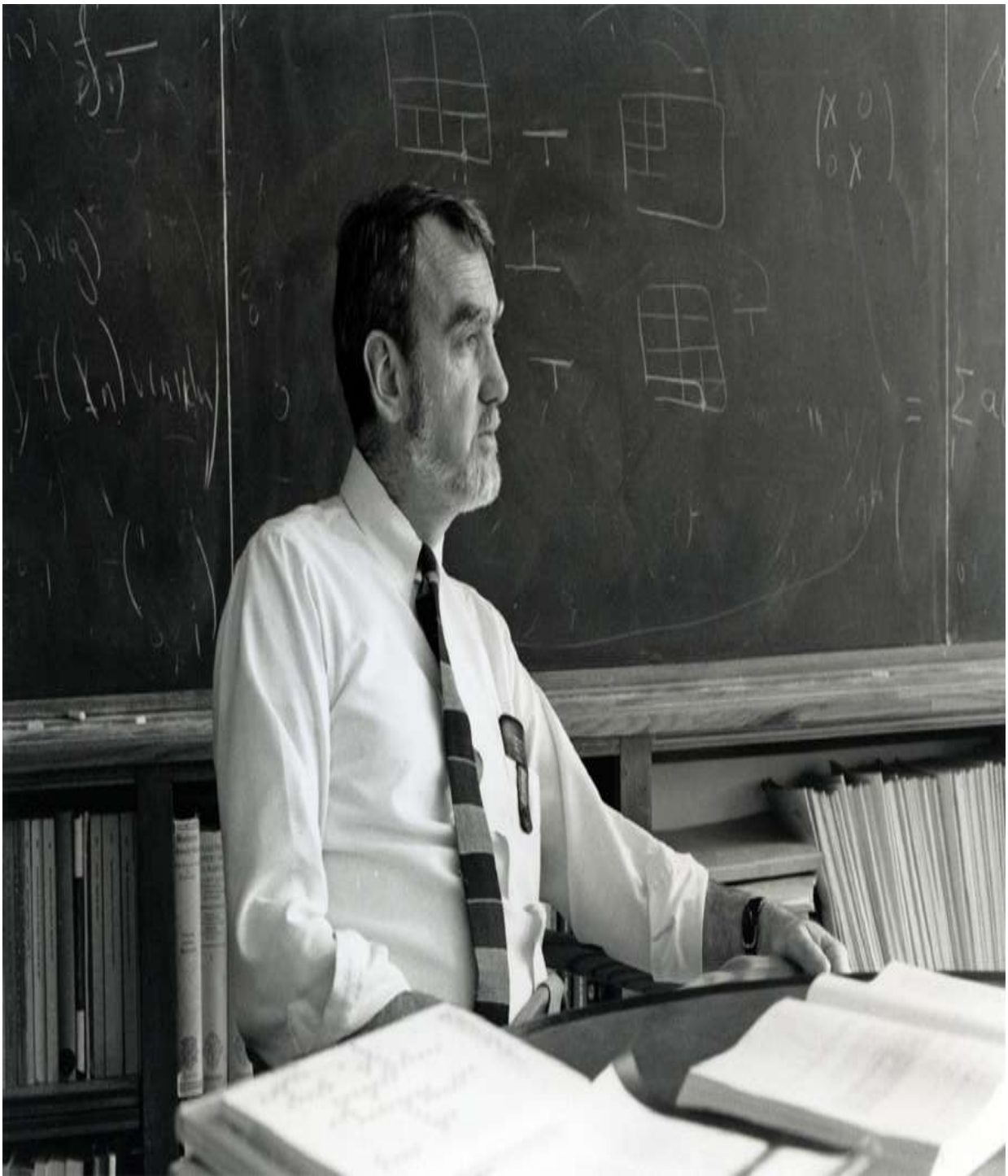
LÝ THUYẾT THỐNG NHẤT LỚN

Lời giải của bài toán đầu tiên là bước khởi đầu đưa tôi vào thánh đường toán học. Thật may mắn, công trình nghiên cứu toán học tiếp theo mà tôi tham gia cùng với Fuchs dẫn dắt tôi vào Chương trình Langlands, một trong những lý thuyết toán học sâu sắc và hứng thú nhất xuất hiện trong khoảng năm mươi năm trở lại đây. Tôi sẽ kể các bạn nghe về dự án nghiên cứu của tôi dưới đây, nhưng mục tiêu của tôi trong cuốn sách này không chỉ là mô tả những trải nghiệm của bản thân, mà còn hơn thế nữa. Cụ thể là để mang tới cho bạn một cảm nhận về toán học hiện đại, để chứng minh rằng toán học thực sự liên quan tới tính độc sáng, trí tưởng tượng và những cái nhìn sâu sắc mang tính đột phá. Và Chương trình Langlands là một ví dụ tuyệt vời. Tôi thích nghĩ về nó như một Lý thuyết thống nhất lớn trong toán học bởi vì nó phát lộ và thu hút sự tập trung chú ý tới những hình mẫu bí ẩn được chia sẻ bởi những lĩnh vực toán học khác nhau, do đó chỉ ra những kết nối bất ngờ và sâu sắc giữa chúng.

Toán học bao gồm rất nhiều những lĩnh vực nhỏ. Chúng ta thường cảm nhận chúng như là những lục địa khác nhau, với các nhà toán học làm việc trong những lĩnh vực đó nói những thứ ngôn ngữ khác nhau. Điều đó giải thích tại sao ý tưởng “thống nhất”, tức là mang những lý thuyết từ những lĩnh vực toán học khác nhau đó lại gần nhau, và nhận ra rằng tất cả chúng đều là một phần của một câu chuyện duy nhất, lại mạnh đến như vậy. Nó cũng tựa như khi đột nhiên bạn nhận ra rằng mình có thể hiểu một thứ ngôn ngữ khác, thứ ngôn ngữ mà bạn từng cố gắng học trong vô vọng mà không mấy thành công.

Sẽ hữu ích hơn nếu nghĩ toán học tổng thể giống như một câu đố ghép hình vĩ đại, trong đó không ai biết bức hình cuối cùng sẽ trông như thế nào. Việc giải câu đố này là một công việc tập thể của hàng nghìn con người. Họ làm việc theo các nhóm: đây là nhóm các nhà đại số đang dốc sức giải câu đố của mình, còn đây là các nhà lý thuyết số, kia là các nhà hình học, v.v. Mỗi nhóm có thể tạo thành một “hòn đảo” nhỏ trong bức hình lớn, nhưng hầu như xuyên suốt lịch sử toán học, người ta chưa từng thấy cách những hòn đảo nhỏ ấy sẽ kết nối với nhau bao giờ. Hệ quả là, công việc của hầu hết mọi người là mở rộng những hòn đảo của câu đố ấy. Tuy nhiên, đến một lúc nào đó sẽ có người đến và nhìn ra phương thức kết nối những hòn đảo ấy. Và khi điều đó xảy ra, những nét chính của bức hình tổng thể sẽ xuất hiện và mang lại ý nghĩa mới cho từng lĩnh vực riêng rẽ.

Đó là việc mà Robert Langlands đã làm, nhưng tham vọng của ông còn lớn hơn nhiều so với việc chỉ kết nối vài ba hòn đảo. Thực tế, Chương trình Langlands mà ông khởi phát từ cuối thập niên 1960 đã trở thành một nỗ lực đi tìm cơ chế mà chúng ta có thể sử dụng để bắc những cây cầu giữa rất nhiều hòn đảo, bất chấp vẻ bề ngoài của chúng dường như chẳng có quan hệ gì với nhau cả.



Robert Langlands ở văn phòng của mình tại Princeton, 1999. Ảnh do Jeff Mozzochi chụp.

Langlands hiện đang là giáo sư công huân về toán học của viện Nghiên cứu cao cấp ở Princeton, và phòng làm việc của ông chính là văn phòng trước đây của Albert Einstein. Ông sinh năm 1936 và lớn lên ở một thị trấn nhỏ gần Vancouver, là một người tài năng và có nhân

quan tuyệt vời; cha mẹ của ông kinh doanh đồ mộc. Một trong những điểm nổi bật của Langlands là ông nói thông thạo rất nhiều ngôn ngữ: tiếng Anh, Pháp, Đức, Nga, và Thổ Nhĩ Kỳ, mặc dù ông không sử dụng ngôn ngữ nào ngoài tiếng mẹ đẻ là tiếng Anh trước khi vào đại học.

Tôi đã có cơ hội cộng tác gần gũi với Langlands trong những năm gần đây, và chúng tôi thường trao đổi bằng tiếng Nga. Có lần ông còn gửi cho tôi danh sách những tác giả Nga mà ông đã đọc tác phẩm của họ từ nguyên bản. Danh sách ấy quá bao quát tới mức có vẻ như ông còn đọc nhiều tác gia văn học Nga hơn cả tôi. Tôi thường băn khoăn tự hỏi liệu những khả năng ngôn ngữ khác thường của Langlands có mối liên hệ nào tới khả năng đưa các nền văn hóa toán học khác nhau tới gần nhau hay không.

Điểm cốt yếu của Chương trình Langlands đó là khái niệm đối xứng mà vốn dĩ chúng ta đã quen thuộc. Chúng ta đã nói đến đối xứng trong hình học: chẳng hạn, bất kỳ phép quay nào cũng là một đối xứng của một chiếc bàn tròn. Việc nghiên cứu các đối xứng dẫn chúng ta tới khái niệm nhóm. Sau đó chúng ta đã thấy rằng các nhóm xuất hiện trong toán học dưới nhiều vỏ bọc khác nhau: như nhóm các phép quay, các nhóm bện, v.v. Chúng ta cũng thấy rằng các nhóm là công cụ để phân loại các hạt cơ bản và tiên đoán sự tồn tại của các quark. Các nhóm thích hợp với Chương trình Langlands xuất hiện trong nghiên cứu về các con số.

Để giải thích điều này, trước hết hãy nói về các con số mà chúng ta gặp trong đời sống hằng ngày. Mỗi chúng ta đều sinh vào một năm cụ thể, sống trong một ngôi nhà có số nhà cụ thể trên một con phố, có một số điện thoại, một mật khẩu để truy cập tài khoản ngân hàng ở máy ATM, v.v. Tất cả những con số này đều có điểm chung: mỗi số này đều thu được bằng cách cộng 1 vào chính nó một số lần xác định: $1+1$ bằng 2, $1+1+1$ bằng 3, v.v. Chúng được gọi là các số tự nhiên.

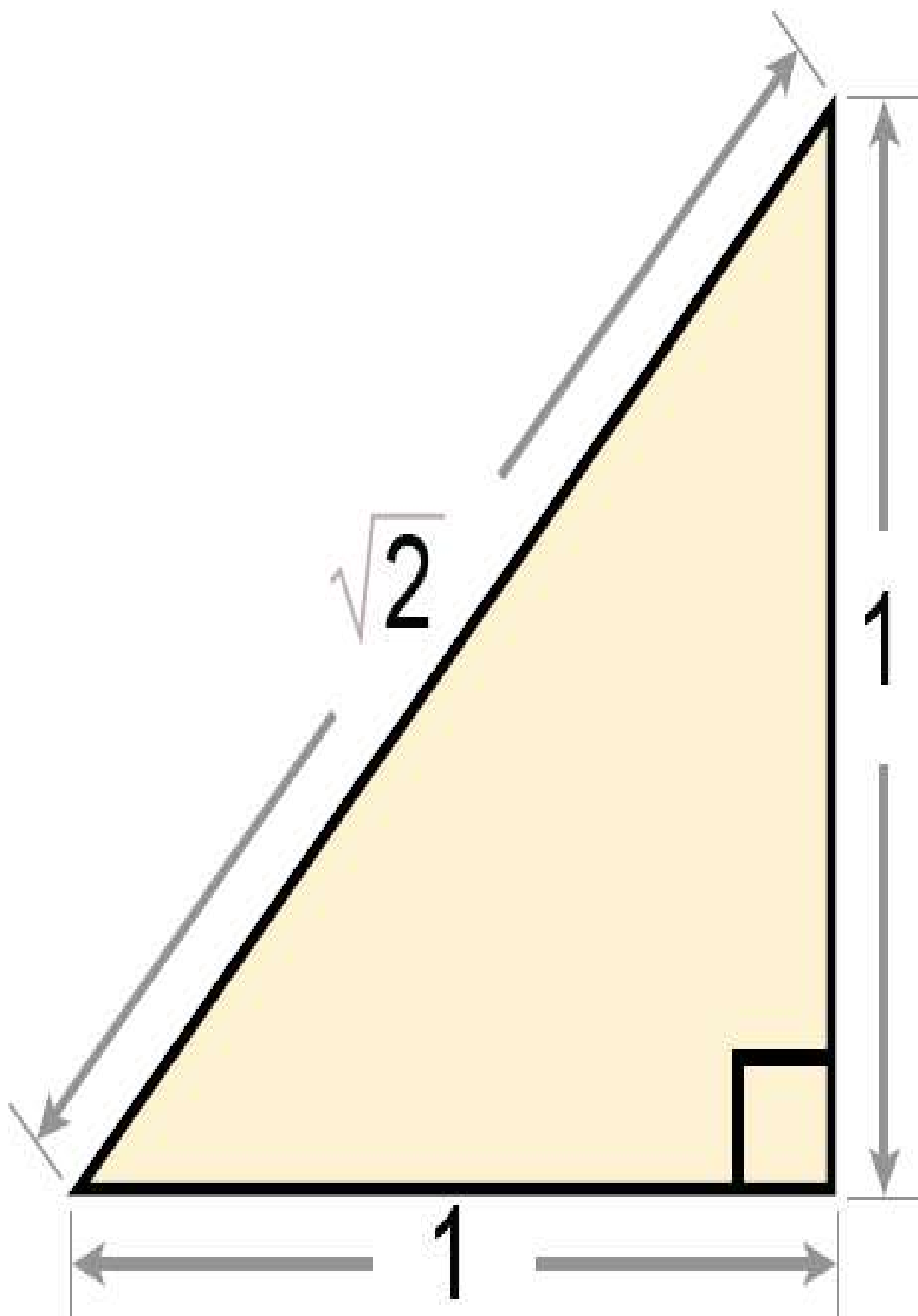
Chúng ta cũng có số 0, và các số âm -1, -2, -3... Như đã thảo luận ở chương 5, những con số này có tên là các số “nguyên”. Do vậy một

số nguyên là một số tự nhiên, hoặc 0, hoặc số đối của một số tự nhiên.

Chúng ta đôi khi cũng gặp những con số hơi tổng quát hơn. Một giá tiền, theo đô la và cent thường được biểu diễn như 2,59 đô la, có nghĩa là 2 đô la và 59 cent. Nó cũng bằng với 2 cộng với phân số $59/100$, hay 59 nhân $1/100$. Ở đây $1/100$ là đại lượng mà lấy nó cộng với chính nó 100 lần thì ta thu được 1. Những con số loại này được gọi là số hữu tỉ, hay phân số.

Một ví dụ hay về các số hữu tỉ là một phân tử; trong toán học nó được biểu diễn bởi phân số $1/4$. Tổng quát hơn, với bất kỳ hai số nguyên m, n chúng ta có thể tạo thành phân số m/n . Nếu m và n có ước số chung, chẳng hạn là d , (tức là, $m = dm'$ và $n = dn'$), thì chúng ta có thể giản ước d và viết m'/n' thay vì m/n . Chẳng hạn, $1/4$ thì cũng có thể được biểu diễn như $25/100$ và điều đó giải thích tại sao người Mỹ có thể nói rằng một phần tư thì cũng giống như 25 cent vậy.

Đại đa số các con số mà chúng ta gặp trong các tình huống hằng ngày đều là các phân số hay các số hữu tỉ. Nhưng có những số không phải số hữu tỉ. Một ví dụ là căn bậc hai của 2, mà chúng ta viết dưới dạng $\sqrt{2}$. Đó là số mà bình phương của nó bằng 2. Dưới khía cạnh hình học, $\sqrt{2}$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng 1.



Hóa ra chúng ta không thể biểu diễn nó (tức $\sqrt{2}$) dưới dạng m/n với m và n là các số tự nhiên.^[32] Tuy nhiên, chúng ta có thể lấy xấp xỉ nó bằng các số hữu tỉ nếu chúng ta viết ra vài chữ số thập phân của nó: 1,4142, rồi 1,41421, sau đó là 1,414213, v.v. Nhưng cho dù có viết ra bao nhiêu chữ số thập phân đi chăng nữa, thì đó cũng chỉ là một sự xấp xỉ mà thôi. Không có số thập phân hữu hạn nào có thể “xứng” với $\sqrt{2}$ cả.

Vì $\sqrt{2}$ là độ dài cạnh huyền của tam giác trên, chúng ta biết rằng con số này khá kỳ cục. Nhưng nó không phù hợp với hệ thống các số hữu tỉ.

Có rất nhiều số khác như vậy, chẳng hạn như $\sqrt{3}$ hoặc căn bậc ba của 2. Chúng ta cần phải phát triển một phương pháp có hệ thống để thêm các số này vào hệ thống các số hữu tỉ. Hãy nghĩ về các số hữu tỉ như một tách trà. Chúng ta có thể uống nó, nhưng trải nghiệm của chúng ta sẽ được cải thiện nếu cho thêm vào đường, sữa, mật ong, và nhiều thứ khác nữa - và những thứ đó cũng giống như các con số $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, v.v. vậy.

Hãy thử trộn $\sqrt{2}$ vào. Việc này cũng giống như thêm một cục đường vào tách trà của ta vậy. Ta hãy thả $\sqrt{2}$ vào tập các số hữu tỉ và thử xem sẽ thu được hệ thống số nào. Chắc chắn chúng ta muốn phải thực hiện được phép nhân giữa các con số trong hệ thống số mới đó, do vậy chúng ta phải thêm vào tất cả các số là tích của các số hữu tỉ và $\sqrt{2}$. Chúng có dạng k

$l\sqrt{2}$. Do vậy hệ thống số của chúng ta phải bao gồm tất cả các phân số

$\frac{m}{n}$ (đây là các số hữu tỉ) và tất cả các số có dạng $\frac{k}{l}\sqrt{2}$

Nhưng chúng ta cũng muốn có thể cộng chúng lại với nhau, do vậy ta phải thêm vào các tổng:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2} \\ & \frac{ml + kn\sqrt{2}}{nl} \end{aligned}$$

Tập hợp tất cả các số có dạng này đã là “độc lập” hay “đầy đủ”, theo nghĩa chúng ta có thể thực hiện tất cả các phép toán thông thường trên các số thuộc tập hợp đó - như cộng, trừ, nhân và chia - và kết quả sẽ luôn là số có cùng dạng đó.^[33] Đó là cốc trà của chúng ta với cục đường đã hoàn toàn tan vào trà.

Hóa ra hệ thống số mới này có một tính chất ẩn giấu mà các số hữu tỉ không có. Tính chất này sẽ là cánh cửa chính dẫn ta tới thế giới diệu kỳ của các con số. Cụ thể thì hóa ra hệ thống này có các đối xứng.

Nói “đối xứng” ở đây là tôi muốn nói về một quy tắc gán một con số mới cho bất kỳ số nào mà ta lấy làm điểm xuất phát. Nói cách khác, một đối xứng cho trước biến mỗi con số thành một con số khác trong cùng hệ thống. Chúng ta sẽ nói rằng một đối xứng là quy tắc mà theo đó mỗi con số “biến thành” con số khác nào đó. Quy tắc này phải tương thích với các phép toán cộng, trừ, nhân và chia. Nhưng có điều còn chưa rõ ràng là tại sao chúng ta lại phải quan tâm đến các đối xứng của một hệ thống số. Xin hãy vui lòng chờ đợi rồi bạn sẽ nhanh chóng hiểu tại sao ngay đây.

Hệ thống số của chúng ta có một đối xứng đơn vị, quy tắc ở đây là mỗi con số biến thành chính nó. Điều này cũng giống như phép quay một chiếc bàn một góc 0 độ vậy, sau phép quay này, mọi điểm trên bàn đều trở thành chính nó.

Cuối cùng thì hóa ra hệ thống số của chúng ta cũng có một đối xứng không tầm thường. Để giải thích xem nó là gì, hãy lưu ý $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^2 = 2$. Thật vậy, nếu chúng ta thay x bằng $\sqrt{2}$, ta sẽ thu được một đẳng thức. Nhưng phương trình này thực ra lại có hai nghiệm: một là $\sqrt{2}$ và nghiệm còn lại là $-\sqrt{2}$. Và thực tế thì chúng ta đã thêm cả hai số đó vào hệ thống các số hữu tỉ khi xây dựng hệ thống số mới ở trên. Hoán đổi hai nghiệm này cho nhau, ta sẽ thu được một đối xứng của hệ thống số này.^[34]

Để minh họa cho điều này một cách đầy đủ hơn theo ngôn ngữ tương quan với tách trà, ta hãy sửa đổi đôi chút. Giả sử thả một cục

đường màu trắng và một cục đường màu nâu vào cốc rồi hòa tan chúng với trà. Cục đầu tiên thì giống như $\sqrt{2}$ và cục kia thì giống như $-\sqrt{2}$. Rõ ràng, việc đổi thứ tự của chúng sẽ không làm thay đổi cốc trà đã hòa tan của ta. Cũng như thế, việc trao đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ cũng là một đối xứng trong hệ thống số của chúng ta.

Trong phép hoán đổi này, các số hữu tỉ vẫn không thay đổi.^[34] Bởi vậy, các số có dạng

$$n + k$$

$l\sqrt{2}$ sẽ trở thành

$$n - k$$

$l\sqrt{2}$. Hay nói cách khác, ở mỗi con số chúng ta chỉ việc đổi dấu ở trước $\sqrt{2}$ và giữ nguyên những thứ còn lại.^[35]

Bạn thấy đấy, hệ thống số mới của chúng ta giống như một con bướm vậy: các con số

$$n + k$$

$l\sqrt{2}$ giống như hình hài của con bướm, và đối xứng của những con số này khi trao đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ thì cũng giống như đối xứng của con bướm khi trao đổi hai cánh của nó vậy.

Tổng quát hơn, thay vì $x^2 = 2$ chúng ta có thể xét các phương trình khác theo biến x ; chẳng hạn như phương trình bậc ba: $x^3 - x + 1 = 0$. Nếu các nghiệm của phương trình dạng này không phải là các số hữu tỉ (như trong trường hợp của phương trình bên trên), thì chúng ta có thể gộp chúng vào hệ thống số hữu tỉ. Chúng ta cũng có thể gộp đồng thời các nghiệm của vài phương trình như vậy. Bằng cách làm như thế, chúng ta thu được rất nhiều hệ thống số khác nhau, hay như cách gọi của nhà toán học, chúng ta sẽ nhận được *các trường số*. Từ “trường” ở đây liên quan đến thực tế rằng hệ thống số này là đóng đối với các phép toán cộng, trừ, nhân và chia.

Cũng giống như trường số mà ta thu được bằng cách gộp thêm $\sqrt{2}$ vào, một trường số tổng quát sở hữu những đối xứng tương thích với các phép toán đó. Các đối xứng của một trường số cho trước có thể áp

dụng liên tiếp (hợp thành với nhau), giống như những đối xứng của một đối tượng hình học. Khi đó sẽ chẳng có gì ngạc nhiên rằng những đối xứng này tạo thành một nhóm. Nhóm này được gọi là *nhóm Galois* của trường số đó,^[36] để vinh danh nhà toán học Pháp Évariste Galois.



Câu chuyện của Galois là một trong những câu chuyện lãng mạn và mê hoặc nhất về các nhà toán học đã từng được kể. Là chàng trai phi thường, anh đã có một phát hiện đột phá khi còn rất trẻ. Và rồi anh mất trong một cuộc đấu súng khi đang tuổi hai mươi. Có nhiều cách nhìn nhận khác nhau về nguyên nhân của cuộc đấu súng, xảy ra vào ngày 31 tháng 5 năm 1832: một vài người nói rằng nó có liên quan tới một phụ nữ, số khác lại nói đó là vì những hoạt động chính trị của Galois. Chỉ có điều chắc chắn rằng, anh rất quyết liệt khi bộc lộ các quan điểm chính trị của mình, và làm mất lòng rất nhiều người trong quãng đời ngắn ngủi ấy.

Đúng vào đêm trước hôm anh mất, trong căn phòng tỏ mờ ánh nến giữa đêm khuya, anh viết một cách điên cuồng và hoàn tất bản thảo phác họa những ý tưởng về tính đối xứng của các con số. Về thực chất, đó là bức thư tình của anh gửi tới nhân loại, trong đó Galois chia sẻ với chúng ta những phát minh gây sửng sốt của anh. Thật vậy, những nhóm đối xứng mà Galois khám phá ra, ngày nay được mang tên anh, quả là những kỳ quan của thế giới toán học, chẳng khác gì các kim tự tháp của Ai Cập, hay vườn treo Babylon vậy. Khác biệt duy nhất là chúng ta không phải đi tới lục địa khác, hay du hành vượt thời gian để xem chúng. Chúng ở ngay trước tầm tay của chúng ta, bất kể chúng ta đang ở đâu. Và không chỉ vẻ đẹp của chúng đầy quyến rũ, mà tiềm năng ứng dụng của chúng trong thực tế cũng rất to lớn.

Chao ôi, Galois đã vượt trước quá xa thời đại của mình. Những ý tưởng của anh quá cấp tiến tới mức ban đầu những người đương thời không thể hiểu nổi. Các bài báo của anh hai lần bị viện Hàn lâm Khoa học Pháp từ chối, và phải mất gần năm mươi năm sau thì công trình ấy mới được công bố và đánh giá cao bởi những nhà toán học khác. Tuy nhiên, ngày nay nó được coi là một trong những rường cột của toán học hiện đại.

Những gì Galois đã làm là đưa ý tưởng đối xứng, vốn quen thuộc với trực quan của chúng ta trong hình học, tới tuyến trước của lý thuyết

số. Hơn nữa, anh còn chỉ ra sức mạnh đáng kinh ngạc của đối xứng.

Trước Galois, các nhà toán học tập trung vào việc tìm kiếm công thức tường minh cho nghiệm của các phương trình như $x^2 = 2$ và $x^3 - x + 1 = 0$, gọi là các phương trình đa thức. Đáng buồn thay, đây chính là những gì chúng ta vẫn đang phải học ở trường phổ thông, dầu cho hai trăm năm đã trôi qua kể từ ngày Galois qua đời. Chẳng hạn, chúng ta buộc phải ghi nhớ công thức nghiệm của phương trình bậc hai tổng quát:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

được biểu diễn qua các hệ số a, b, c . Tôi sẽ không viết công thức ấy ra đây, để không phải nhắc lại những ký ức không mấy dễ chịu. Tất cả những gì mà bây giờ chúng ta cần biết là công thức đó có chứa căn thức.

Giống như vậy, cũng có một công thức tương tự, nhưng phức tạp hơn, cho nghiệm một phương trình bậc ba tổng quát:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

được biểu diễn qua các hệ số a, b, c, d , và có chứa cả căn thức bậc ba. Nhiệm vụ giải một phương trình đa thức theo căn thức (tức là bao gồm các phép cộng, trừ, nhân, chia và khai căn bậc hai, bậc ba) nhanh chóng trở nên ngày càng phức tạp khi bậc của phương trình tăng.

Công thức tổng quát cho nghiệm của các phương trình bậc hai đã được biết đến bởi nhà toán học Ba Tư Al-Khwarizmi ở thế kỷ 9 (từ “algebra” - đại số - có nguồn gốc từ “al-jabr”, xuất hiện trong nhan đề cuốn sách của ông). Công thức nghiệm của phương trình bậc ba, bậc bốn đã được khám phá vào nửa đầu thế kỷ 16. Một cách tự nhiên, đối tượng tiếp theo sau đó sẽ phải là phương trình bậc năm. Trước Galois, trong suốt ba trăm năm, rất nhiều nhà toán học đã vô vọng tìm kiếm một công thức cho phương trình bậc năm, mà không có kết quả. Nhưng Galois nhận ra rằng họ đã đặt sai vấn đề. Thay vì thế, anh nói, chúng ta phải tập trung vào các nhóm đối xứng của trường số thu được bằng

cách gộp các nghiệm ấy vào trường các số hữu tỉ - đó chính là thứ mà ngày nay chúng ta gọi là nhóm Galois.

Vấn đề mô tả nhóm Galois hóa ra lại dễ hơn vấn đề viết ra công thức tường minh cho các nghiệm. Người ta vẫn có thể nói điều gì đó có ý nghĩa về nhóm này mà thậm chí không cần phải biết các nghiệm cụ thể là gì. Và từ đó người ta có thể suy ra các thông tin quan trọng về các nghiệm. Thực tế, Galois đã chỉ ra được rằng công thức nghiệm biểu diễn qua các căn thức (tức là bao gồm các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và khai căn) tồn tại nếu và chỉ nếu nhóm Galois tương ứng của phương trình đó có một cấu trúc đặc biệt đơn giản mà ngày nay các nhà toán học gọi đó là nhóm *giải được*. Đối với phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn thì những nhóm đó là luôn giải được. Nhưng Galois chỉ ra rằng nhóm các đối xứng của một phương trình bậc năm điển hình (hay một phương trình có bậc cao hơn) là không giải được. Điều này ngay lập tức cho thấy rằng không có công thức biểu diễn các nghiệm theo căn thức cho những phương trình như thế.^[37]

Tôi sẽ không đi sâu vào chi tiết của phép chứng minh ấy, nhưng ta hãy xét một số ví dụ về nhóm Galois để giúp bạn có ý niệm nhất định về những nhóm ấy. Chúng ta đã mô tả nhóm Galois trong trường hợp phương trình $x^2 = 2$. Phương trình này có hai nghiệm là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$, và chúng đã được gộp vào trường các số hữu tỉ. Nhóm Galois của trường số thu được^[38] bao gồm hai phần tử: phần tử đơn vị và đối xứng trao đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$.

Ví dụ tiếp theo của chúng ta là xét phương trình bậc ba ở trên và giả định rằng các hệ số của nó là các số hữu tỉ, nhưng cả ba nghiệm của nó đều là vô tỉ. Sau đó chúng ta sẽ xây dựng một trường số mới bằng cách gộp các nghiệm này vào trường số hữu tỉ. Việc này cũng giống như cho thêm ba thành phần khác nhau vào cốc trà của ta vậy: cho thêm một cục đường, một chút sữa, và một thìa đầy mật ong. Dưới bất kỳ đối xứng nào của trường này (cốc trà với ba thành phần mới thêm vào), phương trình bậc ba không thay đổi bởi vì các hệ số của nó là các

số hữu tỉ, những số được bảo toàn bởi các đối xứng. Do vậy mỗi nghiệm của phương trình bậc ba (một trong ba thành phần) phải được biến đổi thành một nghiệm khác. Nhận xét này cho phép chúng ta mô tả nhóm Galois các đối xứng của trường số này theo các hoán vị của ba nghiệm. Điểm quan trọng là chúng ta đã có được mô tả này mà không cần phải viết ra một công thức nào cho các nghiệm cả.^[39]

Tương tự như vậy, nhóm Galois của các đối xứng trong trường số, thu được bằng cách gộp tất cả các nghiệm của một phương trình đa thức bất kỳ vào trường số hữu tỉ, có thể được mô tả theo các hoán vị của các nghiệm ấy (một phương trình bậc n sẽ có n nghiệm phân biệt và không hữu tỉ). Bằng cách này chúng ta có thể suy ra rất nhiều thông tin về phương trình mà không phải biểu diễn các nghiệm theo các hệ số.^[40]

Công trình của Galois là một ví dụ tuyệt vời cho sức mạnh của nhận thức toán học sâu sắc. Galois không giải bài toán tìm công thức nghiệm cho các phương trình theo lối mòn cũ. Anh đã đột phá được vấn đề ấy! Anh phát biểu lại nó, bẻ và uốn cong nó, rồi nhìn nhận nó dưới ánh sáng hoàn toàn khác. Tâm nhìn tuyệt vời của anh đã làm thay đổi vĩnh viễn lối suy nghĩ của con người về những con số và các phương trình.

Và rồi, 150 năm sau, Langlands lại đưa những ý tưởng này đi xa hơn nữa. Năm 1967, ông đưa ra những nhận thức sâu sắc mang tính cách mạng gán lý thuyết các nhóm Galois với một lĩnh vực khác của toán học gọi là giải tích điều hòa. Hai lĩnh vực này, tưởng như cách xa nhau nhiều năm ánh sáng, hóa ra lại liên quan khăng khít với nhau. Sau đó, ở tuổi ba mươi, Langlands đã tổng kết những ý tưởng của ông trong một lá thư gửi cho nhà toán học nổi tiếng André Weil. Bản sao của bức thư này được lan truyền rộng rãi trong cộng đồng toán học ở thời điểm đó.^[41] Điều đáng lưu ý là mấy lời phi lộ gửi kèm theo bức thư được viết với những lời lẽ rất khiêm nhường.^[42]

Thưa Giáo sư Weil: để đáp lại lời mời đến nói chuyện của ông, tôi viết một lá thư gửi kèm theo đây. Sau khi viết xong tôi nhận ra rằng gần như không có khẳng định nào trong đó mà tôi chắc chắn cả. Tôi sẽ đánh giá rất cao nếu như ông sẵn lòng đọc nó như một tư biện thuần túy; còn không thì nó chỉ là một nắm giấy lộn - tôi chắc ông đã có sẵn một thùng rác.

Đó là sự khởi đầu cho một lý thuyết đột phá làm thay đổi mãi mãi cách suy nghĩ của chúng ta về toán học. Và thế là Chương trình Langlands được khai sinh.

Một vài thế hệ các nhà toán học đã dành cả cuộc đời để giải quyết các vấn đề mà Langlands đặt ra. Vậy điều gì truyền cho họ cảm hứng mạnh mẽ đến như vậy? Câu trả lời sẽ đến trong chương tiếp theo.

(*) Chú ý rằng ở đây và về sau tôi sẽ sử dụng một dấu trừ (một nét gạch ngang) để biểu diễn số nguyên âm, chứ không phải là một dấu gạch nối tiếp. Điều này phù hợp với ký hiệu toán học chuẩn. Thực tế, không có gì khác biệt giữa chúng vì $-N = 0 - N$.

Chương 8

NHỮNG CON SỐ THẦN KỲ

Khi bắt đầu nói về các đối xứng trong chương 2, chúng ta nhận thấy rằng các biểu diễn của nhóm có tên là $SU(3)$ chi phối hành vi của các hạt cơ bản. Trọng tâm của Chương trình Langlands cũng là về các biểu diễn của một nhóm, nhưng ở đây là nhóm Galois gồm các đối xứng của một trường số kiểu như ta đã thảo luận ở chương trước. Hóa ra các biểu diễn này lại tạo thành “mã nguồn” của một trường số, mang tất cả những thông tin căn bản về các con số.

Ý tưởng phi thường của Langlands đó là chúng ta có thể trích xuất được những thông tin này từ các đối tượng có bản chất hoàn toàn khác: đó là các hàm tự đẳng cấu, xuất hiện trong một lĩnh vực toán học khác gọi là giải tích điều hòa. Gốc rễ của giải tích điều hòa nằm ở việc nghiên cứu về các họa âm, những sóng âm cơ bản có tần số là bội của nhau. Ý tưởng ở đây là: một sóng âm tổng quát là chồng chất của các họa âm, tương tự như âm thanh của một bản giao hưởng là chồng chất của những họa âm tương ứng với các nốt được chơi bởi nhiều nhạc cụ khác nhau. Về mặt toán học, điều này có nghĩa là biểu diễn một hàm cho trước như chồng chất của các hàm số mô tả họa âm, chẳng hạn như các hàm lượng giác quen thuộc $\sin$ và $\cos$. Các hàm tự đẳng cấu là phiên bản phức tạp hơn của các hàm điều hòa quen thuộc đó. Chúng ta có các phương pháp giải tích mạnh để thực hiện những tính toán với các hàm tự đẳng cấu. Và tầm nhìn sâu sắc đáng kinh ngạc của Langlands chính là chúng ta có thể sử dụng các hàm này để nghiên cứu những vấn đề khó hơn nhiều trong lý thuyết số. Bằng cách này, chúng ta có thể tìm thấy sự hài hòa ẩn giấu của các con số.

Tôi đã viết trong phần Lời nói đầu rằng một trong những chức năng chính của toán học là sắp xếp thông tin, hay như Langlands nói là, “tạo ra trật tự từ những thứ tưởng như hỗn loạn”.^[43] Ý tưởng của Langlands quả thật là vô cùng táo bạo vì nó giúp sắp xếp các dữ liệu tưởng như hỗn độn trong lý thuyết số thành các mẫu hình có quy luật, đầy đối xứng và hài hòa.

Nếu chúng ta nghĩ về các lĩnh vực khác nhau trong toán học như những lục địa, thì lý thuyết số sẽ giống như Bắc Mỹ và giải tích điều hòa là châu Âu. Qua nhiều năm, càng ngày chúng ta càng tốn ít thời gian hơn để đi từ lục địa này sang lục địa khác. Nếu trước kia phải mất nhiều ngày trời với tàu thủy, thì hiện thời chỉ mất vài giờ với máy bay. Nhưng hãy tưởng tượng rằng có một công nghệ mới được sáng tạo ra cho phép chúng ta di chuyển tức thời từ bất kỳ nơi nào thuộc Bắc Mỹ đến bất kỳ nơi nào ở châu Âu thì nó cũng tương đương với những kết nối được Langlands khám phá ra.

Tôi sẽ mô tả một trong những kết nối ngoạn mục, liên quan chặt chẽ tới Định lý cuối cùng của Fermat mà chúng ta đã nhắc tới ở chương 6.

Định lý cuối cùng của Fermat được phát biểu đơn giản đến mức dễ gây hiểu nhầm. Nó phát biểu rằng không có các số tự nhiên x, y, z nào là nghiệm của phương trình:

$$x^n + y^n = z^n \text{ nếu } n > 2$$

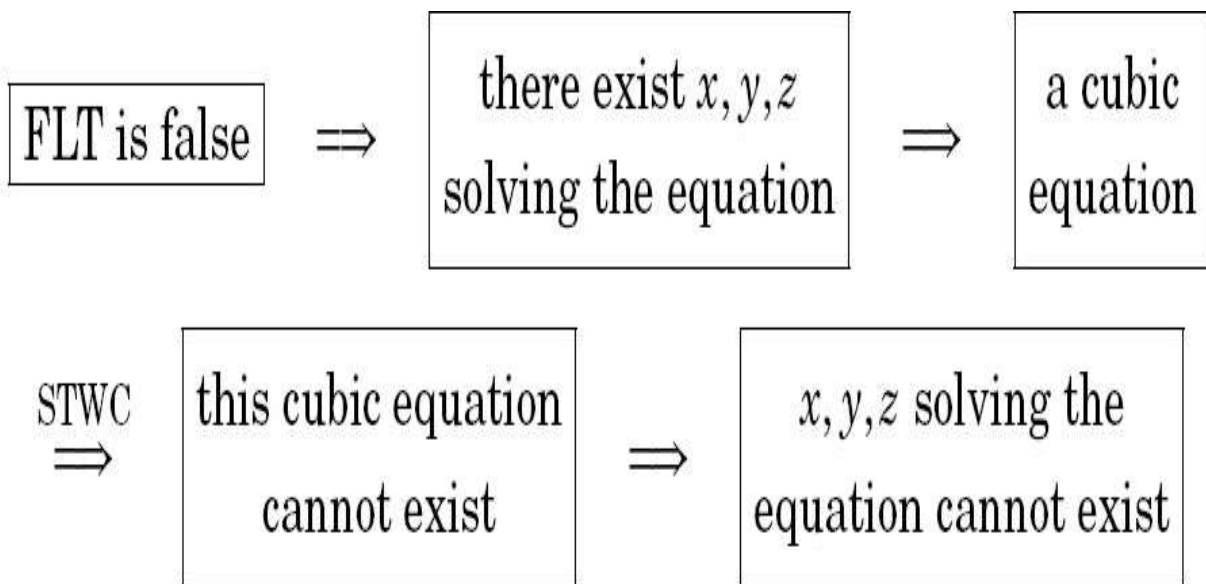
Như tôi đã viết, kết quả này được nhà toán học người Pháp Pierre de Fermat phỏng đoán hơn 350 năm trước, vào năm 1637. Fermat viết trên lề của một cuốn sách cổ mà ông đang đọc, rằng ông đã tìm được một phép chứng minh “thực sự tuyệt vời” cho mệnh đề này nhưng vì “lề sách quá nhỏ nên không thể viết ra được.” Ta có thể gọi nó là một chứng minh kiểu Twitter ở thế kỷ 17: “Tôi đã tìm thấy một chứng minh tuyệt vời cho định lý này, nhưng thật không may tôi không thể viết nó ra ở đây vì nó dài hơn một trăm bốn mươi *chara*” - xin lỗi, hết chỗ mất rồi.

Chẳng mấy ai nghi ngờ rằng Fermat đã sai lầm. Phải mất đến 350 năm sau chúng ta mới tìm được chứng minh thực sự, và nó phức tạp kinh khủng. Chứng minh ấy bao gồm hai bước chính: đầu tiên, năm 1986, Ken Ribet chỉ ra rằng Định lý cuối cùng của Fermat có thể suy ra được từ cái gọi là giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil.

(Có lẽ, tôi nên chú thích ở đây rằng một giả thuyết toán học là một mệnh đề được kỳ vọng là sẽ đúng, nhưng chưa có ai chứng minh được cả. Một khi ta chứng minh được, giả thuyết ấy sẽ trở thành định lý^[44]).

Điều mà Ken Ribet chỉ ra đó là nếu tồn tại các số tự nhiên x, y, z là nghiệm của phương trình Fermat, thì, sử dụng các số này, ta có thể lập được một phương trình *cubic* nào đó, mà nó có một tính chất trái với giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil (Dưới đây tôi sẽ giải thích phương trình ấy là gì và tính chất ấy ra sao). Như vậy, nếu chúng ta biết rằng giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là đúng, thì phương trình này không thể tồn tại. Nhưng khi ấy thì cũng không tồn tại nghiệm x, y, z của phương trình Fermat.^[45]

Hãy tạm dừng lại một phút để kiểm tra lại logic của suy luận này lần nữa. Để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, chúng ta giả sử rằng nó sai; tức là ta giả định tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho phương trình Fermat được nghiệm đúng. Sau đó, chúng ta gán cho các số này một phương trình cubic, nhưng hóa ra phương trình này lại có một tính chất không mong muốn nào đó. Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil cho chúng ta biết rằng một phương trình như thế *không thể tồn tại*. Nhưng khi đó các số x, y, z cũng không thể tồn tại. Và như vậy phương trình Fermat không thể có nghiệm. Do đó Định lý cuối cùng của Fermat là đúng! Lược đồ chứng minh được vẽ như ở bảng dưới đây (ta viết tắt “Định lý cuối cùng của Fermat” là FLT, và “giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil” là STWC):



FLT sai $\Rightarrow$ Tồn tại

là nghiệm của phương trình Fermat $\Rightarrow$ Một phương trình cubic

STWC $\Rightarrow$ Phương trình cubic này không tồn tại $\Rightarrow$ Không tồn tại

là nghiệm của phương

trình Fermat

Loại suy luận này được gọi là *chứng minh bằng phản chứng*. Chúng ta bắt đầu với mệnh đề trái ngược với mệnh đề cần chứng minh (trong trường hợp này, đó là mệnh đề phát biểu rằng tồn tại các số tự nhiên x, y, z là nghiệm của phương trình Fermat, trái ngược với điều chúng ta muốn chứng minh). Nếu, sau một chuỗi những suy luận, chúng ta đi tới một mệnh đề có thể chứng minh được là sai (trong trường hợp ta đang xét là sự tồn tại của một phương trình cubic trái với giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil), thì chúng ta có thể kết luận rằng mệnh đề mà chúng ta nêu ra ban đầu là sai. Do đó mệnh đề mà ta cần chứng minh (Định lý cuối cùng của Fermat) là đúng.

Việc còn lại cần làm để xác nhận Định lý cuối cùng của Fermat là chứng minh rằng giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil đúng. Khi đã hiểu rõ điều này (năm 1986, sau công trình của Ribet), người ta đổ xô đi tìm cách chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil.

Qua nhiều năm, một vài chứng minh được công bố, nhưng những phân tích sau đó chỉ ra rằng các chứng minh ấy đều có những sai lầm

hay lỗ hổng lớn. Năm 1993, Andrew Wiles khẳng định rằng ông đã chứng minh được giả thuyết này, nhưng chỉ vài tháng sau người ta lại tìm thấy lỗ hổng trong chứng minh ấy. Trong một thời gian ngắn, người ta tưởng rằng chứng minh của ông sẽ được nhớ đến cùng với rất nhiều những “phi chứng minh” nổi tiếng khác, trong đó các lỗ hổng được phát hiện nhưng không bao giờ lấp hết được.

Thật may mắn, Wiles có thể lấp đầy lỗ hổng của ông trong một năm, với sự giúp đỡ của một nhà toán học khác là Richard Taylor. Họ đã cùng nhau hoàn thiện phép chứng minh.^[46] Trong một bộ phim tài liệu tuyệt vời về Định lý cuối cùng của Fermat, Wiles rất xúc động khi kể lại thời khắc này, và bạn có thể hình dung được những trải nghiệm đau đớn mà ông đã phải trải qua.

Như vậy, giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là kết quả then chốt trong việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Nó cũng có thể được xem như một trường hợp đặc biệt của Chương trình Langlands, và do đó nó cung cấp một minh họa tuyệt vời cho những mối liên kết bất ngờ được tiên đoán bởi Chương trình Langlands.

Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là một mệnh đề về các dạng phương trình xác định. Thực tế phần lớn toán học là về việc giải các phương trình. Chúng ta muốn biết rằng liệu một phương trình đã cho có nghiệm trong một miền cho trước hay không; nếu có, thì liệu chúng ta có thể tìm được một nghiệm không? Nếu có vài nghiệm, thì cụ thể số nghiệm là bao nhiêu? Tại sao một số phương trình lại có nghiệm và số khác thì không?

Trong chương trước chúng ta đã nói về các phương trình đa thức một biến, như $x^2 = 2$. Định lý cuối cùng của Fermat là một phương trình ba biến $x^n + y^n = z^n$. Và giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là về một lớp các phương trình đại số hai biến, như phương trình sau:

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

Một nghiệm của phương trình này là một cặp số (x, y) sao cho vế trái bằng với vế phải.

Nhưng chúng ta muốn x, y là những số thuộc loại nào? Có vài sự lựa chọn: một khả năng đó là x, y là các số tự nhiên, hay các số nguyên. Khả năng khác đó là các số hữu tỉ. Chúng ta cũng có thể tìm nghiệm x, y là các số thực, hay thậm chí là các số phức - ta sẽ thảo luận chi tiết hơn về sự lựa chọn này trong chương sau.

Thực tế hóa ra là còn có một lựa chọn nữa, ít hiển nhiên hơn nhưng quan trọng không kém: đó là các nghiệm x, y theo “modun N ”, với N là một số tự nhiên cố định nào đó. Điều này có nghĩa là ta phải tìm các số nguyên x, y sao cho khi thay vào hai vế của phương trình (hoặc hiệu của hai vế đó) ta sẽ nhận được một số chia hết cho N .

Chẳng hạn, hãy thử tìm các nghiệm theo modun $N = 5$. Có một nghiệm hiển nhiên là $x = 0, y = 0$. Và còn có ba nghiệm khác, hơi ít hiển nhiên hơn: $x = 0, y = 4$, là một nghiệm theo modun 5 bởi vì vế trái là 20 và vế phải là 0. Hiệu của vế trái và vế phải là 20, một số chia hết cho 5. Do vậy nó thực sự là một nghiệm theo modun 5 của phương trình đang xét. Bằng suy luận tương tự, $x = 1, y = 0$ và $x = 1, y = 4$ cũng là nghiệm theo modun 5.

Chúng ta cũng đã thảo luận về loại số học này trong chương 2 khi nói về nhóm các phép quay của một chiếc bàn tròn. Sau đó ta thấy rằng phép cộng các góc cũng đã được tính theo “modun 360° ”. Tức là, nếu kết quả của phép cộng của hai góc lớn hơn 360° , chúng ta sẽ trừ đi 360 để đưa nó về khoảng từ 0 đến 360° . Chẳng hạn, phép quay theo một góc 450° thì cũng giống như phép quay theo góc 90° , bởi vì $450 - 360 = 90$.

Chúng ta cũng gặp kiểu số học này khi sử dụng đồng hồ. Nếu chúng ta bắt đầu làm việc lúc 10h và làm việc trong 8 giờ thì khi nào ta sẽ kết thúc công việc? Tốt thôi, ta biết rằng $10 + 8 = 18$, do vậy sẽ là tự nhiên khi nói rằng: “Chúng ta sẽ nghỉ lúc 18h.” Đây là một câu nói hoàn hảo ở Pháp, vì họ đánh số giờ giấc theo các số từ 0 đến 24 (thực

ra cũng không hoàn hảo lắm, vì ở Pháp một ngày làm việc chỉ giới hạn trong 7 giờ làm việc mà thôi). Nhưng ở Mỹ, chúng ta nói: “Chúng ta sẽ nghỉ lúc 6h tối.” Bằng cách nào mà ta thu được số 6 từ 18? Ta đã trừ nó cho 12: $18 - 12 = 6$.

Như vậy, ta sử dụng cùng một ý tưởng với giờ giấc như với các góc. Trong trường hợp đầu, chúng ta thực hiện phép cộng theo “modun 360”. Trong trường hợp thứ hai, ta thực hiện phép cộng theo “modun 12”.

Giống như vậy, chúng ta có thể sử dụng phép cộng theo modun một số tự nhiên N bất kỳ. Xét tập hợp tất cả các số liên tiếp từ 0 đến $N - 1$:

$$\{0, 1, 2, \dots, N - 2, N - 1\}$$

Nếu $N = 12$, đây là tập hợp các giờ. Nói chung, nếu thay vai trò của số 12 bằng số N , thì không phải 12 đưa chúng ta trở lại về 0, mà là N .

Ta định nghĩa phép cộng trên tập hợp các số này cũng giống như đối với giờ. Cho trước hai số bất kỳ trong tập hợp này, ta cộng chúng lại, và nếu tổng đó lớn hơn N , thì ta trừ nó cho N để thu được một số trong cùng tập hợp. Quy tắc này biến tập hợp ấy thành một nhóm. Phần tử đơn vị trong nhóm là số 0: cộng nó với bất kỳ số nào cũng không làm thay đổi số đó. Thực vậy, ta có $n + 0 = n$. Và với bất kỳ số n nào trong tập hợp này, “nghịch đảo cộng tính” của nó là $N - n$, bởi vì $n + (N - n) = N$, số cũng bằng 0 theo quy tắc của chúng ta.

Chẳng hạn, lấy $N = 3$. Ta sẽ có tập hợp $\{0, 1, 2\}$ và phép cộng theo modun 3. Chẳng hạn, ta có:

$$2 + 2 = 1 \text{ theo modun } 3$$

trong hệ thống này, vì $2 + 2 = 4$, nhưng vì $4 = 3 + 1$, nên 4 cũng bằng với 1 theo modun 3.

Vậy nên nếu ai đó nói với bạn “2 cộng với 2 bằng 4” để chỉ ra một sự thật ai cũng biết, bây giờ bạn có thể nói (với một nụ cười chiếu cố, nếu bạn thích): “À, thực ra thì điều đó không phải lúc nào cũng đúng.”

Và nếu họ đề nghị bạn giải thích xem bạn có ý gì, bạn có thể nói với họ, “Nếu bạn thực hiện phép cộng theo modun 3, thì 2 cộng với 2 bằng 1.”

Cho trước hai số bất kỳ thuộc tập hợp trên, ta cũng có thể nhân chúng. Kết quả thu được từ phép nhân có thể không nằm giữa 0 và $N - 1$, nhưng sẽ có một số duy nhất nằm trong khoảng này nhưng sẽ khác với kết quả thu được từ phép nhân thông thường một số chia hết cho N . Tuy nhiên, nói chung, tập hợp $\{1, 2, \dots, N - 1\}$ không phải là một nhóm đối với phép nhân. Chúng ta cũng có phần tử đơn vị: số 1. Nhưng không phải phần tử nào cũng có nghịch đảo theo modun N . Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu N là một số nguyên tố, tức là, một số không chia hết cho số tự nhiên nào ngoài 1 và chính nó.^[47]

Một vài số nguyên tố đầu tiên là 2, 3, 5, 7, 11, 13... (theo thông lệ số 1 bị loại bỏ khỏi dãy này). Các số tự nhiên chẵn, ngoại trừ 2, đều không phải là số nguyên tố, vì chúng chia hết cho 2, và 9 cũng không phải là số nguyên tố, bởi vì nó chia hết cho 3. Thực tế có vô hạn số nguyên tố - bất kể một số nguyên tố có lớn tới cỡ nào thì cũng có số nguyên tố lớn hơn nó.^[48] Các số nguyên tố, do không thể chia nhỏ hơn được nữa, là những hạt cơ bản của thế giới các số tự nhiên; thực tế mỗi số tự nhiên khác có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố theo một cách duy nhất. Chẳng hạn, $60 = 2.2.3.5$.

Ta hãy thử cố định một số nguyên tố. Như thường lệ, ta ký hiệu nó là p . Xét tập hợp tất cả các số tự nhiên liên tiếp nằm giữa 0 và $p - 1$; tức là:

$$\{0, 1, 2, \dots, p - 1, p - 1\}$$

Và xét hai phép toán trên tập hợp này: phép cộng và phép nhân theo modun p .

Như đã thấy ở trên, tập hợp này là một nhóm với phép cộng theo modun p . Điều thậm chí còn thú vị hơn nữa là nếu ta bỏ đi phần tử 0 và xét tập hợp các số tự nhiên liên tiếp nằm giữa 1 và $p - 1$ tức là $\{1, 2, \dots, p - 1\}$, ta sẽ thu được một nhóm với phép nhân theo modun p . Phần tử

1 là phần tử đơn vị theo phép nhân (điều này là rõ ràng), và tôi khẳng định rằng bất kỳ số tự nhiên nào nằm giữa 1 và $p - 1$ cũng có nghịch đảo đối với phép nhân.^[49]

Chẳng hạn, với $p = 5$, ta thấy rằng:

$$2.3 = 1 \text{ theo modun } 5$$

và

$$4.4 = 1 \text{ theo modun } 5$$

do vậy nghịch đảo đối với phép nhân của 2 theo modun 5 là 3, và 4 là nghịch đảo của chính nó theo modun 5. Thực tế thì hóa ra điều này cũng đúng trong trường hợp tổng quát.^[50]

Trong đời sống hằng ngày, chúng ta thường sử dụng các số nguyên hoặc các phân số. Đôi khi ta cũng sử dụng các số như $\sqrt{2}$. Nhưng bây giờ chúng ta đã khám phá ra một hệ thống số mới với bản chất hoàn toàn khác: tập hữu hạn các số $\{0, 1, 2, \dots, p - 2, p - 1\}$ với p là một số nguyên tố, trên đó chúng ta đã có quy tắc cho phép nhân và phép cộng theo modun p . Nó được gọi là *trường hữu hạn* với p phần tử. Những trường hữu hạn này tạo thành một quần đảo quan trọng trong thế giới các con số - một thế giới mà thật không may đa số chúng ta đều không nghe nói về sự tồn tại của nó.

Mặc dù các hệ thống số này trông có vẻ rất khác với những hệ thống số mà chúng ta đã quen thuộc như là các số hữu tỉ, nhưng chúng lại có cùng những tính chất nổi bật: chúng là đóng đối với các phép toán như cộng, trừ, nhân và chia.^[51] Bởi vậy, mọi thứ chúng ta có thể làm với các số hữu tỉ thì cũng có thể làm được với những trường hữu hạn nhìn khá xa lạ đó.

Thực ra, chúng cũng không phải là quá xa lạ, vì chúng đã có những ứng dụng quan trọng - đáng chú ý nhất là trong lý thuyết mật mã. Khi chúng ta thực hiện mua bán trực tuyến và nhập mã thẻ thanh toán, số này được mã hóa bằng cách sử dụng số học theo modun các số nguyên tố, nó bị chi phối bởi các phương trình cũng rất giống với

phương trình ta đã xét trên kia (xem mô tả của thuật toán mã hóa RSA trong chú thích 7, chương 14 ở cuối sách).

Giờ ta hãy quay trở lại phương trình cubic:

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

mà chúng ta đã xét ở trên. Ta hãy tìm nghiệm của phương trình này theo modun p , với các số nguyên tố p khác nhau. Chẳng hạn, chúng ta đã thấy rằng phương trình trên có 4 nghiệm theo modun 5. Nhưng chú ý rằng các nghiệm theo modun $p = 5$ không nhất thiết phải là nghiệm theo modun các số nguyên tố khác (chẳng hạn $p = 7$, hay $p = 11$). Do vậy, những nghiệm này phụ thuộc vào số nguyên tố p mà theo modun p ta thực hiện các phép tính số học.

Câu hỏi đặt ra tiếp theo đó là: số các nghiệm của phương trình, theo modun p , phụ thuộc vào p như thế nào? Nếu p nhỏ, chúng ta có thể đếm chúng một cách tường minh (có lẽ, với sự trợ giúp của một chiếc máy tính nữa), do vậy chúng ta có thể biên soạn một bảng nho nhỏ.

Đã có đạo các nhà toán học biết rằng số nghiệm của một phương trình dạng này theo modun p khoảng chừng bằng với p . Ký hiệu “độ hụt”, tức hiệu số giữa số nghiệm thực sự của phương trình với số nghiệm trông đợi (tức là p), là a_p . Điều này có nghĩa là số nghiệm của phương trình trên theo modun p là $p - a_p$. Đối với một p đã cho, số a_p có thể âm hoặc dương. Chẳng hạn, ta đã thấy ở trên rằng với $p = 5$, thì có 4 nghiệm. Vì $4 = 5 - 1$, ta có $a_5 = 1$.

Ta có thể tìm số a_p với các số nguyên tố nhỏ nhờ một máy tính. Chúng trông có vẻ ngẫu nhiên. Dường như không có một công thức hay một quy tắc tự nhiên nào cho phép chúng ta tính được chúng. Tồi tệ hơn nữa, các tính toán nhanh chóng trở nên hết sức phức tạp.

Nhưng sẽ ra sao nếu tôi nói với bạn rằng thực ra có một quy tắc đơn giản sinh ra toàn bộ các số a_p ?

Trong trường hợp bạn vẫn còn băn khoăn tự hỏi tôi có ý gì khi nói đến một “quy tắc” phát sinh ra các con số kia, thì hãy thử quan sát một dãy số quen thuộc hơn, được biết đến dưới cái tên dãy Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Được đặt theo tên nhà toán học Ý, người đã giới thiệu nó trong cuốn sách được xuất bản năm 1202 (dựa trên một bài toán về sự giao phối của loài thỏ, lạ thật), các số Fibonacci xuất hiện phổ biến trong tự nhiên: từ sự sắp xếp cánh hoa cho tới các mắt trên thân của quả dứa. Chúng cũng có rất nhiều ứng dụng, như “thoái lui giá Fibonacci” trong những phân tích mang tính kỹ thuật của giao dịch chứng khoán.

Các số Fibonacci được định nghĩa như sau: 2 số đầu bằng 1. Mỗi số tiếp theo bằng tổng của 2 số Fibonacci đứng trước nó. Chẳng hạn $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, v.v. Nếu chúng ta ký hiệu số Fibonacci thứ n là F_n , thì ta có $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ và:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ với } n > 2.$$

Về nguyên tắc, quy tắc này cho phép chúng ta tìm được số Fibonacci thứ n , với n bất kỳ. Nhưng để làm được điều này, chúng ta phải tìm được tất cả các số Fibonacci F_i với i chạy từ 1 đến $n - 1$.

Tuy nhiên, hóa ra những con số này cũng có thể được phát sinh theo cách sau. Xét chuỗi:

$$q + q(q + q^2) + q(q + q^2)^2 + q(q + q^2)^3 + q(q + q^2)^4 + \dots$$

Mô tả bằng lời như sau: nhân một biến q bất kỳ với tổng của tất cả các lũy thừa của biểu thức $q + q^2$. Nếu phá ngoặc, ta sẽ thu được một chuỗi vô hạn, mà những số hạng đầu tiên của nó là:

$$q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 8q^6 + 13q^7 + \dots$$

Chẳng hạn, hãy tính tổng số hạng chứa q^3 . Nó chỉ có thể xuất hiện trong q , $q(q + q^2)$ và $q(q + q^2)^2$. (Thực tế, tất cả các biểu thức khác xuất hiện trong tổng ban đầu, ví dụ như $q(q + q^2)^3$, sẽ chỉ chứa lũy thừa của q với số mũ lớn hơn ba.) Số hạng đầu tiên trong chuỗi nói trên không chứa q^3 , và trong hai số hạng tiếp theo, mỗi số hạng chứa một q^3 . Tổng

cộng ta có $2q^3$. Tương tự như vậy chúng ta thu được các số hạng khác của chuỗi.

Phân tích các số hạng đầu tiên của chuỗi này, ta thấy rằng với n nằm giữa 1 và 7, các hệ số của q^n là số Fibonacci thứ n tức F_n . Chẳng hạn, chúng ta có số hạng $13q^7$ và $F_7 = 13$. Hóa ra điều này cũng đúng với mọi n . Vì lý do đó, các nhà toán học gọi chuỗi vô hạn trên là *hàm sinh* của dãy Fibonacci.

Hàm số đáng chú ý này có thể được sử dụng để đưa ra một công thức hiệu quả cho việc tính số Fibonacci thứ n mà không phải dựa trên các số Fibonacci đứng trước nó.^[52] Nhưng thậm chí khi gạt khía cạnh tính toán sang một bên, hàm sinh này còn có thêm một giá trị đáng kể khác: thay vì đưa ra một thủ tục truy hồi phụ thuộc vào các số hạng khác trong dãy, hàm sinh cho phép thấy được tất cả các số Fibonacci cùng một lúc.

Bây giờ hãy cùng quay trở lại với số a_p đếm số nghiệm của phương trình cubic theo modun các số nguyên tố. Hãy nghĩ về các số này tương tự như các số Fibonacci (bỏ qua thực tế rằng các số a_p được đánh số theo các số nguyên tố p còn F_n thì được đánh số bằng tất cả các số tự nhiên n).

Thật khó để tin rằng cũng có một quy tắc sinh ra tất cả các số này. Thế nhưng nhà toán học người Đức Martin Eichler đã khám phá ra một quy tắc như thế vào năm 1954.^[53] Cụ thể, xét hàm sinh sau:

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2\ldots$$

Diễn đạt bằng lời thì đây là q nhân với tích của các nhân tử có dạng $(1-q^a)^2$ trong đó a có dạng n và $11n$, với $n = 1, 2, 3, \dots$. Sử dụng các hằng đẳng thức:

$$(1-q)^2 = 1 - 2q + q^2, (1-q^{11})^2 = 1 - 2q^{11} + q^{22}, \dots$$

rồi nhân các nhân tử này với nhau. Sau khi rút gọn và gộp các số hạng đồng dạng lại, ta sẽ thu được một tổng vô hạn, bắt đầu như sau:

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + \dots$$

và dấu ba chấm để chỉ các số hạng với số mũ của q lớn hơn 13. Mặc dù chuỗi này là vô hạn, nhưng mỗi hệ số của chuỗi lại rất xác định bởi vì nó được xác lập bởi một số hữu hạn các thừa số trong tích ở trên. Ta ký hiệu hệ số của q^m là b_m . Khi đó ta có các hệ số $b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = -1, b_4 = 2, b_5 = 1$, v.v. Có thể dễ dàng tính được các hệ số này bằng tay hoặc sử dụng một máy tính.

Hiếu biết sâu sắc đến kinh ngạc của Eichler đó là đối với mọi số nguyên tố p , hệ số a_p bằng b_p . Nói cách khác, $a_2 = b_2, a_5 = b_5, a_7 = b_7$, v.v

Chẳng hạn, hãy thử kiểm tra, xem kết quả này có đúng không khi $p = 5$. Trong trường hợp này, nhìn vào hàm sinh ta thấy rằng hệ số của q^5 là $b_5 = 1$. Mặt khác, ở trên ta đã thấy rằng phương trình cubic của ta có bốn nghiệm theo modun $p = 5$. Bởi vậy $a_5 = 5 - 4 = 1$, và do vậy $a_5 = b_5$.

Chúng ta đã bắt đầu với một bài toán nhìn có vẻ như cực kỳ phức tạp: đó là đếm số nghiệm của phương trình cubic,

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

theo modun p , với mọi số nguyên tố p . Nhưng rồi, tất cả các thông tin về bài toán này được chứa chỉ trong một dòng:

$$q(1 - q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2(1 - q^{33})^2(1 - q^4)^2(1 - q^{44})^2 \dots$$

Dòng duy nhất này là một mã bí mật chứa toàn bộ thông tin về số các nghiệm của phương trình cubic theo modun tất cả các số nguyên tố.

Một sự tương tự hữu ích khác, đó là coi các phương trình cubic như một cơ quan sinh học phức tạp, và các nghiệm của nó như những đặc điểm khác nhau của cơ quan này. Chúng ta biết rằng tất cả những

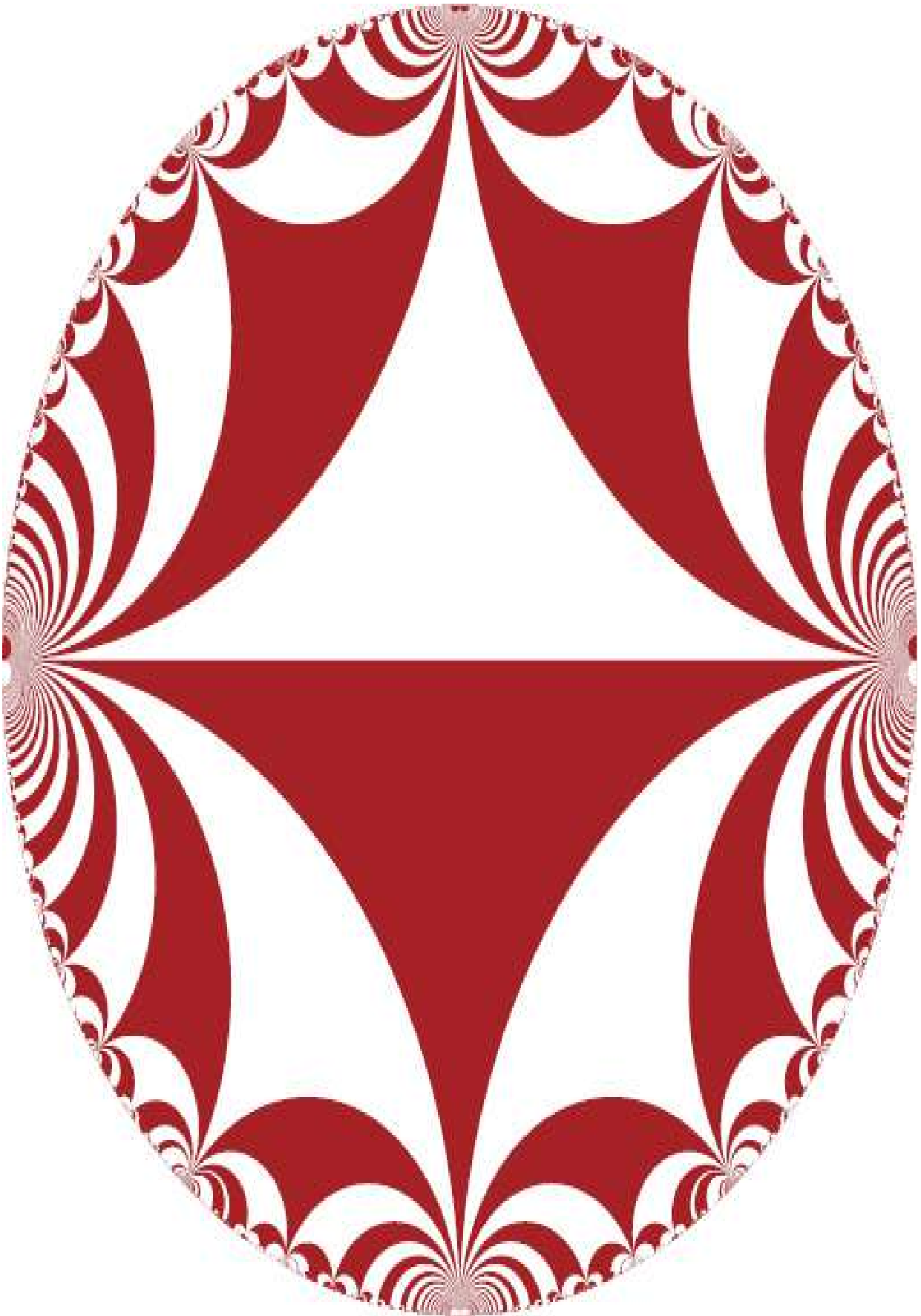
đặc điểm đó được mã hóa trong phân tử ADN. Giống như vậy, toàn bộ sự phức tạp của phương trình cubic hóa ra lại được mã hóa trong một hàm sinh, hàm này có thể coi như là ADN của phương trình. Hơn nữa, hàm này được xác định bởi một quy tắc đơn giản.

Điều thậm chí còn thú vị hơn đó là nếu q là một số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1, thì tổng vô hạn trên sẽ hội tụ về một số xác định. Như vậy, ta sẽ nhận được một hàm số theo biến q , và hàm này hóa ra lại có một tính chất đặc biệt tương tự với tính chất tuần hoàn của các hàm lượng giác $\sin$ và $\cos$ quen thuộc.

Hàm số $\sin(x)$, là tuần hoàn với chu kỳ 2π , tức là $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. Nhưng lúc đó cũng có $\sin(x+4\pi) = \sin(x)$ và tổng quát hơn $\sin(x+2\pi n) = \sin(x)$ với n là số nguyên bất kỳ. Có thể nghĩ về tính chất này như sau: mỗi số nguyên n tạo thành một đối xứng của đường thẳng x : mỗi điểm x trên đường thẳng đó được dịch tới điểm $x + 2\pi n$. Bởi vậy, nhóm tất cả các số nguyên được thực hiện như là một nhóm đối xứng của đường thẳng. Tính tuần hoàn của hàm $\sin$ nghĩa là hàm này có tính bất biến đối với nhóm đó.

Cũng giống như thế, hàm sinh Eichler theo biến q nói tới ở trên hóa ra cũng bất biến đối với một nhóm đối xứng nào đó. Ở đây ta sẽ coi q là một số phức chứ không phải là một số thực (chúng ta sẽ thảo luận về chủ đề này trong chương sau). Khi đó ta có thể coi q không phải là một điểm trên một đường thẳng, như trong trường hợp của hàm $\sin$, mà là một điểm trong đĩa đơn vị trên mặt phẳng phức. Tính chất đối xứng cũng tương tự như vậy: trên đĩa này, có một nhóm đối xứng và hàm sinh của chúng ta là bất biến đối với nhóm này.^[54] Một hàm sinh với tính chất bất biến như thế được gọi là một dạng *modular*.

Nhóm đối xứng này của đĩa có nhiều đặc điểm phong phú. Để có một ý niệm về điều này, hãy cùng quan sát hình sau, trên đó đĩa được chia thành vô hạn các hình tam giác.^[55]



Đối xứng tác động lên đĩa bằng cách hoán đổi các tam giác đó. Thực tế, với hai tam giác bất kỳ, có một đối xứng hoán đổi chúng. Mặc dù những đối xứng này của đĩa khá phức tạp, nhưng nó cũng tương tự như cách mà nhóm các số nguyên tác động lên đường thẳng, những đối xứng của nó di chuyển giữa các khoảng $[2\pi n, 2\pi (n+1)]$. Hàm sin là bất biến dưới tác động của những đối xứng ấy, trong khi hàm sinh Eichler là bất biến dưới tác động của những đối xứng của đĩa.

Như tôi đã đề cập ở phần đầu của chương này, hàm sin là ví dụ đơn giản nhất của một “họa âm” (sóng cơ bản) được sử dụng trong giải tích điều hòa trên đường thẳng. Tương tự như vậy, hàm sinh Eichler, cùng với các dạng modular, là các họa âm xuất hiện trong giải tích điều hòa của đĩa đơn vị.

Khả năng nhận biết sâu sắc tuyệt vời của Eichler thể hiện ở chỗ ông nhìn thấy được số nghiệm tương như ngẫu nhiên của một phương trình cubic theo modun các số nguyên tố lại bắt nguồn từ một hàm sinh duy nhất, tuân theo một đối xứng tinh tế - hé lộ sự hài hòa và trật tự ẩn giấu trong những con số đó. Tương tự, như có phép thần, Chương trình Langlands đã sắp xếp các thông tin mà trước đây không thể tiếp cận được thành các hình mẫu có quy luật, dệt nên một tấm thảm tao nhã từ các con số, những đối xứng và các phương trình.

Khi mới giới thiệu về toán học ở đầu cuốn sách này, tôi có nói một kết quả toán học thật “đẹp đẽ” và “tao nhã”, bạn có thể đã băn khoăn tự hỏi, tôi nói như thế là có ý gì. Đây chính là điều mà tôi muốn nói. Thực tế những khái niệm mang tính trừu tượng cao đó hợp lại thành một sự hài hòa tinh tế như thế này quả là điều cực kỳ đáng kinh ngạc. Nó hướng ta tới cái gì đó phong phú và huyền bí đang bị che phủ, và nếu bức màn được vén lên thì chúng ta có thể nắm bắt được những chớp sáng ngắn ngủi của thực tại vốn giấu kín với chúng ta. Đó là các kỳ quan của toán học hiện đại, và của cả thế giới hiện đại nữa.

Người ta cũng có thể hỏi rằng, ngoài việc sở hữu vẻ đẹp bẩm sinh và xác lập các mối liên kết đáng kinh ngạc giữa các lĩnh vực toán học

tưởng chừng như rất xa nhau, kết quả này liệu có những ứng dụng thực tiễn gì không. Đây quả là một câu hỏi hay. Ở thời điểm hiện tại thì tôi cũng chưa biết là có ứng dụng nào cả. Nhưng các phương trình cubic trên trường hữu hạn với p phần tử thuộc loại mà ta xét ở trên (thứ làm khởi sinh các đường cong elliptic) được sử dụng rộng rãi trong lý thuyết mật mã.^[56] Do vậy tôi sẽ không quá ngạc nhiên nếu một ngày nào đó, các kết quả tương tự như của Eichler sẽ tìm được những ứng dụng cũng mạnh mẽ và rộng khắp như các thuật toán mã hóa.

Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là một sự tổng quát hóa kết quả của Eichler. Nó phát biểu rằng đối với một phương trình cubic bất kỳ, giống như phương trình cubic ở trên (có thể chỉ phụ thuộc vào một số ít các điều kiện nào đó), số nghiệm theo modun các số nguyên tố là các hệ số của một dạng modular. Hơn nữa, có một tương ứng 1-1 giữa các phương trình cubic này và các dạng modular thuộc một loại nào đó.

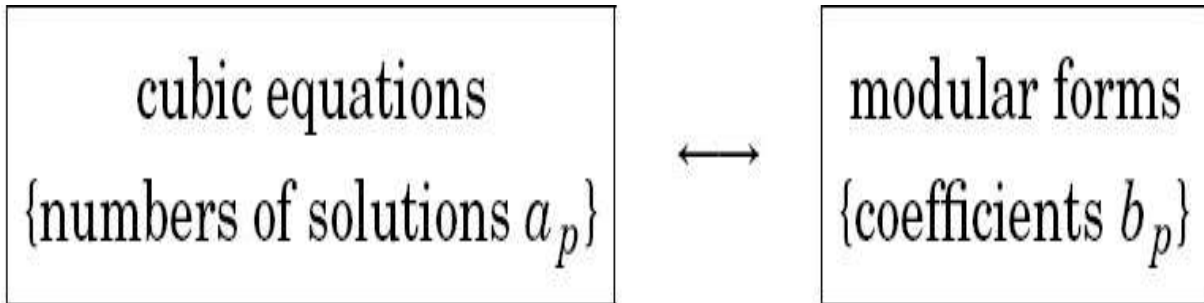
Nhưng tương ứng 1-1 mà tôi nói tới ở đây có ý nghĩa gì? Giả sử rằng chúng ta có năm cái bút bi và năm cái bút chì. Chúng ta có thể gán một cái bút chì cho một cái bút bi sao cho mỗi bút chì chỉ có thể được gán cho một và chỉ một bút bi mà thôi. Đó gọi là tương ứng 1-1.

Có rất nhiều cách để làm điều đó. Nhưng giả sử rằng trong tương ứng 1-1 của chúng ta, mỗi chiếc bút bi có chiều dài chính xác bằng chiều dài chiếc bút chì mà ta gán cho nó. Khi ấy ta sẽ gọi chiều dài là một “bất biến” và nói rằng tương ứng của chúng ta bảo toàn bất biến này. Nếu tất cả các bút bi có chiều dài khác nhau, thì tương ứng 1-1 này sẽ được xác định một cách duy nhất nhờ tính chất này.

Bây giờ, trong trường hợp giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil, ở một bên thì đối tượng là các phương trình cubic như nói ở trên. Đó là những chiếc bút bi của ta, và đối với mỗi phương trình như vậy, số a_p sẽ là bất biến gắn với nó. (Nó cũng giống như chiều dài của một chiếc bút bi, chỉ khác là bây giờ không còn có một bất biến, mà là toàn bộ tập hợp được đánh số bởi các số nguyên tố p .)

Đối tượng ở bên kia của tương ứng 1-1 là các dạng modular. Đó là các bút chì của chúng ta, và với mỗi dạng modular như thế, các hệ số b_p sẽ là bất biến gắn với nó (giống như chiều dài của chiếc bút chì).

Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil nói rằng có một tương ứng 1-1 giữa các đối tượng này và bảo toàn những bất biến của chúng.



Các phương trình cubic (số nghiệm là)

Các dạng modular (các hệ số

Tức là, với mỗi phương trình cubic, tồn tại một dạng modular sao cho $b_p = a_p$ với mọi số nguyên tố p và ngược lại.^[57]

Bây giờ tôi có thể giải thích mối liên hệ giữa giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil và Định lý cuối cùng của Fermat: xuất phát từ một nghiệm của phương trình Fermat, chúng ta có thể lập được một phương trình cubic nào đó^[58]. Tuy nhiên, Ken Ribet đã chứng minh được rằng số các nghiệm của phương trình cubic theo modun các số nguyên tố không thể là các hệ số của một dạng modular tạo ra bởi giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil. Do vậy, một khi giả thuyết này được chứng minh, chúng ta có thể kết luận rằng một phương trình cubic như thế không thể tồn tại. Bởi vậy, phương trình Fermat là vô nghiệm.

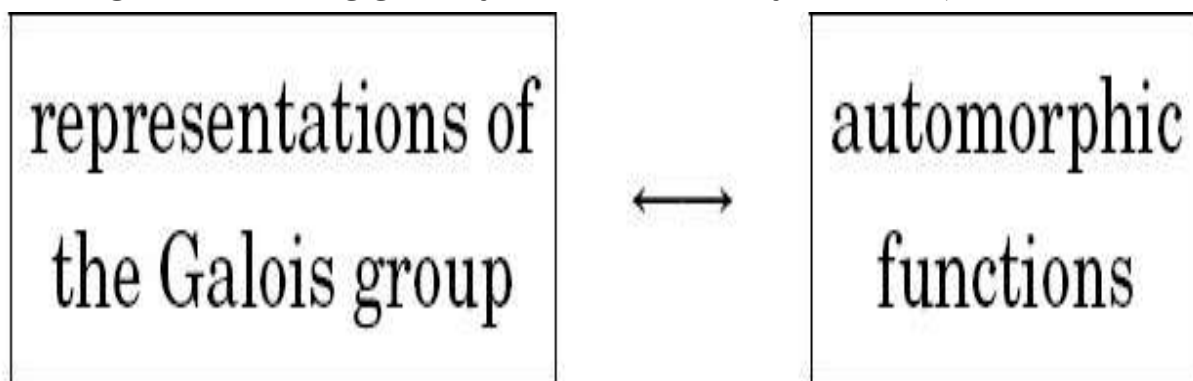
Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil là một kết quả gây choáng váng bởi vì các số a_p xuất hiện từ việc nghiên cứu các nghiệm của một phương trình theo modun các số nguyên tố - chúng thuộc thế giới của lý thuyết số - còn các số b_p lại là các hệ số của một dạng modular, thuộc

thế giới của giải tích điều hòa. Hai thế giới tưởng chừng như cách nhau nhiều năm ánh sáng, nhưng hóa ra chúng lại mô tả cùng một thứ!

Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil có thể viết lại như một trường hợp đặc biệt của Chương trình Langlands. Để làm điều đó, chúng ta thay mỗi phương trình cubic xuất hiện trong giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil bằng một biểu diễn hai chiều cụ thể của nhóm Galois. Biểu diễn này nhận được một cách tự nhiên từ phương trình cubic đang xét, và các số a_p có thể được gắn trực tiếp cho biểu diễn này (chứ không phải cho phương trình cubic nữa). Bởi vậy, giả thuyết này có thể được phát biểu như một mối liên hệ giữa các biểu diễn hai chiều của nhóm Galois và các dạng modular.

(Tôi xin nhắc lại một chút thông tin từ chương 2 rằng, một biểu diễn hai chiều của một nhóm là quy tắc gán một đối xứng của không gian hai chiều (tức là mặt phẳng) cho mỗi phần tử của nhóm đó. Chẳng hạn, trong chương 2, chúng ta đã nói về một biểu diễn hai chiều của nhóm đường tròn.)

Một cách tổng quát hơn, các giả thuyết của Chương trình Langlands thậm chí còn kết nối, một cách đầy bất ngờ và sâu sắc, những biểu diễn n -chiều của nhóm Galois (là tổng quát hóa các biểu diễn hai chiều tương ứng với các phương trình cubic trong giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil) với các hàm tự đẳng cấu (là tổng quát hóa các dạng modular trong giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil):



Các biểu diễn của nhóm Galois

Các hàm tự đẳng cấu

Tuy hầu hết mọi người tin rằng những giả thuyết này là đúng, nhưng tính đến nay, hầu hết chúng vẫn chưa được chứng minh, mặc dù vài thế hệ các nhà toán học: đã mất rất nhiều tâm huyết để chứng minh giả thuyết này trong suốt bốn mươi lăm năm qua.

Bạn có thể thắc mắc: ban đầu làm sao mà người ta lại nghĩ ra những giả thuyết kiểu như thế?

Đây thực sự là một câu hỏi về bản chất của nhận thức toán học. Có được khả năng nhìn thấy những hình mẫu và những kết nối mà trước đó chưa ai từng thấy là điều không hề dễ dàng. Nó thường là sản phẩm của nhiều tháng, nếu không muốn nói là nhiều năm trời lao động miệt mài. Từng chút, từng chút một, những ý niệm mơ hồ về một hiện tượng hay một lý thuyết đột sinh, và thoát đầu có lẽ chính bạn cũng không tin vào điều đó. Nhưng rồi bạn nói: “Thế nếu nó đúng thì sao?” Bạn sẽ thử kiểm tra ý tưởng đó bằng cách thực hiện một số tính toán thăm dò. Đôi khi những tính toán này là rất khó nhọc, và bạn phải vượt qua hàng núi các công thức nặng nề. Xác suất mắc phải sai lầm là rất cao, và nếu ban đầu không thành công, bạn sẽ phải làm lại, rồi cứ mãi như thế.

Thường thường, vào cuối ngày (hoặc tháng, hoặc năm), bạn nhận ra rằng ý tưởng ban đầu của mình là sai, và bạn phải thử làm thứ gì đó khác. Đó là những thời khắc thất bại và tuyệt vọng. Bạn cảm thấy mình đã phí phạm vô khối thời gian, để rồi chẳng gặt hái được gì cả. Thật khó để nuốt trôi cảm xúc ấy. Nhưng bạn không bao giờ được từ bỏ. Bạn sẽ phải bắt đầu lại từ đầu, phân tích nhiều dữ liệu hơn, học hỏi từ chính những sai lầm trước đó, và rồi cố khởi đầu với một ý tưởng tốt hơn. Và rồi thi thoảng, đột nhiên, ý tưởng của bạn bắt đầu được khai triển. Nó giống như là khi đang trải qua một ngày lướt sóng thất bại, đột nhiên bạn bắt được một con sóng, bạn sẽ cố gắng theo nó, và lướt đi càng lâu càng tốt. Ở những thời điểm như thế, bạn phải để cho trí tưởng tượng

của mình được tự do cũng như để cho con sóng đưa bạn đi xa nhất có thể. Thậm chí nếu ý tưởng ban đầu nghe có vẻ hoàn toàn điên rồ đi nữa.

Phát biểu của giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil ban đầu nghe chắc cũng rất điên rồ đối với cả những người đã sáng tạo ra nó. Mà làm sao lại không thể được? Đúng thế, giả thuyết này bắt nguồn từ những kết quả trước đó, giống như những kết quả của Eichler mà ta thảo luận ở trên (sau này nó được Shimura tổng quát hóa). Nó chỉ ra rằng đối với *một số* các phương trình cubic, số các nghiệm theo modun p được ghi trong các hệ số của một dạng modular. Nhưng ý tưởng cho rằng điều này cũng đúng đối với *bất kỳ* phương trình cubic nào thì lúc đó nghe có vẻ thật điên rồ. Đây là một bước nhảy của niềm tin, nó lần đầu tiên được nhà toán học Nhật Bản Yutaka Taniyama đưa ra, dưới dạng một câu hỏi, tại Hội nghị quốc tế về Lý thuyết số Đại số tổ chức ở Tokyo tháng 9 năm 1955.

Tôi vẫn luôn băn khoăn, điều gì mang lại cho ông *niềm tin* rằng ý tưởng ấy không phải là sự điên rồ mà là sự thực? Để đừng cảm nói ra điều đó một cách công khai?

Chúng ta không bao giờ biết được. Thật không may, không lâu sau khám phá vĩ đại của mình, vào tháng 11 năm 1958, Taniyama đã tự tử. Ông mới chỉ ba mươi một tuổi. Nhưng bi kịch chưa dừng lại ở đó, ít lâu sau, người phụ nữ mà ông dự định cưới làm vợ cũng tự sát, trần trối lại mấy dòng sau:^[59]

Chúng tôi đã hứa với nhau rằng cho dù có ở nơi đâu, chúng tôi cũng không bao giờ xa nhau. Bây giờ anh ấy đã ra đi, tôi cũng phải đến với anh ấy.

Giả thuyết này sau đó được phát biểu chính xác hơn bởi một người bạn và cũng là đồng nghiệp của Taniyama, Goro Shimura, một nhà toán học Nhật Bản khác. Shimura đã dành hầu hết cuộc đời làm việc tại Đại học Princeton, và hiện tại đang là một giáo sư công huân ở đó. Ông có những đóng góp rất quan trọng cho toán học, rất nhiều trong số đó liên

quan trực tiếp đến Chương trình Langlands, và một vài khái niệm cơ bản trong lĩnh vực này mang tên ông (như là các “quan hệ đồng dư Eichler-Shimura” hay “đa tạp Shimura”).

Trong bài viết đầy ưu tư về Taniyama, Shimura đã đưa ra một bình luận gây ấn tượng sâu sắc:^[60]

Mặc dù không thuộc tip người cầu thả, nhưng anh ấy lại được trời phú cho năng khiếu đặc biệt là phạm nhiều sai lầm, mà hầu hết lại theo đúng hướng. Tôi thấy ghen tị với anh ấy về điều đó, và cố gắng bắt chước anh ấy trong vô vọng, để rồi phát hiện ra rằng phạm những sai lầm tốt cũng là điều rất khó.

Theo lời của Shimura, thì Taniyama “đã thiếu cẩn trọng khi phát biểu bài toán của mình” tại Hội nghị ở Tokyo tháng 9 năm 1955.^[61] Cần phải có thêm một số hiệu chỉnh. Thế nhưng, đó lại là một nhận thức sâu sắc mang tính cách mạng, mở ra một trong những thành tựu quan trọng nhất của toán học thế kỷ 20.

Người thứ ba có tên được gắn với giả thuyết này là André Weil, người mà tôi đã nhắc tới. Ông là một trong số những người khổng lồ trong thế giới toán học ở thế kỷ 20. Sinh ra ở Pháp và đến Mỹ trong những năm xảy ra Chiến tranh Thế giới lần thứ hai, Weil nổi tiếng nhờ trí tuệ lỗi lạc và cá tính của mình. Sau khi giữ một số chức vụ về học thuật tại một số trường đại học ở Mỹ, ông về viện Nghiên cứu cao cấp ở Princeton năm 1958 rồi công tác ở đó cho tới khi mất vào năm 1998, ở tuổi chín mươi hai.



André Weil, 1981. Ảnh chụp bởi Herman Landshoff. Trung tâm lưu trữ Shelby White và Leon Levy, Viện Nghiên cứu cao cấp Princeton.

Weil có liên quan đặc biệt với Chương trình Langlands, không chỉ bởi vì lá thư nổi tiếng được gửi cho ông - trong đó lần đầu tiên Robert Langlands phát biểu các ý tưởng của mình, hay bởi vì giả thuyết Taniyama-Shimura-Weil. Chương trình Langlands được hiểu thấu đáo

qua lăng kính của “bức tranh toàn thể” mà André Weil đã phác họa ra trong một bức thư gửi cho em gái. Chúng ta sẽ nói về bức thư ấy trong chương tiếp theo. Đó sẽ là bước đệm để đưa Chương trình Langlands vào địa hạt của hình học.

Chương 9

PHIẾN ĐÁ ROSETTA

Năm 1940, trong suốt thời gian xảy ra chiến tranh, André Weil bị cầm tù ở Pháp vì từ chối nhập ngũ. Trích cáo phó đăng trong tờ *The Economist* viết:^[62]

[Weil] đã bị tác động sâu sắc... trước sự tàn phá giáng xuống nền toán học Pháp do Chiến tranh Thế giới lần thứ nhất, khi “một quan niệm sai lầm về bình đẳng trong hoàn cảnh phải đối diện với sự hy sinh” dẫn tới việc giới trí thức tinh hoa trẻ của đất nước bị tàn sát. Với ấn tượng đó, ông tin rằng mình có nghĩa vụ, không phải chỉ đối với riêng bản thân ông, mà còn đối với cả nền văn minh, đó là cống hiến cả đời mình cho toán học. Thực vậy, ông lập luận rằng, sẽ là một tội ác nếu ông để mình rời xa toán học. Khi những người khác phản đối rằng “nhưng nếu ai cũng hành xử như ông cả thì..ông đáp lại rằng giả thiết đó quá vô lý đến nỗi ông không cảm thấy có nghĩa vụ phải tính đến nó.

Trong thời gian bị giam, Weil viết thư cho em gái Simone Weil, một nhà triết học và xã hội học nổi tiếng. Lá thư này là một tài liệu đáng chú ý: trong đó, bằng những thuật ngữ đơn giản (có thể hiểu được, thậm chí đối với một triết gia - à, tôi chỉ đùa chút thôi mà!) ông cố gắng giải thích “bức tranh toàn thể” của toán học mà ông đã nhìn thấy. Với việc giải thích như vậy, André Weil chính là một tấm gương lớn để tất cả các nhà toán học noi theo. Đôi khi tôi thường nói đùa rằng có lẽ chúng ta nên tống giam một vài nhà toán học đỉnh cao để ép họ mô tả những ý tưởng của mình bằng các thuật ngữ có thể hiểu được, như cách mà Weil đã làm.

Weil viết trong thư về vai trò của sự tương tự trong toán học, và ông đã minh họa điều đó bằng sự tương tự mà ông quan tâm nhất: đó là sự tương tự giữa lý thuyết số và hình học.

Sự tương tự này cực kỳ quan trọng đối với sự phát triển của Chương trình Langlands. Như chúng ta đã thảo luận ở trên, cội nguồn của Chương trình Langlands nằm ở lý thuyết số. Langlands phỏng đoán rằng những bài toán hóc búa trong lý thuyết số, chẳng hạn như là đếm số nghiệm của các phương trình theo modun các số nguyên tố, có thể giải được bằng cách sử dụng các phương pháp của giải tích điều hòa - hay cụ thể hơn, là qua nghiên cứu các hàm tự đẳng cấu. Điều này thật hấp dẫn: trước tiên, nó cung cấp cho ta một cách mới để giải những bài toán mà trước đây tưởng như không thể giải được. Thứ hai, nó chỉ ra những mối liên kết cơ bản và sâu sắc giữa những lĩnh vực khác nhau của toán học. Hẳn nhiên, chúng ta muốn biết điều gì đang thực sự diễn ra ở đây: tại sao lại có thể tồn tại những liên kết ẩn giấu đó? Và chúng ta vẫn còn chưa hoàn toàn hiểu hết về nó. Đến như giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil cũng mất rất nhiều thời gian mới có thể giải quyết được. Hơn nữa, nó mới chỉ là một trường hợp đặc biệt của những phỏng đoán Langlands tổng quát mà thôi. Có hàng trăm và hàng nghìn những mệnh đề tương tự vẫn chưa được chứng minh.

Vậy chúng ta nên tiếp cận những giả thuyết khó khăn đó như thế nào? Có một cách là phải làm việc miệt mài để cố gắng đưa ra được các ý tưởng và những nhận thức sâu sắc mới. Điều này vẫn đang tiếp diễn, và dẫn tới những tiến bộ quan trọng. Một khả năng khác là cố gắng mở rộng phạm vi của Chương trình Langlands. Vì nó chỉ ra một số cấu trúc cốt lõi trong lý thuyết số và giải tích điều hòa cùng với những kết nối giữa chúng, nên ta sẽ có cơ may tìm ra những cấu trúc và các mối liên kết tương tự giữa các lĩnh vực khác của toán học.

Hóa ra mọi chuyện thực sự đã diễn ra như thế. Dần dần người ta nhận ra rằng các hình mẫu bí ẩn lại có thể cùng được quan sát thấy trong những lĩnh vực khác của toán học, như hình học, và thậm chí cả

vật lý lượng tử nữa. Khi chúng ta học được điều gì đó về những hình mẫu này trong một lĩnh vực, chúng ta sẽ có được những gợi ý về ý nghĩa của chúng trong những lĩnh vực khác. Ở trên tôi đã viết rằng Chương trình Langlands là một Lý thuyết Thống nhất Lớn của toán học. Ý của tôi muốn nói ở đây là Chương trình Langlands chỉ ra một số hiện tượng phổ quát và những mối liên kết giữa những hiện tượng đó trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Và tôi tin rằng nó nắm giữ chìa khóa để thực sự hiểu được toán học là gì, vượt xa ra ngoài những giả thuyết ban đầu của Langlands.

Chương trình Langlands bây giờ là một chủ đề rất rộng lớn; Có một cộng đồng đông đảo những người làm việc về nó ở những lĩnh vực khác, nhau: lý thuyết số, giải tích điều hòa, hình học, lý thuyết biểu diễn, vật lý toán. Mặc dù làm việc với những đối tượng rất khác nhau, nhưng tất cả họ đều cùng quan sát những hiện tượng giống nhau. Và chúng lại cung cấp cho ta manh mối để hiểu các lĩnh vực khác nhau đó liên kết khăng khít-với nhau như thế nào, tựa như các mảnh của một câu đố xếp hình khổng lồ.

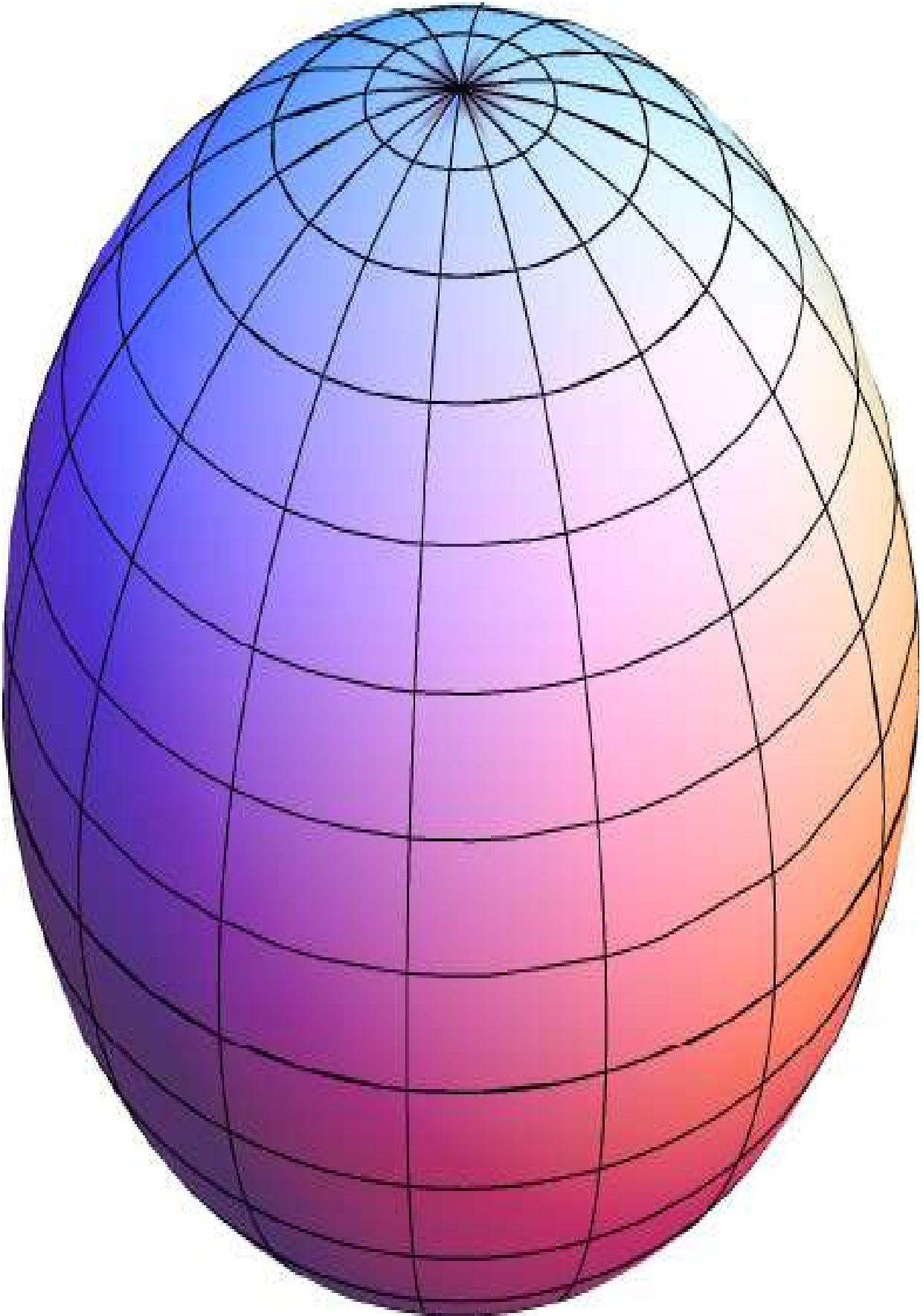
Điểm bước vào Chương trình Langland của tôi là qua công trình về các đại số Kac-Moody; sẽ được mô tả chi tiết trong những chương tiếp sau. Nhưng càng nghiên cứu về Chương trình này, tôi lại càng thấy phấn khích vì sự hiện diện khắp nơi của nó trong toán học.

Hãy nghĩ về những lĩnh vực khác nhau của toán học hiện đại như các ngôn ngữ. Từ những ngôn ngữ này chúng ta lấy ra các câu mang cùng một ý nghĩa. Đặt chúng cạnh nhau, rồi dần dà, chúng ta bắt đầu dựng nên một từ điển cho phép dịch từ lĩnh vực này sang các lĩnh vực khác của toán học. André Weil đã cho chúng ta một bộ khung thích hợp để hiểu về những mối liên kết giữa lý thuyết số và hình học, một kiểu “phiến đá Rosetta” của toán học hiện đại.

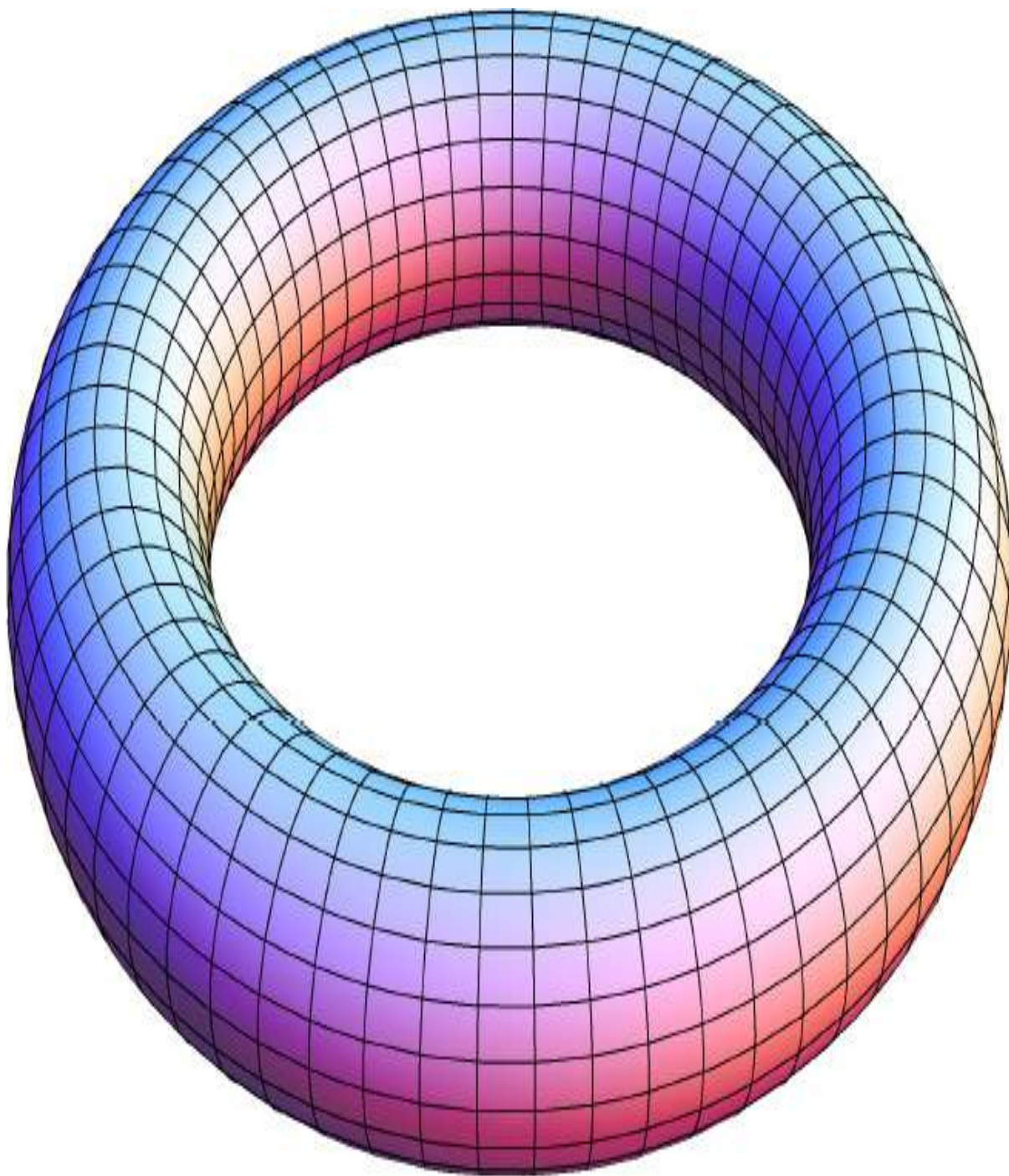
Một mặt, chúng ta có những đối tượng của lý thuyết số như các số hữu tỉ và những trường số khác đã thảo luận trong chương trước, như là

trường số thu được bằng cách gộp thêm $\sqrt{2}$ vào trường số hữu tỉ, và các nhóm Galois của chúng.

Mặt khác, chúng ta lại có cái được gọi là các diện Riemann. Mà ví dụ đơn giản nhất chính là mặt cầu.^[63]

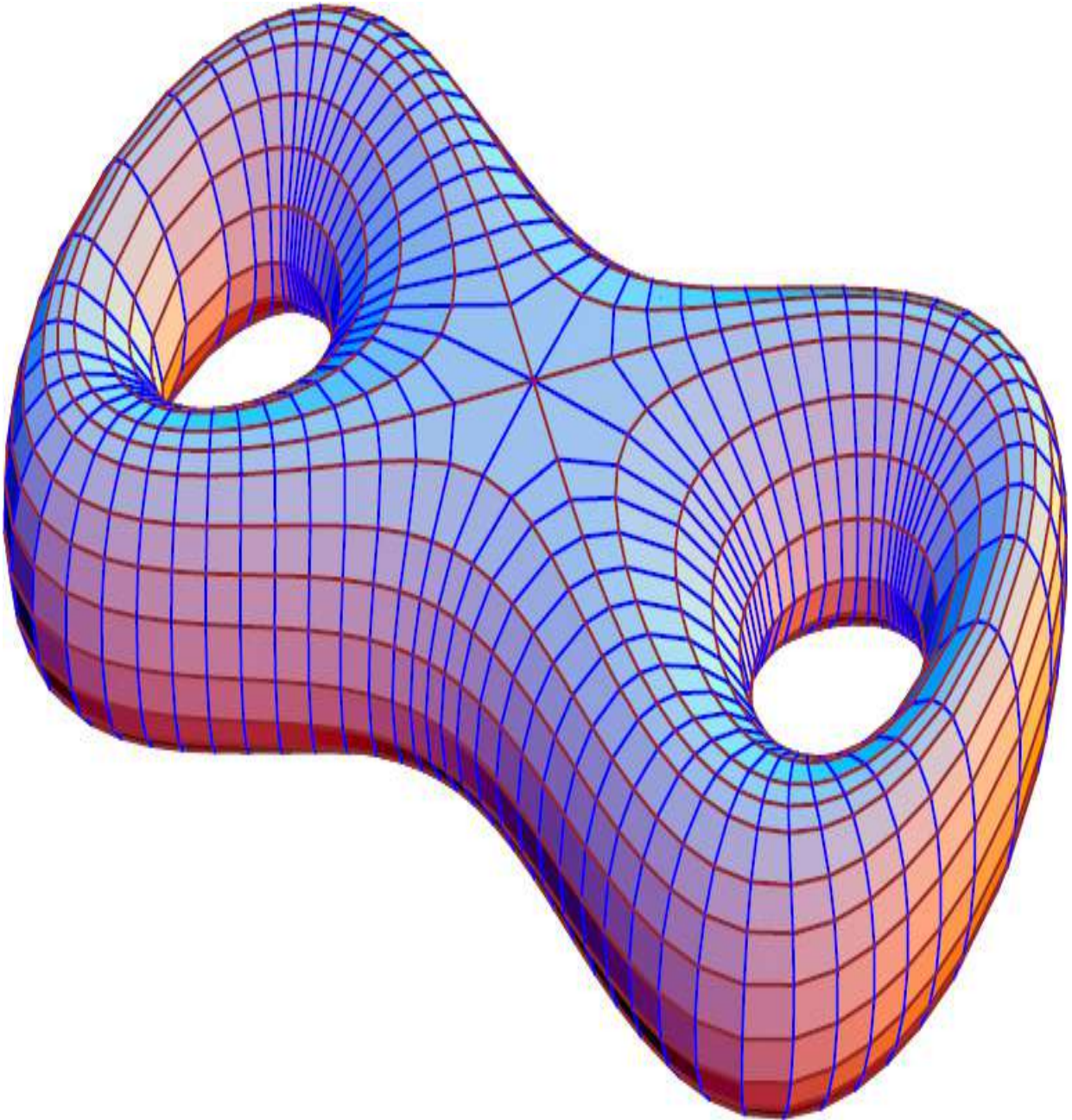


Ví dụ tiếp theo là mặt xoắn, chẳng hạn như bề mặt của một chiếc bánh donut (hình dạng giống với chiếc xăm xe). Tôi muốn nhấn mạnh rằng cái mà chúng ta đang xét ở đây là *bề mặt* của chiếc bánh, chứ không phải phần bên trong của nó.



Ví dụ kế tiếp là bề mặt của một chiếc bánh ngọt Đan Mạch, được vẽ ở hình dưới đây (hoặc bạn cũng có thể hình dung nó như bề mặt

chiếc bánh quy xoắn).



Mặt xuyên thì có một “lỗ”, còn chiếc bánh Đan Mạch thì có hai “lỗ”. Cũng có những mặt có n lỗ, với n bất kỳ bằng 3, 4, 5,... Các nhà toán học gọi số lượng các lỗ là *giống* của diện Riemann.^(*) Chúng được đặt tên theo nhà toán học Đức Bernhard Riemann sống ở thế kỷ 19. Công trình của ông đã mở ra một số hướng quan trọng trong toán học. Lý thuyết của Riemann về những không gian cong, mà ngày nay chúng ta gọi là hình học Riemann, có thể nói là hòn đá tảng cho thuyết tương

đối rộng của Einstein. Các phương trình của Einstein mô tả lực hấp dẫn thông qua thuật ngữ gọi là tensor Riemann biểu diễn độ cong của không-thời gian.

Thoạt nhìn, lý thuyết số chẳng có điểm gì chung với các diện Riemann cả. Tuy nhiên, hóa ra lại có rất nhiều sự tương tự giữa chúng. Điểm then chốt là ở chỗ còn có một lớp các đối tượng khác làm trung gian giữa hai đối tượng này.

Để thấy được điều đó, chúng ta phải nhận thức được rằng một diện Riemann có thể được mô tả bởi một phương trình đại số. Chẳng hạn, xét một phương trình cubic sau:

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

Như chúng ta đã lưu ý ở trên, khi nói về nghiệm của một phương trình dạng này, thì điểm quan trọng là phải chỉ rõ các nghiệm đó thuộc hệ thống số nào. Có rất nhiều lựa chọn, và những lựa chọn khác nhau đó dẫn đến những lý thuyết toán học khác nhau.

Trong chương trước, chúng ta đã thảo luận về các nghiệm theo modun các số nguyên tố và đó là một lý thuyết. Nhưng chúng ta cũng có thể tìm các nghiệm trong *trường số phức*. Đó lại là một lý thuyết khác, đưa ta đến với các diện Riemann.

Mọi người thường gán hầu hết những đặc điểm thần bí cho các số phức, cứ như chúng là những đối tượng hết sức phức tạp. Thực tế thì chúng không có gì phức tạp hơn những con số mà chúng ta đã thảo luận trong chương trước khi cố gắng mang lại ý nghĩa cho $\sqrt{2}$.

Hãy để tôi giải thích cho bạn. Ở chương trước, chúng ta đã gộp thêm vào tập số hữu tỉ hai nghiệm của phương trình $x^2 = 2$, mà chúng ta ký hiệu là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Bây giờ, thay vì xét phương trình $x^2 = 2$, chúng ta xét phương trình $x^2 = -1$. Nó trông có phức tạp, hơn phương trình kia không? Không hề. Nó không có nghiệm trong tập số hữu tỉ, nhưng chúng ta không phải e ngại điều này. Hãy gộp thêm hai nghiệm của

phương trình này vào tập các số hữu tỉ. Ký hiệu hai nghiệm này là $\sqrt{-1}$ và $-\sqrt{-1}$. Chúng là nghiệm của phương trình $x^2 = -1$, tức là:

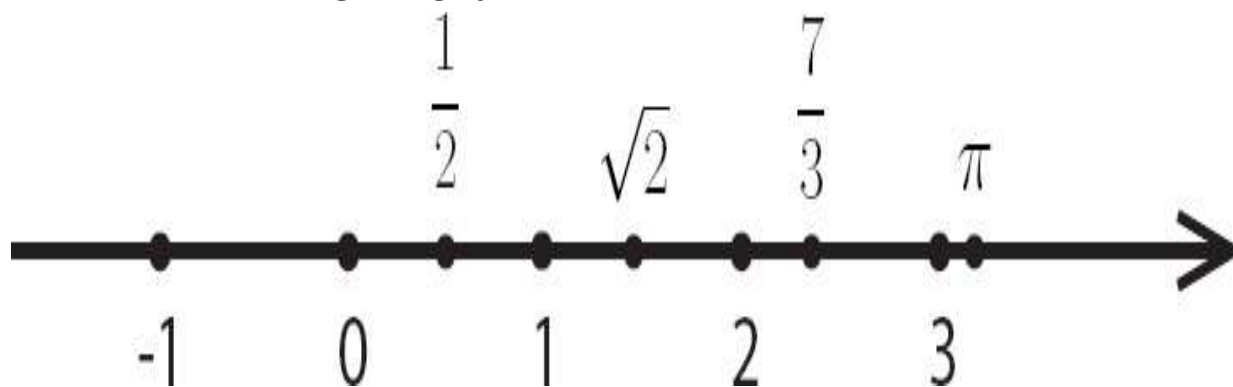
$$(\sqrt{-1})^2 = -1, (-\sqrt{-1})^2 = -1$$

Chỉ có đôi chút khác biệt với trường hợp trước. Số $\sqrt{2}$ thì không phải là số hữu tỉ, mà là một số *thực*, do đó khi gộp nó vào tập các số hữu tỉ, chúng ta không bước ra khỏi địa hạt của các số thực.

Ta có thể nghĩ về các số thực theo nghĩa hình học như sau. Vẽ một đường thẳng và đánh dấu trên đó hai điểm biểu diễn hai số 0 và 1. Sau đó đánh dấu một điểm ở bên phải của 1 mà khoảng cách từ đó tới 1 cũng bằng khoảng cách giữa 1 và 0. Điểm này sẽ biểu diễn số 2. Chúng ta biểu diễn tất cả các số nguyên khác theo cách tương tự. Tiếp theo, ta đánh dấu các số hữu tỉ bằng cách chia nhỏ khoảng giữa các điểm biểu diễn các số nguyên. Chẳng hạn, số 1

2 thì nằm chính giữa 0 và 1; số 7

3 thì nằm ở vị trí bằng một phần ba khoảng cách từ 2 đến 3, v.v. Và bây giờ, một cách trực quan, các số thực sẽ tương ứng 1-1 với tất cả các điểm trên đường thẳng ấy.^[64]



Cần nhắc lại rằng chúng ta đã biết số $\sqrt{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông với các cạnh góc vuông bằng 1. Do vậy, chúng ta đánh dấu $\sqrt{2}$ trên đường thẳng các số thực bằng cách tìm một điểm nằm bên phải số 0 mà khoảng cách đến 0 bằng với độ dài của cạnh huyền kia. Cũng như thế, chúng ta có thể đánh dấu trên đường thẳng này số π ^[65], chính là chu vi của một đường tròn với đường kính là 1.

Trái lại, phương trình $x^2 = -1$ thì không có nghiệm hữu tỉ, và cũng không có nghiệm thực. Thật vậy, bình phương của số thực nào cũng phải là số dương hoặc 0, và do đó không thể bằng -1 được. Như vậy, không giống như $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$, hai số $\sqrt{-1}$ và $-\sqrt{-1}$ không phải là các số thực. Vậy ta sẽ làm gì bây giờ? Chúng ta sẽ làm theo đúng thủ tục trước bằng cách đưa chúng vào hệ thống số hết như chúng ta đã làm với $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Và chúng ta cũng sẽ sử dụng đúng những quy tắc trước để thực hiện những phép tính số học đối với những số mới này.

Xin nhắc lại những lập luận trước đây: ta thấy rằng phương trình $x^2 = 2$ không có nghiệm hữu tỉ. Do đó ta đặt ra hai nghiệm của phương trình này, gọi chúng là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$, rồi gộp chúng vào tập số hữu tỉ, và bằng cách đó ta đã tạo ra một hệ thống số mới (mà sau này chúng ta gọi là một trường số). Cũng tương tự như thế, xét phương trình $x^2 = -1$, ta thấy rằng chúng cũng không có nghiệm hữu tỉ. Do đó chúng ta *tạo ra* hai nghiệm của phương trình này, ký hiệu chúng là $\sqrt{-1}$ và $-\sqrt{-1}$, rồi gộp chúng vào tập các số hữu tỉ. Nghĩa là theo đúng thủ tục trước! Vậy thì lẽ nào ta lại nghĩ hệ thống số mới này phức tạp hơn hệ thống số cũ của chúng ta, hệ thống chứa $\sqrt{2}$?

Lý do ở đây mang tính thuần túy tâm lý: trong khi chúng ta có thể biểu diễn $\sqrt{2}$ như chiều dài cạnh của một tam giác vuông, thì chúng ta lại không có một biểu diễn hình học hiển nhiên như thế cho $\sqrt{-1}$. Nhưng về mặt đại số, chúng ta hoàn toàn có thể thao tác với $\sqrt{-1}$ cũng chẳng khác gì với $\sqrt{2}$.

Các phần tử của hệ thống số mới mà ta thu được bằng cách gộp thêm $\sqrt{-1}$ vào tập các số hữu tỉ được gọi là các số phức. Mỗi số này có thể được viết dưới dạng:

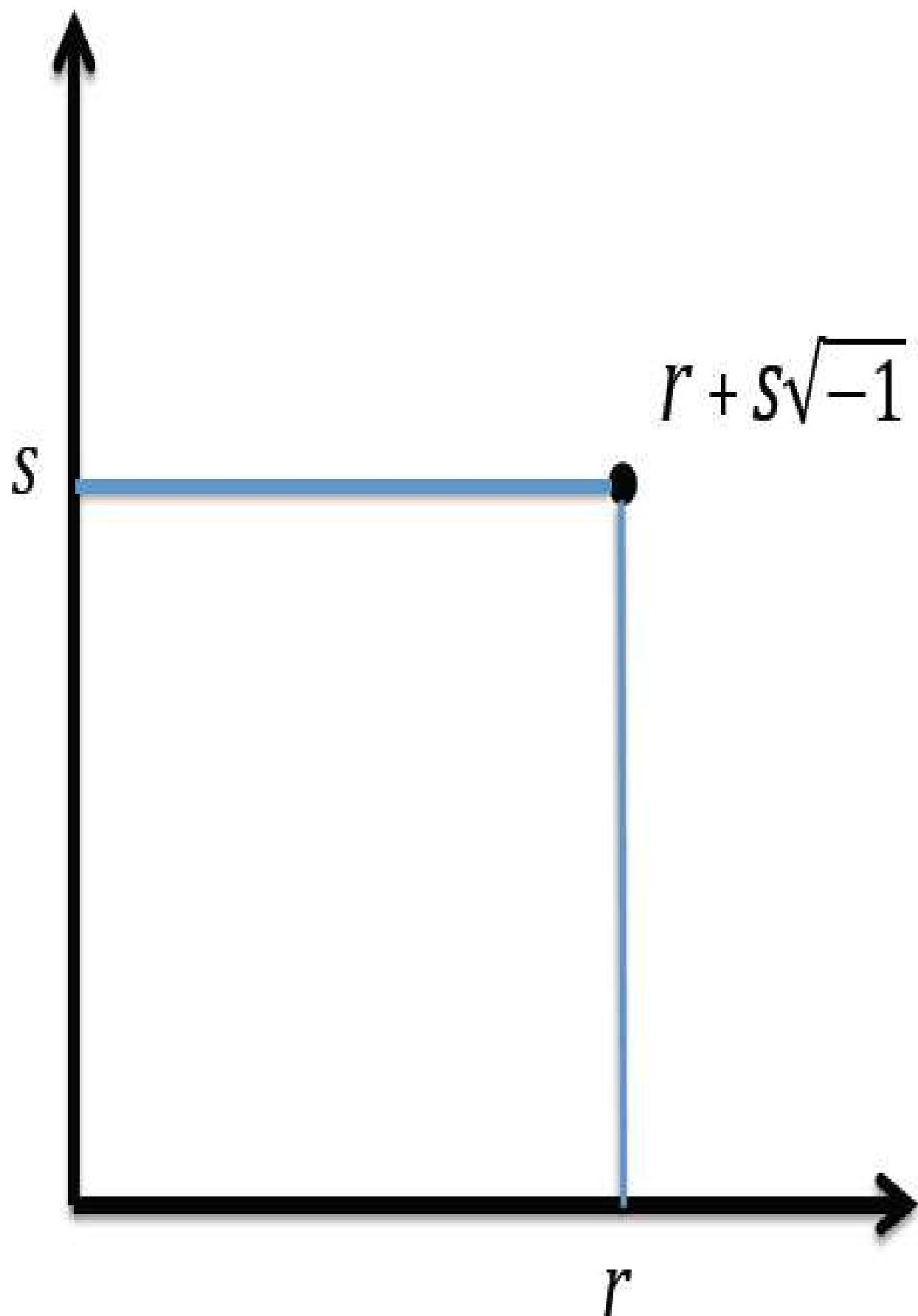
$$r + s\sqrt{-1}$$

với r và s ở đây là các số hữu tỉ. Hãy so sánh công thức này với công thức ở trang 104 biểu diễn các phần tử tổng quát của hệ thống các số thu được bằng cách gộp thêm $\sqrt{2}$ vào. Ta có thể cộng hai số bất kỳ có dạng này, bằng cách cộng riêng rẽ các phần r và phần s của chúng.

Ta cũng có thể nhân hai số bất kỳ bằng cách phá ngoặc và sử dụng tính chất $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$. Tương tự, ta cũng có thể trừ và chia các số này.

Cuối cùng, chúng ta mở rộng định nghĩa của các số phức bằng cách cho phép r và s trong công thức trên là các số thực tùy ý (chứ không chỉ là các số hữu tỉ). Khi đó ta sẽ thu được tập các số phức tổng quát nhất. Lưu ý rằng người ta thường ký hiệu $\sqrt{-1}$ là i (chữ cái đầu tiên của chữ imaginary (ảo) trong tiếng Anh), nhưng tôi chọn không làm như vậy nhằm nhấn mạnh ý nghĩa đại số của số này: nó thực sự chỉ là căn bậc hai của -1 , không hơn không kém. Nó cũng cụ thể như $\sqrt{2}$ vậy. Không có gì là huyền bí về nó cả.

Ta có thể có được một cảm nhận cụ thể về các số này bằng cách biểu diễn chúng bằng hình học. Giống như các số thực có thể được biểu diễn bằng hình học bởi các điểm trên một đường thẳng, các số phức cũng có thể biểu diễn như là các điểm trên một mặt phẳng. Tức là, chúng ta biểu diễn số phức $r + s\sqrt{-1}$ như là một điểm trên mặt phẳng với tọa độ r và s .^[66]



Bây giờ hãy quay lại phương trình cubic:

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

và tìm các nghiệm x, y của nó là số phức.

Một thực tế đáng chú ý là tập tất cả các nghiệm như thế hóa ra lại là chính xác tập các điểm của một mặt xuyên đã được vẽ trước đây. Nói cách khác, mỗi điểm trên mặt xuyên có thể được gán cho một và chỉ một cặp số phức x, y là nghiệm của phương trình cubic ở trên, và ngược lại.^[67]

Nếu trước đây bạn chưa bao giờ nghĩ về các số phức, thì bạn có thể cảm thấy đau đầu ngay từ bây giờ đấy. Điều này cũng là hoàn toàn tự nhiên thôi. Bắt ai đó hiểu một số phức đơn lẻ thì cũng khó rồi, chứ đừng nói gì đến một cặp số phức là nghiệm của một phương trình nào đó. Việc các cặp số này lại tương ứng 1-1 với các điểm trên bề mặt của một hình xuyên là điều hoàn toàn không hiển nhiên chút nào, do đó đừng quá lo lắng khi bạn không hiểu ngay được tại sao lại như thế. Thực tế, rất nhiều nhà toán học chuyên nghiệp cũng sẽ gặp rất nhiều khó khăn để chứng minh kết quả đáng ngạc nhiên và không hề hiển nhiên này.^[68]

Để tin rằng nghiệm của các phương trình đại số làm nảy sinh các dạng hình học, ta hãy xét một ví dụ đơn giản hơn: các nghiệm trên tập số thực chứ không phải tập số phức. Chẳng hạn, xét phương trình:

$$x^2 + y^2 = 1$$

và hãy đánh dấu các nghiệm của nó như các điểm trên mặt phẳng, với tọa độ x và y . Tập tất cả các nghiệm như vậy là một đường tròn bán kính là 1, với tâm ở gốc tọa độ. Tương tự như vậy, các nghiệm của những phương trình đại số khác theo hai biến x, y cũng tạo thành các đường cong trên mặt phẳng này.^[69]

Bây giờ, các số phức, theo nghĩa nào đó, là gấp đôi tập số thực lên (thật vậy, mỗi số phức được xác định bởi một cặp hai số thực), do đó không có gì đáng ngạc nhiên rằng các nghiệm phức của một phương trình đại số như thế lại tạo thành một diện Riemann.

Ngoài các nghiệm thực và nghiệm phức, ta cũng có thể tìm các nghiệm x, y nhận giá trị trong một trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-2, p-1\}$, với p là một số nguyên tố nào đó. Điều này có nghĩa là khi chúng ta thay x, y vào phương trình cubic ở trên, thì vế trái và vế phải sẽ trở thành hai số nguyên bằng nhau, với sai khác là một số nguyên là bội của p . Kết quả ta nhận được một đối tượng mà các nhà toán học gọi là “đường cong trên trường hữu hạn”. Dĩ nhiên, chúng không thực sự là các đường cong. Sở dĩ có thuật ngữ này là do thực tế khi tìm các nghiệm thực, ta thu được các đường cong trên mặt phẳng.^[70]

Một nhận thức sâu sắc của Weil là ý tưởng cho rằng đối tượng cơ bản nhất ở đây là một phương trình đại số, giống như phương trình cubic ở trên: Tùy thuộc vào miền ta tìm các nghiệm, mà cùng một phương trình có thể làm nảy sinh một mặt, một đường cong, hay một chùm các điểm. Chúng chỉ là những *hóa thân* của một thực thể không thể mô tả bằng lời, mà ở đây chính là phương trình của chúng ta, tựa như thần Vishnu trong đạo Hindu có tới mười hóa thân. Như một cơ duyên, trong lá thư gửi cho em gái của mình, André Weil cũng viện dẫn đến *Bhagavad-Gita*^[71], một thánh kinh của đạo Hindu, nơi chủ thuyết về những hóa thân của Vishnu được tin là xuất hiện lần đầu tiên trong đó. Weil đã viết đầy chất thơ về những gì sẽ xảy ra khi ý niệm mơ hồ của sự tương tự giữa hai lý thuyết trở thành tri thức cụ thể:

Hai lý thuyết riêng lẻ đã không còn nữa, cả những vấn đề rắc rối, những phản chiếu đẹp đẽ vào nhau, những vuốt ve ngấm ngấm, những xung đột không thể giải thích nổi của chúng cũng không còn nữa; than ôi, bây giờ chúng ta chỉ có một lý thuyết, mà vẻ đẹp uy nghi của nó không còn làm ta phấn khích nữa. Không gì phong phú hơn là những mối liên hệ trái phép này; không gì mang lại nhiều vui thú hơn cho người đã thông tỏ... Niềm vui đến từ ảo ảnh và sự bùng cháy những cảm xúc; một khi ảo ảnh biến mất và tri thức đã được thu nhận, chúng ta đạt tới trạng thái dừng dừng; trong kinh *Gita* cũng có một vài đoạn thơ trong sáng viết về điều này. Nhưng hãy cùng quay trở lại với các hàm đại số.

Mối liên kết giữa các diện Riemann và những đường cong trên các trường hữu hạn bây giờ chắc đã trở nên sáng tỏ; cả hai đều xuất hiện từ cùng một loại phương trình, nhưng ta lại tìm các nghiệm của nó trong những miền khác nhau, hoặc là trường hữu hạn, hoặc là trường số phức. Mặt khác, “bất kỳ một luận điểm hay kết quả nào trong lý thuyết số đều có thể được diễn dịch, theo từng chữ một,” thành những đường cong trên các trường hữu hạn, đúng như Weil đã viết trong lá thư của ông.^[72] Bởi vậy, ý tưởng của Weil là những đường cong trên các trường hữu hạn chính là các đối tượng trung gian giữa lý thuyết số và các diện Riemann.

Như vậy ta tìm ra được một cây cầu nối, hay một “sàn quay đầu xe lửa” - như Weil đã gọi - giữa lý thuyết số và các diện Riemann, và đó là lý thuyết những đường cong đại số trên các trường hữu hạn. Nói cách khác, chúng ta có ba đường ray hay ba cột song song:

Lý thuyết số

Những đường cong trên các trường hữu hạn

Các diện Riemann

Weil muốn khai thác điều này theo cách sau: chọn một mệnh đề ở một trong ba cột, và dịch nó thành mệnh đề ở các cột còn lại. Ông viết cho em gái mình:

Nghiên cứu của anh chủ yếu là giải mã một văn bản bằng ba thứ tiếng; ở mỗi cột anh chỉ có những đoạn rời rạc không có liên quan gì với nhau; anh có một số ý tưởng về mỗi một trong ba ngôn ngữ này: nhưng anh cũng biết có những khác biệt rất lớn về ý nghĩa khi chuyển từ cột này sang cột khác, điều mà anh không hề chuẩn bị trước cho nó. Anh mất nhiều năm để nghiên cứu đề tài này, và đã tìm thấy nhiều mảnh nhỏ của cuốn từ điển đó.

Và sau đó Weil tìm ra được một trong những ứng dụng ngoạn mục nhất cho phiến đá Rosetta của mình: ngày nay người ta gọi là các giả

thuyết Weil. Các giả thuyết này^[73] được chứng minh đã thực sự kích thích sự phát triển của toán học ở nửa sau thế kỷ 20.

Giờ hãy quay lại với Chương trình Langlands. Những ý tưởng sơ khởi của Langlands liên quan tới cột bên trái trên phiến đá Rosetta của Weil, đó là lý thuyết số. Langlands liên kết những biểu diễn của các nhóm Galois của các trường số, vốn là đối tượng nghiên cứu trong lý thuyết số, với các hàm tự đẳng cấu, là các đối tượng trong giải tích điều hòa - một lĩnh vực của toán học rất xa với lý thuyết số (tức là cũng rất xa những cột khác trên phiến đá Rosetta). Bây giờ chúng ta có thể đặt câu hỏi liệu có thể tìm thấy mối liên hệ tương tự nếu thay các nhóm Galois bằng các đối tượng ở cột giữa hay cột bên phải của phiến đá này hay không.

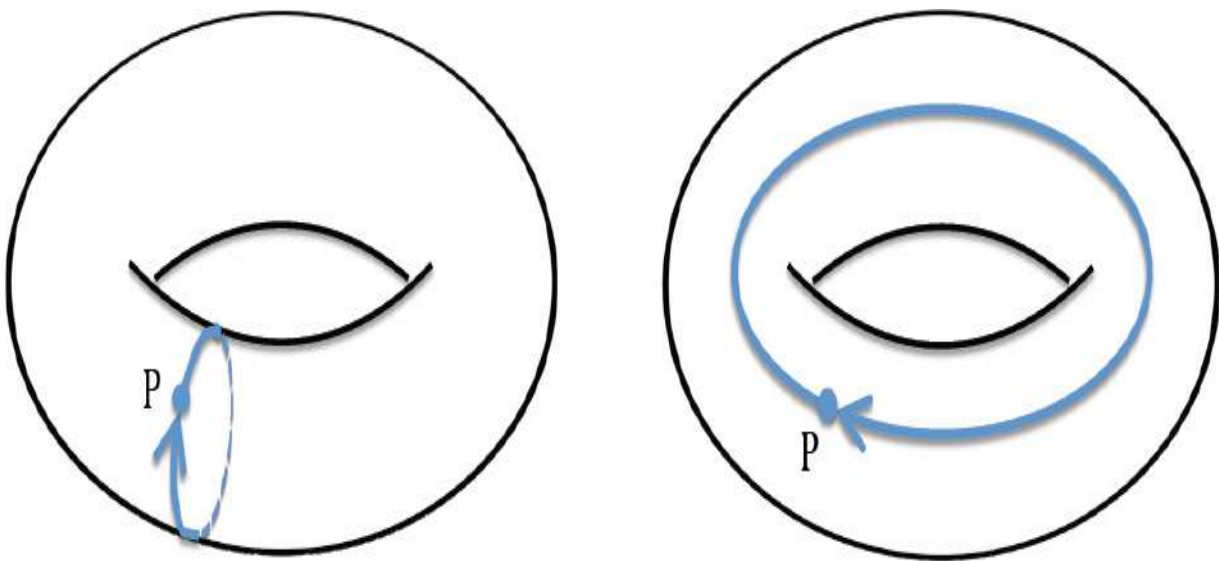
Việc chuyển mối liên hệ Langlands này sang cột ở giữa là khá rõ ràng bởi vì tất cả những yếu tố cần thiết đều đã sẵn có. Những nhóm Galois của các trường số có thể được thay thế ở đây bằng những nhóm Galois thích hợp đối với những đường cong trên các trường hữu hạn. Cũng có một nhánh của giải tích điều hòa nghiên cứu các hàm tự đẳng cấu thích hợp. Trong công trình ban đầu của riêng mình, Langlands cũng đã liên kết được những biểu diễn của các nhóm Galois với các hàm tự đẳng cấu liên quan với cột ở giữa.

Tuy nhiên, ta vẫn chưa rõ làm cách nào để chuyển mối liên kết này sang cột bên phải của phiến đá Rosetta. Để làm điều đó, chúng ta phải tìm những tương tự hình học của các nhóm Galois và của các hàm tự đẳng cấu trong lý thuyết các diện Riemann. Khi Langlands lần đầu tiên phát biểu những ý tưởng của mình, thì sự tương tự thứ nhất đã được biết đến, nhưng sự tương tự thứ hai thì vẫn còn là một bí ẩn lớn. Mãi tới thập niên 1980 người ta mới tìm được khái niệm phù hợp, xuất phát từ công trình tiên phong của Vladimir Drinfeld, một nhà toán học lỗi lạc người Nga. Điều này đã cho phép chúng ta chuyển quan hệ Langlands sang cột thứ ba của phiến đá Rosetta.

Trước hết, ta hãy thảo luận về tương tự hình học của nhóm Galois. Nó được gọi là *nhóm cơ bản* của một diện Riemann.

Nhóm cơ bản là một trong những khái niệm quan trọng nhất thuộc lĩnh vực toán học topo, chuyên tập trung nghiên cứu những đặc điểm nổi bật nhất của các dạng hình học (như số các “lỗ” trên một diện Riemann, chẳng hạn).

Ví dụ, ta hãy xét một mặt xuyên. Chọn một điểm P trên đó và xét các đường cong khép kín bắt đầu và kết thúc ở chính điểm này. Hai đường như vậy được vẽ trên hình dưới đây:



Cũng giống như thế, nhóm cơ bản của một diện Riemann bất kỳ đã cho bao gồm các đường cong khép kín như thế trên diện Riemann, chúng bắt đầu và kết thúc ở cùng một điểm cố định P .^[74]

Cho trước hai đường đều bắt đầu và kết thúc ở điểm p , chúng ta dựng một đường khác như sau: đi dọc theo đường thứ nhất và sau đó đi dọc theo đường thứ hai. Bằng cách này ta thu được một đường mới cũng bắt đầu và kết thúc ở P . Hóa ra “phép cộng” thêm các đường cong khép kín này lại thỏa mãn tất cả các tính chất của một nhóm như đã liệt kê trong chương 2. Bởi vậy, ta thấy rằng những đường cong này thực sự tạo thành một nhóm.^[75]

Có lẽ bạn cũng đã thấy rằng quy tắc cộng hai đường trong nhóm cơ bản cũng giống với quy tắc cộng hai bên trong các nhóm bên, mà ta

đã định nghĩa ở chương 5. Đây không phải là một sự trùng hợp ngẫu nhiên. Như đã giải thích trong chương 5, các bện với n sợi có thể được coi như các đường trong không gian của tập hợp n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Thực tế thì nhóm bện B_n chính là nhóm cơ bản của không gian đó.^[76]

Hóa ra hai đường được vẽ trên mặt xuyên trong hình ở trên lại giao hoán với nhau; tức là phép cộng của chúng theo hai thứ tự khả dĩ đều cho cùng một phần tử thuộc nhóm cơ bản.^[77] Bởi vậy, ta sẽ thu được phần tử tổng quát nhất trong nhóm cơ bản của mặt xuyên bằng cách đi theo đường thứ nhất M lần và đường thứ hai N lần, với M và N là các số nguyên (nếu M là số âm, thì ta đi theo đường thứ nhất M lần theo hướng ngược lại, và tương tự nếu N âm). Bởi vì hai đường cơ bản này giao hoán với nhau, nên thứ tự mà ta đi theo hai đường này không quan trọng lắm, kết quả cuối cùng vẫn chỉ là một.

Với các diện Riemann khác, cấu trúc của nhóm cơ bản sẽ phức tạp hơn.^[78] Những đường khác nhau không nhất thiết phải giao hoán với nhau. Điều này tương tự với các bện có nhiều hơn hai sợi, chúng cũng không giao hoán với nhau, như ta đã thảo luận trong chương 5.

Từ lâu người ta đã biết rằng có một sự tương tự sâu sắc giữa các nhóm Galois và các nhóm cơ bản.^[79] Điều này cung cấp câu trả lời cho câu hỏi thứ nhất của chúng ta: cái gì tương tự với nhóm Galois trong cột thứ nhất trên phiến đá Rosetta của Weil? Đó là nhóm cơ bản của diện Riemann.

Câu hỏi tiếp sau của ta là tìm kiếm những tương tự phù hợp của các hàm tự đẳng cấu, tức các đối tượng xuất hiện ở vế bên kia của quan hệ Langlands. Và ở đây, ta cần thực hiện một bước nhảy lượng tử. Những hàm cũ thực tế không còn phù hợp nữa. Chúng phải được thay thế bởi những đối tượng tinh vi hơn của toán học hiện đại gọi là *các bó*, sẽ được mô tả ở chương 14.

Điều này được Vladimir Drinfeld đề xuất trong thập niên 1980. Ông đưa ra một phát biểu mới về Chương trình Langlands có thể áp dụng cho cột giữa và cột bên phải, lần lượt liên quan với những đường cong trên các trường hữu hạn và các diện Riemann. Phát biểu này ngày nay được biết đến dưới cái tên Chương trình Langlands hình học. Đặc biệt, Drinfeld đã tìm thấy những tương tự của các hàm tự đẳng cấu phù hợp với cột bên phải trên phiến đá Rosetta của Weil.

Tôi gặp Drinfeld ở Đại học Harvard mùa xuân năm 1990. Ông không chỉ làm tôi hứng khởi với Chương trình Langlands, mà còn nói tôi đã đóng một vai trò nhất định trong sự phát triển của nó. Đó là bởi vì Drinfeld đã nhìn thấy được mối liên hệ giữa Chương trình Langlands hình học với những nghiên cứu mà tôi thực hiện khi còn là sinh viên ở Moscow. Những kết quả của công trình đó rất thiết yếu đối với cách tiếp cận mới của Drinfeld, và cách tiếp cận ấy sau này đã định hình đời sống toán học của tôi: Chương trình Langlands đóng vai trò quan trọng nhất trong các nghiên cứu của tôi kể từ đó.

Nhưng thôi, hãy cùng tôi quay trở lại Moscow, và xem tôi tiến bộ đến đâu sau bài báo đầu tiên của mình, về các nhóm bện.

❏ Biên tập viên cuốn sách này nói với tôi rằng chiếc bánh quy xoắn ở quán bar của người Đức gần nhà anh ấy có *giống* là 3 (và rất ngon).

Chương 10

CÙNG HỘI CÙNG THUYỀN

Moscow, mùa thu năm 1986, tôi bước vào năm thứ ba ở Kerosinka. Sau khi bài báo về nhóm bện được hoàn tất và gửi đăng, Fuchs hỏi tôi: “Tiếp theo thì cậu muốn làm gì?”

Tôi muốn có một bài toán khác để giải. Hóa ra, Fuchs đã làm việc với người học trò cũ của ông là Boris Feigin về biểu diễn của các đại số Lie vài năm rồi. Fuchs nói rằng đó là một địa hạt sôi động với rất nhiều đề tài còn để mở và liên quan chặt chẽ với vật lý lượng tử.

Dĩ nhiên là điều này thu hút ngay sự chú ý của tôi. Thậm chí mặc dù Evgeny Evgenievich đã “chuyển hướng” tôi sang toán học, và ngay cả khi đã bị toán học bỏ bùa mê rồi, tôi vẫn không bao giờ đánh mất niềm yêu thích vật lý có từ thời thơ bé. Giờ đây thế giới toán học và vật lý lượng tử lại có thể đi cùng với nhau khiến tôi thấy rất hứng khởi.

Fuchs giao cho tôi một bài báo nghiên cứu dài 80 trang mà ông và Feigin đã viết chung.

“Ban đầu tôi nghĩ sẽ giao cho cậu một cuốn sách về đại số Lie,” ông nói, “nhưng sau đó tôi nghĩ sao lại không giao ngay cho cậu bài báo này nhỉ?”

Tôi cắt bài báo cẩn thận vào cặp. Lúc đó, nó vẫn chưa được công bố, và nhờ sự kiểm duyệt chặt chẽ của chính quyền Xô viết đối với các máy photocopy (vì lo sợ rằng mọi người có thể sẽ sao chép các tài liệu bị cấm, như các cuốn sách của Solzhenitsyn hay cuốn *Bác sĩ Zhivago*), nên trên toàn thế giới chỉ có thể tìm thấy rất ít các bản sao. Do vậy cũng rất ít người được xem bài báo này - sau này Feigin nói đùa rằng có lẽ lời là người duy nhất đọc nó từ đầu đến cuối.

Bài báo được viết bằng tiếng Anh, và dự kiến sẽ in trong một tuyển tập các bài báo, được xuất bản ở Mỹ. Nhưng do sự quản lý yếu kém của nhà xuất bản, phải mãi 15 năm sau cuốn sách mới ra đời. Vì lẽ đó, hầu hết các kết quả trong bài báo đều được khám phá lại ở đâu đó khác, do đó sau khi được công bố, nó không được tìm đọc nhiều. Tuy nhiên, cuối cùng thì bài báo cũng trở nên nổi tiếng, và rồi Feigin và Fuchs cũng nhận lại danh tiếng vốn thuộc về họ. Bài báo này được trích dẫn rộng rãi trong các tài liệu tham khảo (như là một “Preprint Moscow”), thậm chí người ta còn đặt ra một thuật ngữ mới là các biểu diễn Feigin-Fuchs để chỉ các biểu diễn mới của các đại số Lie mà họ đã nghiên cứu trong bài báo đó.

Khi bắt đầu đọc bài báo này, câu hỏi đầu tiên của tôi là: những đối tượng mang tên “đại số Lie” xa lạ kia là gì nhỉ? Bài báo mà Fuchs đưa cho tôi đòi hỏi một lượng kiến thức nền khá khá về chủ đề mà tôi chưa từng được học, do vậy tôi đã tới một hiệu sách và mua tất cả những cuốn sách về đại số Lie mà tôi có thể tìm thấy. Những cuốn nào không tìm mua được thì tôi mượn ở thư viện của Kerosinka. Tôi đọc song song tất cả các cuốn sách ấy và bài báo của Feigin-Fuchs. Trải nghiệm này đã hình thành nên phong cách học của tôi. Kể từ đó, tôi không bao giờ còn thỏa mãn với một nguồn thông tin nữa, tôi cố gắng tìm hết các nguồn có thể, và đọc ngẫu nhiên tất cả.

Để giải thích đại số Lie là gì, trước tiên tôi phải giới thiệu với các bạn về “nhóm Lie”. Cả hai khái niệm này đều được gọi theo tên nhà toán học Na Uy, Sophus Lie (đọc là Li), người đã sáng tạo ra chúng.

Các khái niệm toán học cư ngụ trong Vương quốc Toán học, cũng giống như các loài động vật sinh sống trong Vương quốc Sinh vật: chúng liên kết với nhau, tạo thành các họ và các phân họ, và thường thì hai khái niệm khác nhau giao phối và tạo thành một khái niệm con.

Khái niệm nhóm chính là một ví dụ điển hình. Hãy coi các nhóm như những tương tự của các con chim, các sinh vật tạo thành một lớp

(còn được gọi là lớp Chim) trong Vương quốc Sinh vật - hay Giới động vật. Lớp này chia thành 23 bộ; mỗi bộ lại tách thành các họ và mỗi họ lại tách thành các chi. Chẳng hạn, đại bàng cá châu Phi thuộc bộ Accipitriformes, họ Accipitridae, và chi *Haliaeetus* (so với những cái tên này thì cái tên “nhóm Lie” cũng chẳng có gì là kỳ cục lắm!). Tương tự, các nhóm cũng tạo thành một lớp lớn các khái niệm toán học, và trong lớp này lại cũng có các “bộ”, các “họ” và các “chi” khác nhau.

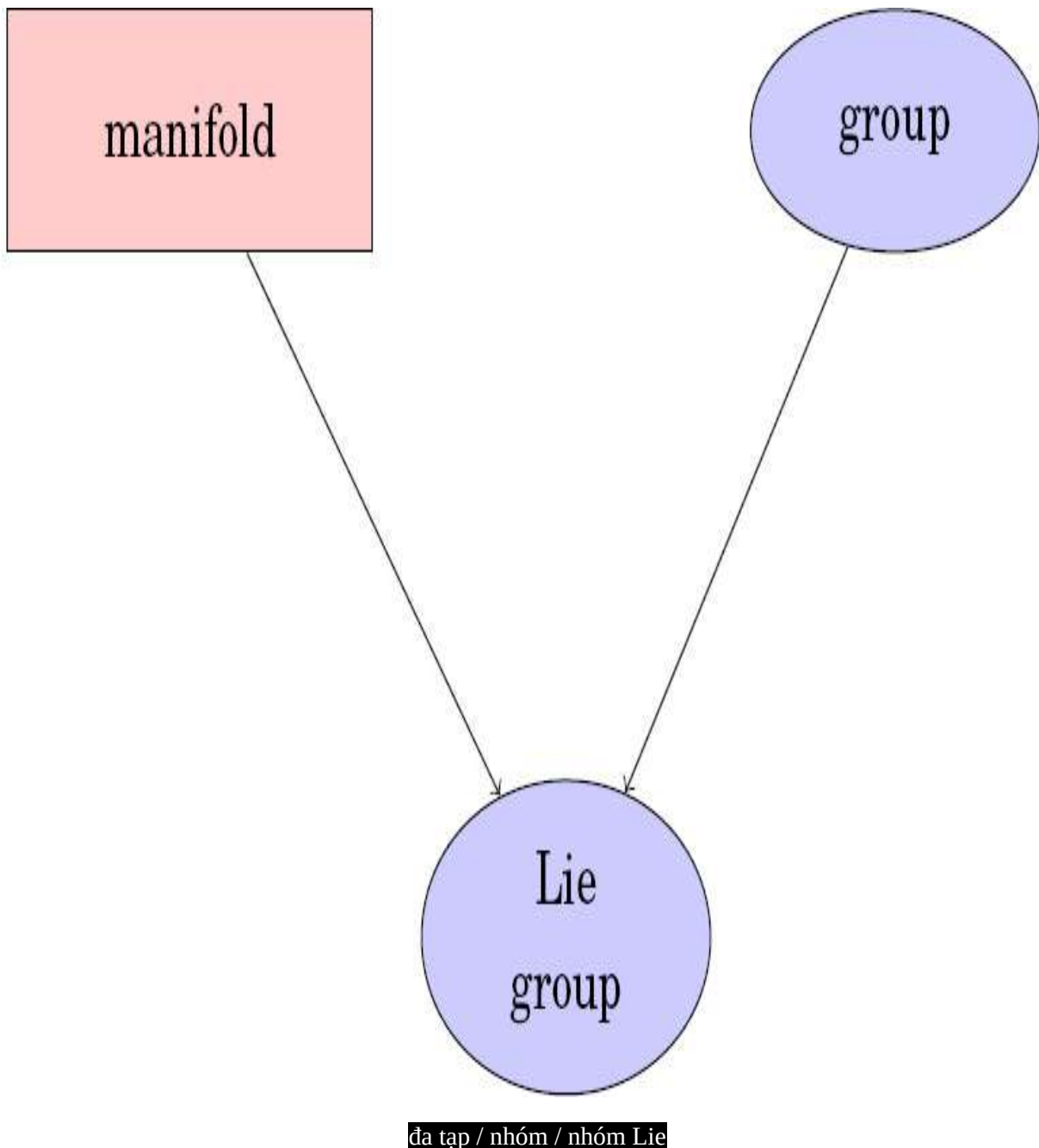
Chẳng hạn, có một bộ các nhóm hữu hạn chứa tất cả các nhóm có hữu hạn phần tử. Nhóm đối xứng của một chiếc bàn vuông, mà chúng ta đã thảo luận trong chương 2, gồm bốn phần tử, vậy nó là một nhóm hữu hạn. Tương tự như vậy, nhóm Galois của một trường số thu được bằng cách gộp thêm các nghiệm của một phương trình đa thức vào tập các số hữu tỉ cũng là một nhóm hữu hạn (ví dụ như trong trường hợp phương trình bậc hai nó có hai phần tử). Lớp các nhóm hữu hạn được chia tiếp thành các họ, như là họ các nhóm Galois. Một họ khác bao gồm các nhóm tinh thể, là những nhóm đối xứng của nhiều tinh thể khác nhau.

Còn có một bộ khác, bộ các nhóm vô hạn. Chẳng hạn, nhóm các số nguyên là vô hạn, và do đó nhóm bện B_n mà ta đã thảo luận trong chương 5, với mỗi $n = 2, 3, 4, \dots$ (B_n bao gồm các bện với n sợi; có vô hạn các bện như vậy) cũng thế. Nhóm các phép quay của một chiếc bàn tròn, bao gồm tất cả các điểm trên đường tròn, cũng là một nhóm vô hạn.

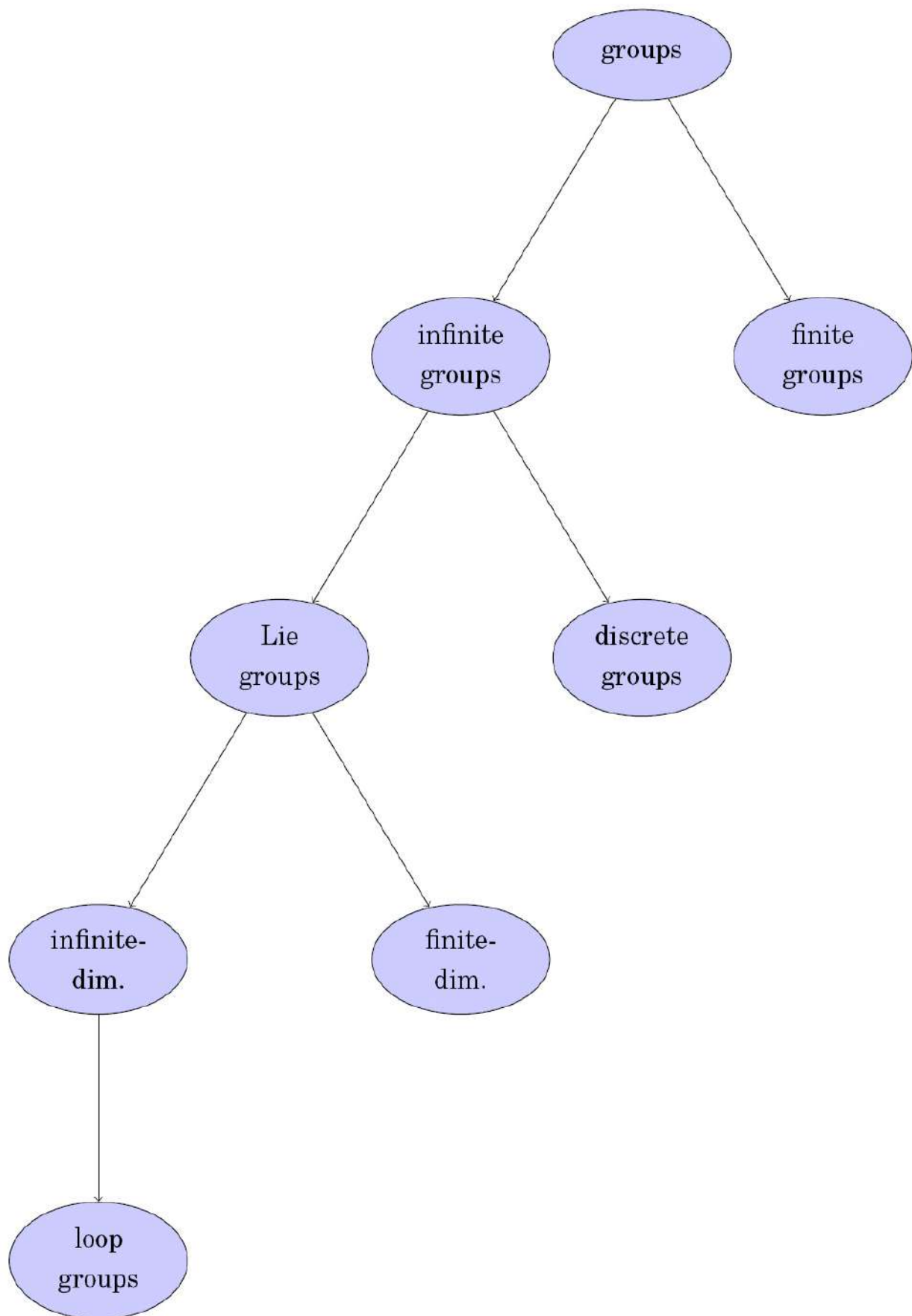
Nhưng có một sự khác biệt quan trọng giữa nhóm các số nguyên và nhóm đường tròn. Nhóm các số nguyên là rời rạc: tức là các phần tử của nó không thể kết hợp với nhau để tạo thành một dạng hình học liên tục theo bất cứ nghĩa tự nhiên nào. Chúng ta không thể di chuyển liên tục, mà nhảy từ số nguyên này sang số nguyên kế tiếp. Ngược lại, chúng ta có thể thay đổi một cách liên tục góc quay từ 0° đến 360° . Gộp cả lại, những góc này kết hợp sẽ tạo thành một dạng hình học: đó

chính là đường tròn. Các nhà toán học gọi các dạng hình học như vậy là những *đa tạp*.

Nhóm các số nguyên và nhóm bện thuộc họ các nhóm vô hạn rời rạc trong Vương quốc Toán học. Và nhóm đường tròn thuộc về một họ khác, đó là họ các nhóm Lie. Nói đơn giản, nhóm Lie là một nhóm mà các phần tử của nó là các điểm thuộc một đa tạp. Như vậy, khái niệm này là kết quả của cuộc hôn phối giữa hai khái niệm toán học: nhóm và đa tạp.



Dưới đây là cây biểu diễn các khái niệm có liên quan tới nhóm mà chúng ta sẽ bàn tới trong chương này (một số khái niệm vẫn còn chưa được nhắc tới, nhưng sẽ được giới thiệu trong phần sau của chương).

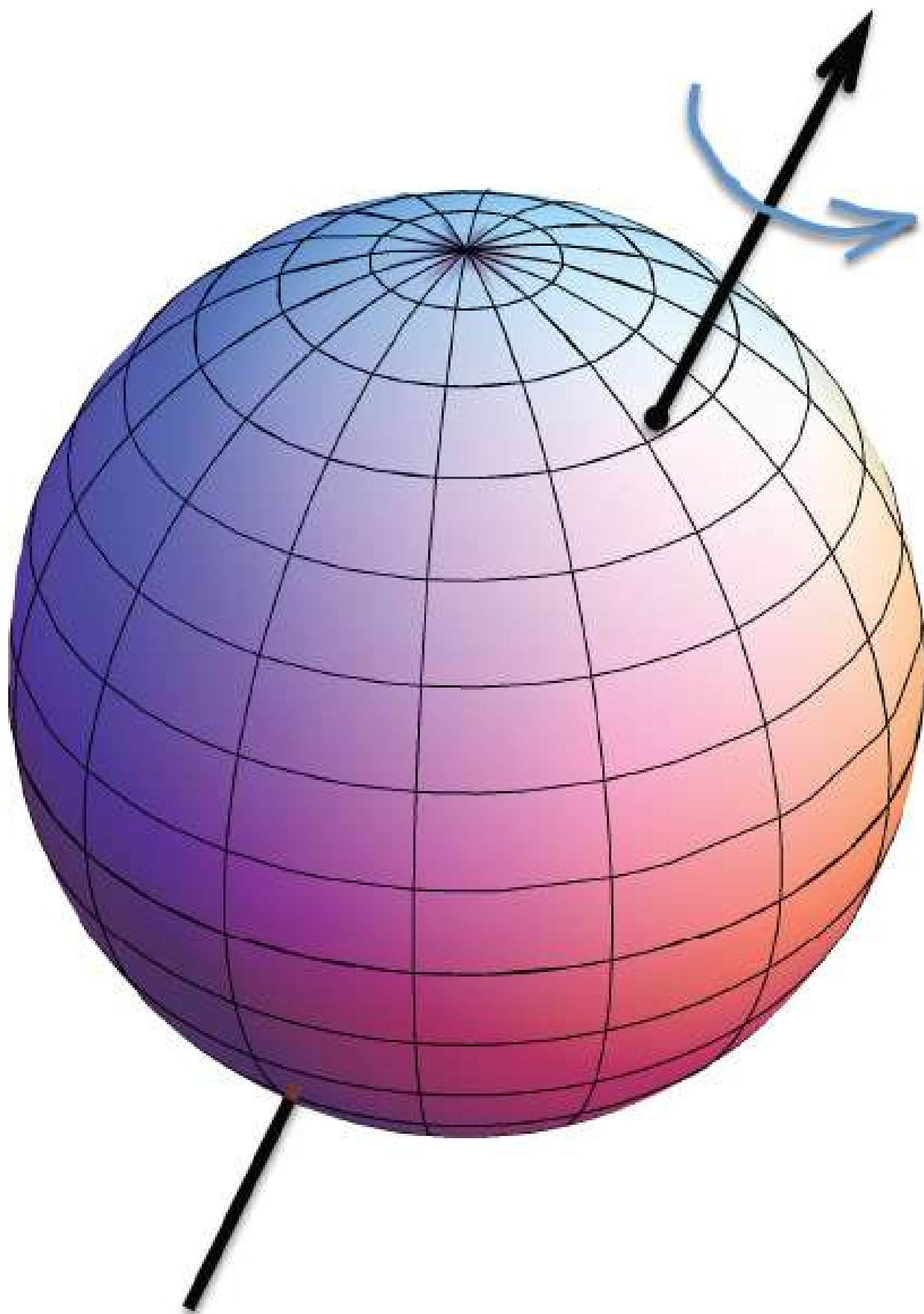


nhóm / nhóm vô hạn / nhóm hữu hạn / nhóm Lie / nhóm rời rạc /

vô hạn chiều / hữu hạn chiều / nhóm vòng

Rất nhiều đối xứng xuất hiện trong tự nhiên được mô tả bởi nhóm Lie, và điều đó giải thích tại sao chúng lại là đối tượng nghiên cứu quan trọng như vậy. Chẳng hạn, nhóm $SU(3)$ mà chúng ta nói đến trong chương 2, được dùng để phân loại các hạt cơ bản, là một nhóm Lie.

Dưới đây là một ví dụ khác về nhóm Lie: nhóm các phép quay của một mặt cầu. Một phép quay của chiếc bàn tròn được xác định bởi góc quay của nó. Nhưng trong trường hợp mặt cầu, có nhiều bậc tự do hơn: ngoài góc quay, ta còn cần phải chỉ rõ trục quay nữa, như được vẽ ở hình dưới đây. Trục quay này có thể là đường thẳng bất kỳ đi qua tâm mặt cầu.



Nhóm các phép quay của mặt cầu có một tên riêng trong toán học: nhóm trực giao đặc biệt (*special orthogonal group*) của không gian ba chiều, hay như nó thường được viết tắt là $SO(3)$. Chúng ta có thể coi các đối xứng của mặt cầu như một phép biến đổi không gian ba chiều mà mặt cầu được nhúng trong đó. Những phép biến đổi này là trực giao theo nghĩa chúng bảo toàn tất cả các khoảng cách.^[80] Thật tình cờ, nó cho ta một biểu diễn ba chiều của nhóm $SO(3)$, một khái niệm mà ta đã giới thiệu trong chương 2.

Tương tự, nhóm các phép quay của chiếc bàn tròn thảo luận ở trên, được gọi là $SO(2)$: những phép quay này là các phép biến đổi trực giao đặc biệt của mặt phẳng, một đối tượng hai chiều. Như vậy, chúng ta có một biểu diễn hai chiều của nhóm $SO(2)$.

Nhóm $SO(2)$ và $SO(3)$ đều không chỉ là nhóm, mà còn là đa tạp (tức là, một dạng hình học). Nhóm $SO(2)$ là đường tròn, cũng là một đa tạp. Do vậy $SO(2)$ vừa là một nhóm vừa là một đa tạp. Điều đó giải thích tại sao nó lại là một nhóm Lie. Tương tự như vậy, các phần tử của nhóm $SO(3)$ là các điểm của một đa tạp khác, nhưng để hình dung nó một cách trực quan thì phải mẹo mực hơn một chút. (Chú ý rằng đa tạp này không phải là một *mặt cầu*.) Cần nhắc lại rằng, mỗi phép quay của mặt cầu được xác định bởi cả trục quay và góc quay của nó. Bây giờ chú ý rằng mỗi điểm trên mặt cầu cho ta một trục quay: đường thẳng nối điểm đó và tâm của mặt cầu. Và góc của phép quay chính là một điểm của vòng tròn. Vì vậy, một phần tử của $SO(3)$ được xác định bởi một điểm trên mặt cầu (nó xác định trục quay) cùng với một điểm của đường tròn (xác định góc quay).

Có lẽ ta nên bắt đầu với một câu hỏi đơn giản hơn: số chiều của $SO(3)$ bằng bao nhiêu? Để trả lời câu hỏi này, ta cần phải thảo luận ý nghĩa của số chiều một cách hệ thống hơn. Trong chương 2, chúng ta đã nói đến thế giới quanh ta là ba chiều. Tức là, để xác định vị trí của một điểm trong không gian, ta cần có ba con số, hay ba tọa độ (x, y, z) . Mặt khác, một mặt phẳng lại là hai chiều: một điểm trên mặt phẳng

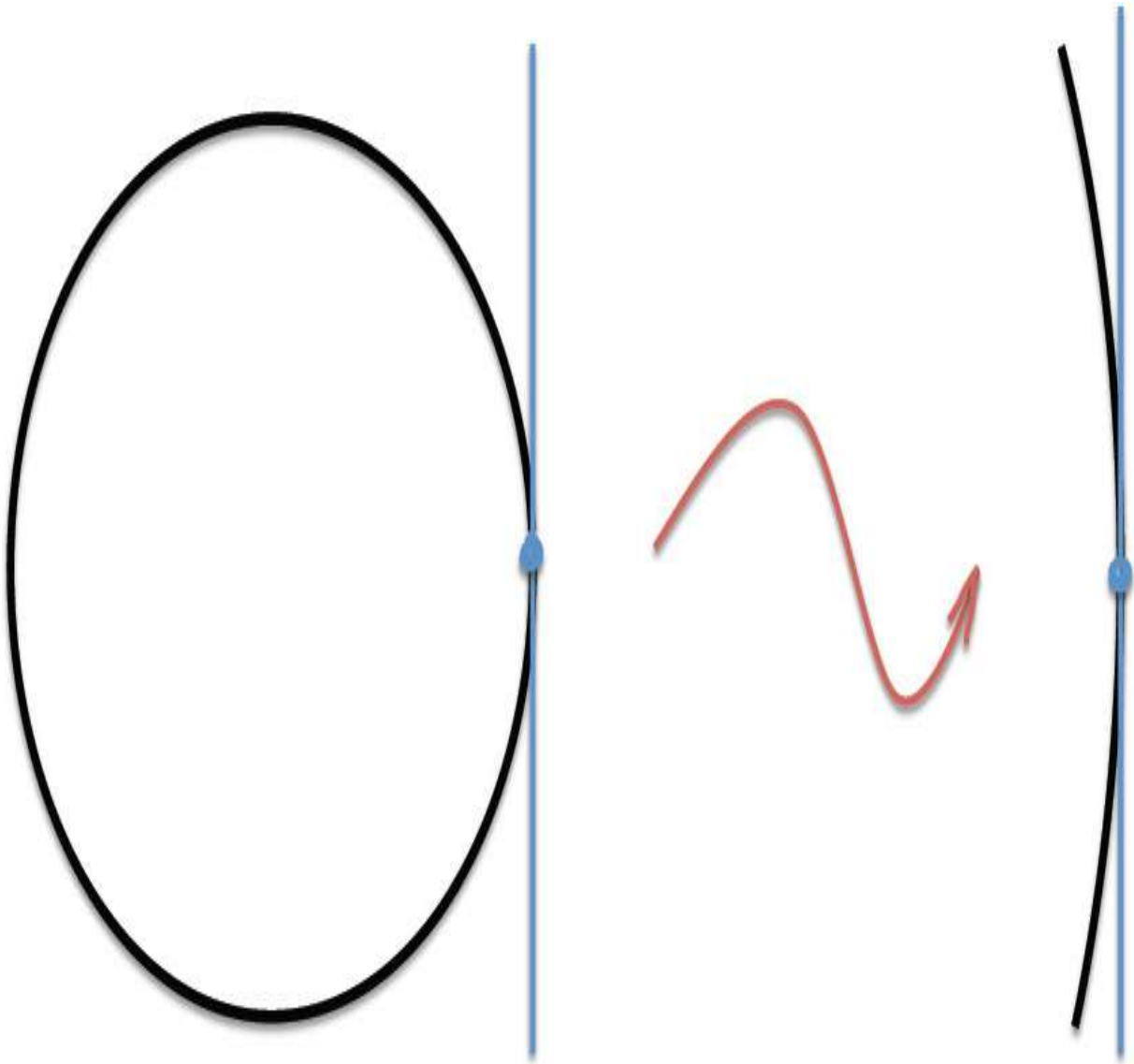
được xác định bởi hai tọa độ (x, y) . Còn đường thẳng thì là một chiều: chỉ có duy nhất một tọa độ mà thôi, tọa độ x .

Vậy thì số chiều của đường tròn bằng bao nhiêu? Chúng ta sẽ nói ngay rằng số chiều của nó là hai, bởi vì ta có thể vẽ đường tròn trên mặt phẳng, một đối tượng hai chiều. Mỗi điểm trên đường tròn, khi được coi như một điểm trên mặt phẳng, được miêu tả bởi hai tọa độ. Nhưng định nghĩa toán học về số chiều của một vật thể cho trước (như đường tròn chẳng hạn) là số các tọa độ độc lập của vật thể này ta dùng để định vị bất kỳ vị trí nào trên nó. Số chiều của vật thể chẳng liên quan gì tới số chiều của khung cảnh xung quanh trong đó vật thể được nhúng vào - trong trường hợp này là mặt phẳng. Thực tế, đường tròn cũng có thể được nhúng vào trong một không gian ba chiều (hãy nghĩ về chiếc nhẫn trên ngón tay chúng ta), hay thậm chí là trong một không gian có số chiều lớn hơn. Số chiều của không gian xung quanh không liên quan gì với số chiều của bản thân đường tròn. Điều quan trọng là một điểm trên đường tròn được xác định bởi một con số - chính là góc quay. Đó là tọa độ duy nhất trên đường tròn. Điều đó giải thích tại sao nó lại có số chiều là một.

Dĩ nhiên, để xác định góc chúng ta cần lấy một điểm làm chuẩn trên đường tròn tương ứng với góc 0° . Tương tự, để gán một tọa độ x cho mỗi điểm trên đường thẳng ta cần phải lấy một điểm làm chuẩn trên đường thẳng ấy tương ứng với tọa độ $x = 0$. Chúng ta có thể thiết đặt một hệ tọa độ cho một vật thể cho trước theo nhiều cách. Nhưng mỗi hệ tọa độ đó sẽ phải có cùng số tọa độ, và số *chiều* của vật thể chính bằng số tọa độ của nó.

Chú ý rằng, nếu chúng ta thu nhỏ lại và nhìn vào lân cận ngày càng nhỏ hơn của điểm đang xét trên đường tròn, thì độ cong của đường tròn hoàn toàn biến mất. Thực tế thì không có gì khác biệt giữa một lân cận nhỏ của một điểm trên đường tròn và một lân cận nhỏ của điểm đó trên tiếp tuyến qua nó với đường tròn; tức là đường thẳng xấp

xi đường tròn nhất ở gần điểm đó. Điều này chỉ ra rằng đường tròn và đường thẳng có số chiều như nhau.^[81]



Khi chúng ta thu nhỏ lại gần một điểm, đường tròn và tiếp tuyến tại điểm đó ngày càng gần đến nhau hơn.

Tương tự như vậy, mặt cầu được nhúng trong không gian ba chiều, nhưng số chiều nội tại của nó là hai. Thực vậy, có hai tọa độ độc lập trên mặt cầu: kinh độ và vĩ độ. Chúng ta đã biết rõ về các tọa độ này bởi vì chúng ta thường sử dụng chúng để xác định vị trí trên bề mặt Trái Đất, một thiên thể cũng có hình dạng gần giống với một mặt cầu. Lưới của mặt cầu mà chúng ta thấy trên hình ở trang 153 được tạo bởi các đường “kinh tuyến” và “vĩ tuyến”, tương ứng với các giá trị cố định

của kinh độ và vĩ độ. Thực tế có hai tọa độ trên mặt cầu cho chúng ta biết rằng nó là hai chiều.

Vậy còn nhóm Lie $SO(3)$ thì sao? Mỗi điểm của $SO(3)$ đều là một phép quay của mặt cầu, vậy ta có ba tọa độ: trục quay (được xác định bởi một điểm mà tại đó trục cắt mặt cầu) được mô tả bởi hai tọa độ, và góc quay là tọa độ thứ ba. Do đó, số chiều của $SO(3)$ bằng ba.

Tưởng tượng về một nhóm Lie, hay một đa tạp, với số chiều lớn hơn ba là một việc rất khó. Cấu trúc não bộ của con người chỉ cho phép chúng ta tưởng tượng được các dạng hình học, hay các đa tạp, có số chiều lớn nhất bằng ba. Thậm chí việc tưởng tượng sự kết hợp bốn chiều của không gian và thời gian cũng là một nhiệm vụ cam go: chúng ta không cảm nhận được thời gian (chiều thứ tư) như một thứ tương đương với một chiều không gian. Vậy còn các chiều cao hơn thì sao? Bằng cách nào chúng ta có thể phân tích các đa tạp với số chiều bằng năm, sáu hay một trăm?

Hãy nghĩ về điều này thông qua sự tương tự sau: các bức tranh cho ta những mô tả hai chiều của các vật thể ba chiều. Các họa sĩ vẽ các hình chiếu hai chiều của những vật thể đó trên vải toan, và sử dụng các kỹ thuật phối cảnh để tạo ra những ảo giác về chiều sâu, chiều thứ ba, trong các bức tranh của họ. Tương tự như vậy, ta có thể hình dung về các vật thể bốn chiều bằng cách phân tích những hình chiếu ba chiều của chúng.

Có một cách khác, hiệu quả hơn để hình dung về chiều thứ tư, đó là nghĩ về các vật thể bốn chiều như một tập hợp các “lát cắt” ba chiều của chúng. Việc này cũng giống như cắt lát một ổ bánh mì, một vật thể ba chiều, thành các lát mỏng mà chúng ta có thể coi như có số chiều là hai.

Nếu chiều thứ tư biểu diễn thời gian, thì việc “cắt lát” bốn chiều này đã được biết đến dưới cái tên là chụp ảnh. Thực vậy, chụp nhanh bức ảnh của một người chuyển động cho ta một lát cắt ba chiều của một vật thể bốn chiều biểu diễn người đó trong không-thời gian bốn chiều

(lát cắt này sau đó được chiếu xuống một mặt phẳng). Chụp liên tiếp vài bức ảnh, ta sẽ thu được một tập hợp các lát cắt như thế. Nếu cho những bức ảnh này chạy nhanh trước mắt, ta có thể thấy được hình ảnh chuyển động. Đây rõ ràng là ý tưởng cơ bản của điện ảnh.

Ta cũng có thể chuyển tải ấn tượng về chuyển động của người này bằng cách để các bức ảnh cạnh nhau. Vào đầu thế kỷ 20, các họa sĩ rất quan tâm tới ý tưởng này và đã sử dụng nó như một phương pháp lồng ghép chiều thứ tư vào bức tranh của họ, để làm cho nó trở nên sống động hơn. Một cột mốc trong xu hướng này là bức tranh *Nude Descending a Staircase, No.2* (Người đàn bà khỏa thân đi xuống cầu thang, số 2) của Marcel Duchamp vẽ năm 1912.



Thật thú vị nếu ta lưu tâm đến thuyết tương đối của Einstein, một lý thuyết đã chứng minh rằng không gian và thời gian không thể tách rời nhau, cũng xuất hiện vào cùng khoảng thời gian đó. Nó đã mang khái niệm *continuum* của không-thời gian bốn chiều tới tuyến đầu của vật lý. Cùng thời điểm đó, các nhà toán học như Henri Poincaré cũng nghiên cứu sâu những dạng hình học bí ẩn với số chiều cao hơn, vượt ra khỏi mẫu hình Euclid.

Duchamp bị mê hoặc bởi ý tưởng về chiều thứ tư cũng như hình học phi Euclid. Khi đọc cuốn *Elementary Treatise on Four-Dimensional Geometry and Introduction to the Geometry of n-Dinensions* (Chuyên luận sơ cấp về hình học bốn chiều và nhập môn hình học n -chiều) của E.P. Jouffret, cuốn sách giới thiệu cụ thể về những ý tưởng đột phá của Poincaré, Duchamp nhận xét như sau:^[82]

Cái bóng của một hình bốn chiều chiếu xuống không gian của chúng ta là một cái bóng ba chiều (xem Jouffret - Hình học của chiều thứ 4, trang 186, ba dòng cuối cùng)... tương tự với phương pháp mà các kiến trúc sư đã dùng để vẽ mặt bằng mỗi tầng của một ngôi nhà, một hình 4-chiều có thể được biểu diễn (theo mỗi tầng của nó) bởi các lát cắt ba chiều. Những tầng khác nhau đó sẽ được liên kết với nhau bởi chiều thứ tư.

Theo nhà nghiên cứu lịch sử hội họa Linda Dalrymple Henderson,^[83] “Duchamp tìm thấy điều gì đó mang tính cách mạng ở những hình học mới, thách thức ‘những chân lý’ đã có từ lâu đời.” Bà viết, mối quan tâm của Duchamp và các họa sĩ cùng thời khác về chiều thứ tư là một trong những yếu tố góp phần khai sinh trường phái hội họa trừu tượng.

Như vậy, toán học đã cung cấp ý tưởng cho hội họa; nó cho phép các họa sĩ nhìn thấy những chiều ẩn giấu và truyền cảm hứng cho họ phô bày một số chân lý sâu sắc về thế giới của chúng ta dưới một hình thức thẩm mỹ như trêu ngươi thị giác. Những tác phẩm hội họa hiện đại mà họ đã sáng tạo ra giúp nâng cao nhận thức của chúng ta về thực tại,

và ảnh hưởng tới ý thức tập thể. Điều đó lại ảnh hưởng ngược lại tới những thế hệ các nhà toán học kế tiếp. Triết gia của khoa học, Gerald Holton viết về điều này rất sâu sắc:^[84]

Thực vậy, một nền văn hóa được nuôi dưỡng bởi sự tương tác giữa các bộ phận cấu thành nên nó. Tiến trình phát triển của văn hóa là một quá trình giả kim thuật, trong đó tất cả những bộ phận khác nhau ấy có thể được kết hợp lại để tạo ra những viên ngọc quý giá. Về điểm này, tôi hình dung ra, cả Poincaré và Duchamp đều sẽ nhất trí với tôi và với nhau, có lẽ lúc này, cả hai đã gặp nhau ở đâu đó trong siêu không gian, nơi họ đã rất mực yêu thích, theo cách riêng của mình.

Toán học cho phép chúng ta tiếp thu tất cả những biến thể, hình dáng và dạng thức của hình học. Nó là một ngôn ngữ phổ quát mà ta có thể áp dụng như nhau trong tất cả các chiều, bất kể chúng ta có hình dung được những vật thể tương ứng hay không, và nó cho phép chúng ta vượt ra ngoài trí tưởng tượng hạn chế của mình. Đúng như Charles Darwin viết, các nhà toán học ban cho chúng ta thêm “một giác quan mới”.^[85]

Chẳng hạn, dù không thể hình dung được một không gian bốn chiều, nhưng chúng ta lại có thể hiện thực hóa chúng bằng toán học. Chúng ta có thể biểu diễn các điểm trong không gian này một cách đơn giản bằng một bộ bốn số (x, y, z, t) , cũng giống như biểu diễn các điểm của không gian ba chiều bằng bộ ba số (x, y, z) . Theo cùng một cách như vậy, ta có thể nhìn các điểm trong một không gian phẳng n -chiều, với n bất kỳ, như một bộ n số (ta có thể phân tích chúng như các hàng của một bảng tính, như đã thảo luận ở chương 2).

Có lẽ tôi cần phải giải thích tại sao lại nhắc đến những không gian này như những không gian phẳng. Một đường thẳng thì rõ ràng là phẳng, và một mặt phẳng cũng vậy. Nhưng việc ta coi một không gian ba chiều là phẳng thì chẳng hiển nhiên chút nào. (Chú ý rằng ở đây tôi không nói về các đa tạp với độ cong khác nhau được nhúng vào không

gian ba chiều, ví như một mặt cầu hay một mặt xuyên. Mà tôi đang nói về chính không gian ba chiều.) Nguyên do là nó không có độ cong nào cả. Định nghĩa chính xác về độ cong là rất tinh tế (nó đã được đưa ra bởi Bernhard Riemann, người sáng tạo ra các diện Riemann), và tôi sẽ không đi vào chi tiết ở đây vì nó ít liên quan tới những mục tiêu trước mắt của chúng ta. Một cách khá hay để tưởng tượng về tính phẳng của không gian ba chiều đó là thừa nhận rằng nó có ba trục tọa độ vuông góc với nhau, cũng như mặt phẳng có hai trục tọa độ vuông góc. Tương tự như vậy, một không gian n -chiều, với n trục tọa độ vuông góc, sẽ không có độ cong và do vậy nó là phẳng.

Trong hàng thế kỷ, các nhà vật lý nghĩ rằng chúng ta sống trong một không gian phẳng ba chiều, nhưng như đã thảo luận ở phần lời nói đầu, trong thuyết tương đối rộng của mình, Einstein chỉ ra rằng hấp dẫn làm cong không gian (độ cong là rất nhỏ, do vậy trong đời sống hằng ngày chúng ta không nhận thấy được, nhưng độ cong đó quả thật là khác 0). Bởi vậy không gian của chúng ta thực ra chính là một ví dụ về một không gian cong ba chiều.

Do vậy xuất hiện câu hỏi: một không gian cong có thể tự tồn tại như thế nào, nếu nó không bị nhúng vào một không gian phẳng với số chiều lớn hơn, như cách mà một mặt cầu được nhúng vào một không gian phẳng ba chiều. Chúng ta thường nghĩ rằng không gian mà ta đang sống là phẳng, và do đó theo kinh nghiệm sống hằng ngày, một hình dạng bị uốn cong dường như chỉ xuất hiện bên trong giới hạn của không gian phẳng đó. Nhưng đây là một sự hiểu nhầm, một giả tượng trong nhận thức hạn hẹp của chúng ta về thực tại. Và trở trêu thay không gian mà ta đang sống lại chẳng phẳng chút nào! Toán học cho ta một cách để thoát khỏi cạm bẫy này: như Riemann đã chỉ ra, các không gian cong tự chúng tồn tại, không cần phải có một không gian phẳng nào chứa chúng cả. Cái chúng ta cần để định nghĩa một không gian như vậy là một quy tắc đo khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong không gian ấy (quy tắc này phải thỏa mãn một số tính chất tự nhiên); các nhà toán học gọi đó là *metric*. Những khái niệm toán học như metric và

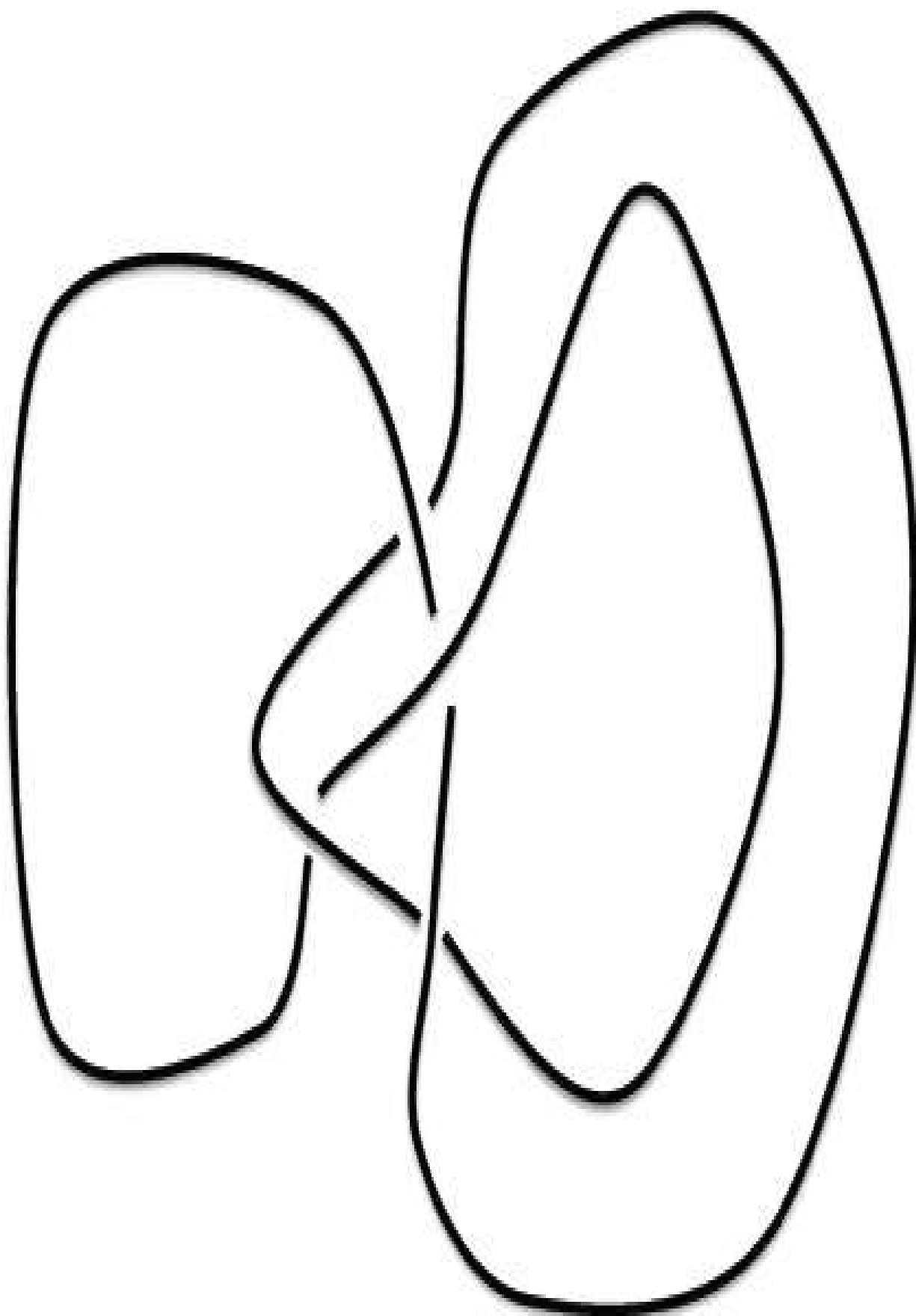
tensor độ cong, được đề xuất bởi Riemann, chính là những hòn đá tảng cho thuyết tương đối rộng của Einstein.^[86]

Các hình dạng cong, hay các đa tạp, có thể có số chiều cao tùy ý. Cần nhắc lại rằng đường tròn là tập hợp các điểm trên mặt phẳng, cách đều một điểm cho trước (hay như giám khảo của tôi ở MGU nhấn mạnh, là tập hợp *tất cả* các điểm như vậy!). Tương tự, một mặt cầu là tập hợp tất cả các điểm trong không gian ba chiều cách đều một điểm cho trước. Bây giờ ta có thể định nghĩa một mặt cầu tương tự nhưng có số chiều cao hơn - một số người gọi đó là mặt siêu cầu - là tập hợp các điểm cách đều một điểm cho trước trong không gian n -chiều. Điều kiện này đưa ra một ràng buộc đối với n tọa độ. Do vậy số chiều của mặt siêu cầu trong không gian n -chiều là $(n - 1)$. Hơn nữa, ta có thể nghiên cứu về nhóm Lie các phép quay của mặt siêu cầu này.^[87] Nó được ký hiệu là $SO(n)$.

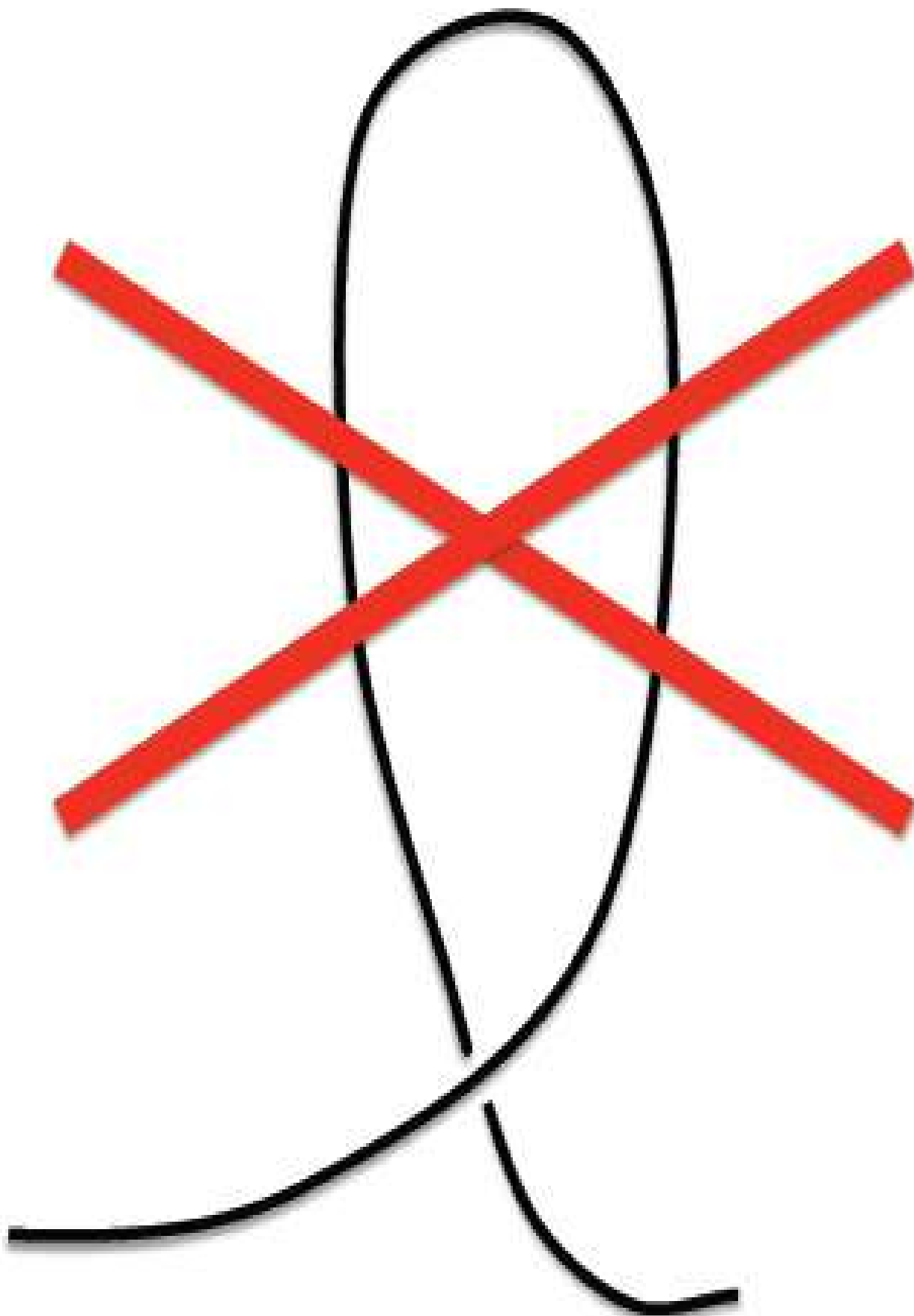
Từ quan điểm phân loại các nhóm trong Vương quốc Toán học, họ các nhóm Lie được phân thành hai chi: chi các nhóm Lie hữu hạn chiều (như là nhóm đường tròn và nhóm $SO(3)$), và chi các nhóm Lie vô hạn chiều. Chú ý rằng các nhóm Lie hữu hạn chiều nhưng vẫn là vô hạn, theo nghĩa rằng nó có vô hạn các phần tử. Chẳng hạn, nhóm đường tròn có vô hạn các phần tử (chúng là các điểm trên đường tròn). Nhưng nó là một chiều bởi vì tất cả các phần tử của nó có thể được biểu diễn bởi một tọa độ (là góc). Với một nhóm Lie vô hạn chiều, chúng ta cần vô hạn các trục tọa độ để biểu diễn các phần tử của chúng. Kiểu “vô hạn kép” thế này là rất khó hình dung. Nhưng vì những nhóm này cũng xuất hiện trong tự nhiên, do vậy chúng ta cũng cần phải nghiên cứu chúng. Bây giờ tôi sẽ mô tả một ví dụ về một nhóm Lie vô hạn chiều, được gọi là *nhóm vòng*.

Để giải thích nó là gì, trước tiên, ta hãy xét các vòng trong không gian ba chiều. Nói đơn giản, một vòng là một đường cong khép kín, như được vẽ ở bên trái của hình dưới đây. Chúng ta đã thấy nó trước đây khi nói về các nhóm bện (ở đó ta gọi chúng là các “nút”).^[88] Tôi

muốn nhấn mạnh rằng những đường cong không khép kín, như được vẽ ở bên phải của hình vẽ, không được coi là các vòng.



Đây là một vòng



Đây không phải là một vòng

Tương tự, ta cũng có thể xét các vòng (tức là các đường cong khép kín), trong một đa tạp M bất kỳ. Không gian tất cả các vòng như vậy gọi là không gian vòng của M .

Như ta sẽ thảo luận chi tiết hơn trong chương 17, các vòng này đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết dây. Trong vật lý lượng tử thông thường, các đối tượng cơ sở là các hạt cơ bản, như electron hay quark. Chúng là những đối tượng giống như các chất điểm, không có cấu trúc nội tại, tức là có số chiều bằng 0. Trong lý thuyết dây, người ta thừa nhận rằng các đối tượng cơ bản của tự nhiên là các dây một chiều.

^[89] Một dây đóng (khép kín) là một vòng nhúng trong một đa tạp M (không-thời gian). Điều đó giải thích tại sao các không gian vòng lại là nguồn sống của lý thuyết dây.

Bây giờ ta xét không gian vòng của nhóm Lie $SO(3)$. Những phần tử của nó là các vòng trong $SO(3)$. Hãy xét kỹ một trong số những vòng này. Trước hết, nó tương tự như vòng được vẽ ở trên. Thực vậy, vì $SO(3)$ là ba chiều, nên ở thang kích thước nhỏ, nó trông giống như một không gian phẳng ba chiều. Thứ hai, mỗi điểm trên vòng này là một phần tử của $SO(3)$, tức là một phép quay của mặt cầu. Do vậy, vòng của chúng ta là một đối tượng phức tạp: nó là tập hợp các phép quay một tham số của mặt cầu. Cho trước hai vòng như vậy, ta có thể tạo ra vòng thứ ba bằng cách hợp thành các phép quay tương ứng của mặt cầu. Bằng cách đó không gian vòng của $SO(3)$ trở thành một nhóm. Ta gọi nó là nhóm vòng của $SO(3)$.^[90] Đây là một ví dụ điển hình về một nhóm Lie vô hạn chiều: chúng ta không thể biểu diễn các phần tử của nó bằng một số hữu hạn các tọa độ được.^[91]

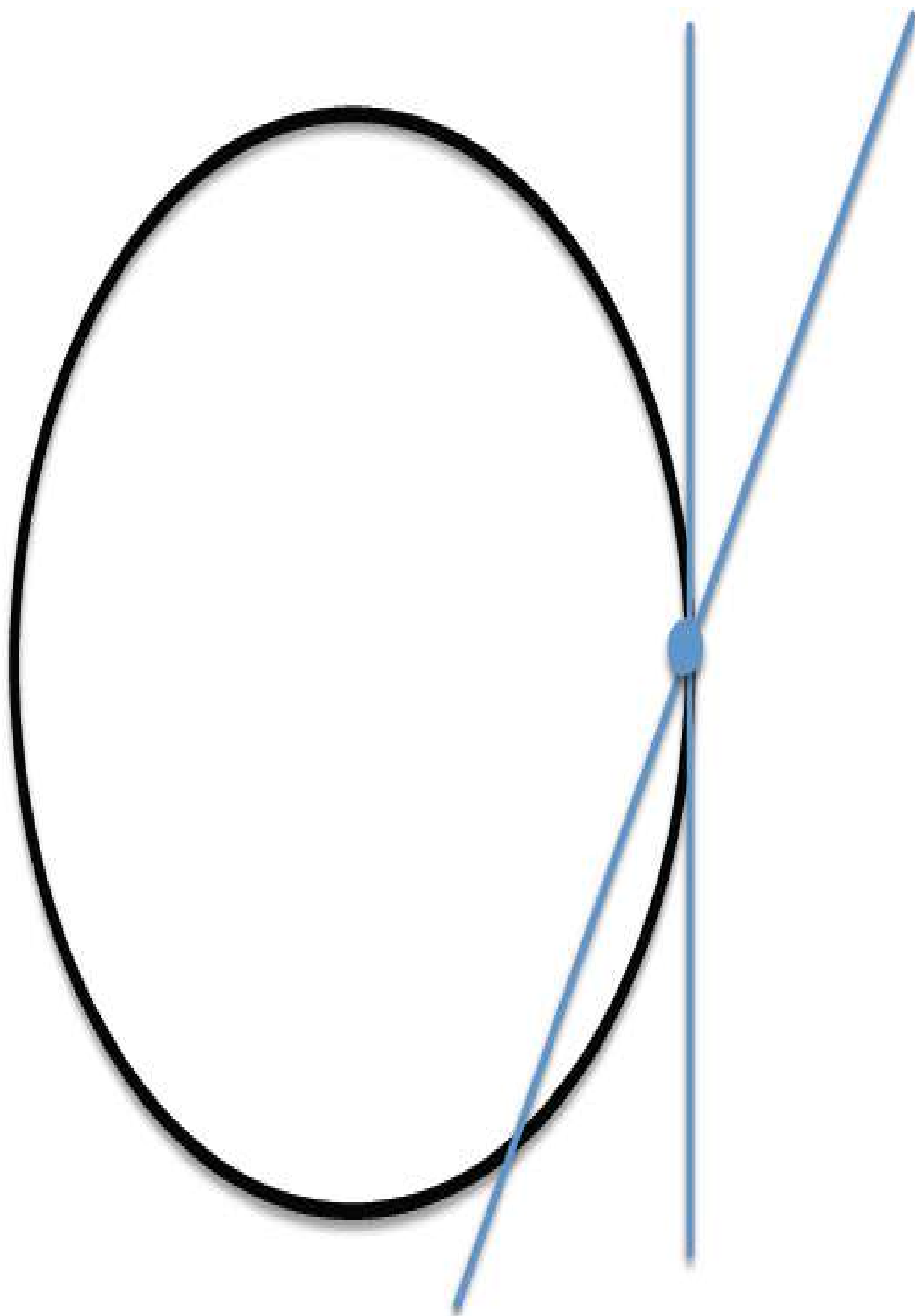
Nhóm các vòng của một nhóm Lie bất kỳ khác (chẳng hạn như nhóm $SO(n)$ các phép quay của mặt siêu cầu) cũng là một nhóm Lie vô hạn chiều. Những nhóm vòng này chính là các nhóm đối xứng trong lý thuyết dây.

Khái niệm thứ hai có liên quan với bài báo của Feigin và Fuchs mà tôi đang nghiên cứu là khái niệm đại số Lie. Theo nghĩa nào đó, mỗi đại số Lie là một phiên bản đơn giản hóa của một nhóm Lie cho trước.

Thuật ngữ “đại số Lie” chắc chắn sẽ gây ra một số nhầm lẫn. Khi nghe từ “đại số”, ta sẽ nghĩ ngay về những thứ được học ở trường phổ thông, như việc giải các phương trình bậc hai, chẳng hạn. Tuy nhiên, bây giờ cụm từ “đại số” lại được sử dụng theo một nghĩa khác, rộng hơn: như một phần không thể tách rời của thuật ngữ “đại số Lie”, liên quan tới các đối tượng toán học có những tính chất cụ thể. Bất kể những gì mà cái tên đó có thể gợi lên, các đối tượng này không tạo thành một họ trong lớp tất cả các đại số, như các nhóm Lie tạo thành một họ trong lớp tất cả các nhóm. Nhưng đừng bận tâm về điều đó, chúng ta đành phải sống chung với sự thiếu nhất quán của hệ thống các thuật ngữ này thôi.

Để giải thích một đại số Lie là gì, trước tiên tôi phải nói với bạn về khái niệm *không gian tiếp xúc*. Đừng lo, chúng ta sẽ không đi quá xa khỏi khái niệm tiếp tuyến đâu; chúng ta sẽ đi theo một trong những ý tưởng then chốt của giải tích gọi là “tuyến tính hóa”, tức là làm xấp xỉ một hình dạng cong bởi những hình dạng tuyến tính, hay phẳng.

Chẳng hạn, không gian tiếp xúc của một đường tròn tại một điểm cho trước là đường thẳng đi qua điểm đó và là đường thẳng gần với đường tròn nhất trong số tất cả các đường thẳng đi qua điểm đó. Chúng ta đã gặp tình huống này trước đây khi nói về số chiều của đường tròn. Đường tiếp tuyến chỉ chạm vào đường tròn ở một điểm cụ thể, và mãi cũng chỉ là hơi chạm thôi, trong khi tất cả các đường thẳng còn lại đi qua điểm này cắt đường tròn ở một điểm khác nữa, như chỉ ra ở hình dưới đây.



Tương tự như vậy, bất kỳ một đường cong nào (tức là, một đa tạp một chiều) ở gần một điểm cho trước cũng đều có thể được tính xấp xỉ bằng một đường tiếp tuyến. René Descartes, người đưa ra một phương pháp hiệu quả để tính toán những đường tiếp tuyến này trong cuốn *Géometrie* (Hình học) công bố năm 1637, viết:^[92] “Tôi dám nói rằng đây không chỉ là bài toán hữu ích và tổng quát nhất trong hình học mà tôi biết, mà thậm chí còn là bài toán trước kia tôi rất muốn biết.” Tương tự như vậy, một mặt cầu ở gần một điểm cho trước, cũng có thể được xấp xỉ bởi một mặt phẳng tiếp xúc. Hãy nghĩ về quả bóng rổ: khi chúng ta đặt nó trên nền nhà, nó sẽ chạm vào nền nhà ở một điểm, và nền nhà trở thành mặt phẳng tiếp xúc của nó tại điểm đó.^[93] Và một đa tạp n -chiều cũng có thể được xấp xỉ, tại một điểm cho trước, bằng một không gian phẳng n -chiều.

Và bây giờ, với một nhóm Lie bất kỳ, ta có một điểm đặc biệt, chính là phần tử đơn vị của nhóm đó. Ta lấy không gian tiếp xúc của nhóm Lie tại điểm này - và đây rồi, đó chính là đại số Lie của nhóm Lie này. Do vậy mỗi nhóm Lie đều có một đại số Lie riêng, nó cũng giống như em gái của nhóm Lie ấy vậy.^[94]

Chẳng hạn, nhóm đường tròn là một nhóm Lie, và phần tử đơn vị của nhóm này là một điểm cụ thể trên đường tròn^[95] tương ứng với góc quay bằng 0. Bởi vậy, đường tiếp tuyến tại điểm này chính là đại số Lie của nhóm đường tròn. Rất tiếc, chúng ta không thể vẽ được hình của nhóm $SO(3)$ và không gian tiếp xúc của nó bởi vì chúng đều là ba chiều. Nhưng lý thuyết toán học mô tả không gian tiếp xúc được thiết lập theo cách có thể vận hành trơn tru cho tất cả các số chiều. Nếu ta muốn hình dung xem mọi thứ vận hành như thế nào, ta có thể mô hình hóa chúng trên các ví dụ một hay hai chiều (giống như một đường tròn hay một mặt cầu). Khi làm như vậy, ta sử dụng các đa tạp với số chiều thấp hơn như một ẩn dụ cho các đa tạp có số chiều cao hơn, phức tạp hơn. Nhưng chúng ta không nhất thiết phải làm như vậy; ngôn ngữ toán học cho phép chúng ta vượt lên trên trực giác hạn chế của mình, về mặt

toán học, đại số Lie của một nhóm Lie n -chiều là một không gian phẳng n -chiều, còn được biết đến như một không gian vector.^[96]

Còn nhiều điều hơn thế nữa. Phép nhân trên một nhóm Lie làm nảy sinh một phép toán trên đại số Lie của nó: cho trước hai phần tử của đại số Lie, ta có thể xây dựng phần tử thứ ba. Những tính chất của phép toán này khó mô tả hơn những tính chất của phép nhân trong một nhóm Lie, và ở thời điểm này chúng cũng không mấy quan trọng đối với chúng ta.^[97] Một ví dụ mà có lẽ đã quen thuộc với những độc giả từng học giải tích vector, đó là phép nhân có hướng trong không gian ba chiều.^[98] Nếu bạn từng thấy phép toán này, bạn có thể bắn khoản về những tính chất trông rất kỳ quặc của nó. Và bạn có đoán được không, chính phép toán này thực sự biến một không gian ba chiều thành một đại số Lie!

Thực tế hóa ra đây chính là đại số Lie của nhóm Lie $SO(3)$. Như vậy, phép toán lấy tích có hướng trông có vẻ lạ lùng kia lại được kế thừa từ quy tắc hợp thành các phép quay của mặt cầu.

Bạn có thể thắc mắc rằng tại sao chúng ta lại phải bận tâm về các đại số Lie nếu như phép toán trên chúng lại có vẻ kỳ quặc như vậy. Mà tại sao nó lại không gắn với các nhóm Lie? Nguyên do chính là bởi vì, không giống với nhóm Lie, thường bị uốn cong (giống như đường tròn, chẳng hạn), một đại số Lie lại là một không gian phẳng (như đường thẳng, mặt phẳng...). Điều này khiến cho việc nghiên cứu các đại số Lie trở nên đơn giản hơn nghiên cứu các nhóm Lie.

Chẳng hạn, ta có thể nói về đại số Lie của các nhóm vòng.^[99] Những đại số Lie này, thứ ta có thể hình dung như là những phiên bản đơn giản hóa của các nhóm vòng, được gọi là các *đại số Kac-Moody*, đặt theo tên của hai nhà toán học: Victor Kac (sinh tại Nga, di cư đến Mỹ, hiện là giáo sư tại MIT) và Robert Moody (sinh tại Anh, di cư sang Canada, và hiện là giáo sư tại Đại học Alberta). Họ bắt đầu nghiên cứu các đại số Lie này độc lập với nhau từ năm 1968. Kể từ đó, lý thuyết về

các đại số Kac-Moody đã trở thành một trong những lĩnh vực “hot” nhất và phát triển mạnh nhất trong toán học.^[100]

Đại số Kac-Moody chính là đề tài Fuchs gợi ý cho nghiên cứu tiếp theo của tôi. Khi bắt đầu học về tất cả những thứ này, tôi tự thấy bản thân sẽ còn phải học rất nhiều trước khi đạt tới ngưỡng có thể tự mình làm được điều gì đó. Nhưng tôi thấy rất hào hứng với đề tài này.

Fuchs sống ở khu vực đông bắc của Moscow, không xa ga xe lửa mà tôi có thể bắt tàu về nhà. Mỗi thứ Sáu tôi thường về nhà nghỉ cuối tuần, do vậy Fuchs bảo tôi đến nhà ông vào lúc 5h chiều, rồi từ đó bắt xe lửa về nhà sau khi gặp mặt. Tôi thường làm việc với ông khoảng ba giờ (và trong thời gian đó ông thường mời tôi ăn tối cùng gia đình), rồi sau đó sẽ bắt chuyến tàu muộn nhất, về đến nhà vào khoảng nửa đêm. Những buổi gặp gỡ như vậy đóng một vai trò quan trọng trong việc học toán của tôi. Chúng tôi gặp nhau hằng tuần, trong suốt kỳ học mùa thu năm 1986, và sau đó là cả kỳ học mùa xuân năm 1987 nữa.

Mãi cho tới tháng 1 năm 1987, tôi mới đọc xong bài báo dài của Feigin và Fuchs và tự cảm thấy mình đã có thể bắt đầu đề tài nghiên cứu. Lúc đó, tôi đã có thể vào thư viện Khoa học Moscow, một nguồn sách báo khổng lồ, không chỉ bằng tiếng Nga (rất nhiều trong số đó cũng có trong thư viện của Kerosinka), mà cả bằng những thứ tiếng khác nữa. Tôi đến đó thường xuyên hơn, mải mê với những tạp chí toán học, tìm kiếm những bài báo về đại số Kac-Moody và cả những chủ đề liên quan.

Tôi cũng rất hăm hở học về những ứng dụng của các đại số này trong vật lý lượng tử, thứ vốn có sức lôi cuốn mạnh mẽ đối với tôi. Như tôi đã nhắc đến ở trên, các đại số Kac-Moody đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết dây, nhưng chúng cũng là những đối xứng của các mô hình vật lý lượng tử hai chiều. Chúng ta sống trong một không gian ba chiều, do vậy những mô hình thực tiễn mô tả thế giới của chúng ta phải là ba chiều. Nếu gộp thêm thời gian vào, ta sẽ có bốn chiều.

Nhưng về mặt toán học, không có gì ngăn trở chúng ta xây dựng và phân tích những mô hình mô tả thế giới với các số chiều khác. Những mô hình có số chiều nhỏ hơn ba thì sẽ đơn giản hơn, và chúng ta có cơ may giải quyết chúng. Sau đó chúng ta có thể sử dụng những gì thu được để tấn công những mô hình ba, bốn chiều phức tạp hơn.

Thực tế, đây là một trong những ý tưởng chính của môn gọi là “vật lý toán” - nghiên cứu những mô hình với số chiều khác nhau, mà không nhất thiết phải áp dụng trực tiếp được vào thế giới vật chất của chúng ta, nhưng lại có chung một số đặc điểm nổi bật với các mô hình thực tiễn.

Một số những mô hình thấp chiều như vậy cũng có nhiều ứng dụng vào thế giới thực. Chẳng hạn, một thanh kim loại rất mỏng có thể được coi như một hệ hai chiều và do đó có thể được mô tả hiệu quả bởi một mô hình hai chiều. Một ví dụ nổi tiếng là mô hình Ising của các hạt tương tác chiếm các nút của một mạng hai chiều. Nghiệm chính xác cho mô hình này, do Lars Onsager đưa ra, đã cung cấp những hiểu biết có giá trị sâu sắc đối với hiện tượng từ hóa tự phát, hay hiện tượng sắt từ. Thứ cốt lõi trong tính toán của Onsager là một đối xứng ẩn giấu của mô hình này, điều này một lần nữa nhấn mạnh vai trò to lớn của đối xứng trong việc tìm hiểu các hệ vật lý. Sau này, người ta hiểu rằng đối xứng đó được mô tả bởi đại số Virasoro, họ hàng gần với đại số Kac-Moody.^[101] (Thực tế, đại số Virasoro là chủ đề chính trong bài báo của Feigin và Fuchs mà tôi đang đọc.) Cũng có một lớp lớn các mô hình kiểu này, trong đó những đối xứng được mô tả bởi đại số Kac-Moody là rất thích hợp. Lý thuyết toán học của đại số Kac-Moody là cực kỳ quan trọng để hiểu về những mô hình này.^[102]

Thư viện tại Kerosinka đặt mua một ấn phẩm có tên là *Referativny Zhurnal*, một tạp chí tham khảo. Tạp chí này, công bố hằng tháng, có những bài điểm ngắn gọn tất cả các bài báo mới, được viết bằng tất cả các thứ tiếng, được sắp xếp theo các chủ đề, mỗi bài báo có một đoạn

tóm tắt ngắn. Tôi bắt đầu đọc tạp chí này đều đặn, và hóa ra nó lại là một nguồn quan trọng biết nhường nào! Mỗi tháng một tập về các bài báo mới lại được in, và tôi lục lọi trong những mục phù hợp để tìm xem có gì đó mà mình quan tâm không. Nếu tìm thấy thứ gì đó có vẻ hấp dẫn, tôi sẽ ghi lại tên tài liệu tham khảo này, để lần sau đến thư viện tôi sẽ mượn đọc. Bằng cách này, tôi đã khám phá ra rất nhiều điều thú vị.

Một hôm, trong khi lật giở tạp chí *Referativny Zhurnal*, tôi tình cờ bắt gặp một bài điểm cho bài báo của nhà toán học Nhật Bản, Minoru Wakimoto, được công bố trong tạp chí *Communications in Mathematical Physics*, một trong những tạp chí về vật lý toán mà tôi theo dõi rất sát. Bài điểm này không nói nhiều, nhưng nhan đề của nó nhắc đến đại số Kac-Moody gắn với nhóm các phép quay của mặt cầu, tức nhóm $SO(3)$, do đó tôi ghi lại tên tài liệu tham khảo này và trong lần ghé tiếp theo vào thư viện khoa học, tôi liền đọc bài báo đó.

Trong bài báo, tác giả xây dựng những thực hiện mới của đại số Kac-Moody gắn với $SO(3)$. Để xem thực chất những thực hiện đó là gì, tôi sẽ sử dụng ngôn ngữ của vật lý lượng tử (vật lý có liên quan ở đây là bởi vì các đại số Kac-Moody mô tả những đối xứng của các mô hình thuộc vật lý lượng tử). Những mô hình lượng tử hiện thực, giống như những mô hình mô tả tương tác của các hạt cơ bản, là khá phức tạp. Nhưng chúng ta có thể xây dựng những mô hình lý tưởng hóa, đơn giản hơn, gọi là “những mô hình trường tự do”, trong đó không có hay gần như không có tương tác nào cả. Những trường lượng tử trong các mô hình này là “tự do” đối với nhau, nên mới có tên gọi như thế.^[103] Thường thì ta có thể thực hiện một mô hình lượng tử phức tạp, do đó mà thú vị hơn, ở bên trong một trong những mô hình trường tự do này. Điều này cho phép chúng ta mổ xẻ và phân tích cấu trúc những mô hình phức tạp, và thực hiện các tính toán mà không làm được ở những mô hình khác. Kết quả là những thực hiện như thế trở nên rất hữu ích. Tuy nhiên, vì những mô hình lượng tử gắn với đại số Kac-Moody là các đối xứng, nên các ví dụ đã biết về những thực hiện trường tự do như thế là rất giới hạn.

Khi đọc bài báo của Wakimoto, tôi nhận thấy ngay rằng kết quả này có thể được diễn giải như là việc gán một thực hiện trường tự do rộng nhất có thể cho trường hợp đại số Kac-Moody đơn giản nhất, gán với $SO(3)$. Tôi hiểu được tầm quan trọng của kết quả này, và nó đã khiến tôi tự hỏi: thực hiện này đến từ đâu? Có cách nào để tổng quát hóa nó cho các đại số Kac-Moody khác hay không? Tôi cảm thấy đã sẵn sàng để giải đáp những câu hỏi này.

Làm sao để mô tả hết sự phấn khích mà tôi cảm thấy khi nhìn thấy công trình đẹp đẽ này và nhận ra được tiềm năng của nó? Tôi đoán nó cũng giống như khi, sau một hành trình dài, một đỉnh núi sừng sững đột nhiên xuất hiện. Bạn sẽ sờ tới ngộp thở, bị hút vào vẻ đẹp hùng vĩ của nó, và tất cả những gì bạn có thể thốt ra là “Ồ!”. Đó là khoảnh khắc thiên khai. Nhưng bạn còn chưa lên được tới đỉnh, thậm chí vẫn chưa biết những trở ngại sắp phải đối mặt, nhưng sức quyến rũ của đỉnh núi ấy là không thể cưỡng lại, và bạn tưởng tượng chính mình đang đứng trên đỉnh núi đó. Nó đang đón chờ bạn chinh phục. Nhưng liệu bạn có đủ mạnh mẽ và thể lực dẻo dai để làm điều đó hay không?

Chương 11

CHINH PHỤC ĐỈNH CAO

Tới mùa hè, tôi đã sẵn sàng để chia sẻ những gì mình phát hiện được với Fuchs. Tôi biết rằng, cũng như tôi, chắc ông sẽ rất phấn khích với bài báo của Wakimoto. Tôi đến tìm Fuchs ở căn biệt thự ngoại ô, nhưng vừa tới nơi, ông nói rằng có một chút khó xử nho nhỏ: ông đã chót hẹn gặp tôi và một đồng nghiệp khác, một học trò cũ của ông, tên là Boris Feigin vào cùng một ngày - ông nói rằng mình hoàn toàn vô ý, dù tôi không tin lắm (mãi sau này Fuchs mới thú nhận rằng chuyện đó thực sự là có chủ ý).

Một vài tháng trước, Fuchs đã giới thiệu tôi với Feigin. Cuộc gặp gỡ xảy ra trước buổi seminar của Gelfand, ngay sau khi tôi hoàn thành bài báo của mình về nhóm bện và bắt đầu đọc bài báo của Feigin và Fuchs. Được Fuchs gợi ý, tôi xin Feigin vài lời khuyên nên đọc cái gì khác nữa. Boris Lvovich, như sau này tôi gọi anh, lúc ấy mới ba mươi ba tuổi nhưng đã là một trong những ngôi sao sáng nhất trong cộng đồng toán học Moscow. Mặc quần jean và đi đôi giày sòn rách, trông anh có vẻ hơi nhút nhát. Với cặp kính dày và lớn che kín đôi mắt, trong suốt thời gian nói chuyện với tôi, anh hơi cúi xuống để tránh bắt gặp ánh mắt tôi. Khởi cần phải nói, tôi cũng nhút nhát và không quá tự tin vào bản thân: tôi vẫn còn là một cậu sinh viên, còn anh đã là một nhà toán học nổi tiếng kia mà. Do đó đây chắc chắn không phải là cuộc gặp gỡ thú vị nhất. Nhưng thi thoảng, anh lại ngược mắt lên nhìn tôi với nụ cười thân ái, khiến không khí cuộc gặp mặt trở nên dễ chịu hẳn. Tôi có thể cảm thấy được sự nhân hậu chân thành của anh.

Tuy nhiên, lời khuyên ban đầu của! Feigin làm tôi giật nảy mình: anh khuyên tôi nên đọc cuốn *Statistical Physics* (Cơ học thống kê) của Landau và Lifshitz, một viễn cảnh mà lúc đó tôi thấy hết sức sợ hãi, một phần vì sự trùng hợp, về kích thước và khối lượng, của cuốn sách dày cộp này với cuốn sách giáo khoa về lịch sử Đảng cộng sản mà tất cả chúng tôi phải học ở trường.

Theo những lập luận của Feigin thì đây là một lời khuyên rất có cơ sở - cuốn sách này thực sự quan trọng, và cuối cùng thì nghiên cứu của tôi sau này chuyển chính xác sang hướng đó (mặc dù tôi rất hổ thẹn phải thừa nhận mình vẫn chưa đọc cuốn sách). Nhưng lúc ấy, ý tưởng này không khiến tôi quan tâm lắm, và có lẽ đây cũng là một phần nguyên nhân khiến cho cuộc trò chuyện đầu tiên của chúng tôi không đi tới đâu cả. Thực tế, tôi không nói chuyện lần nào nữa với Feigin, ngoài mấy câu “chào hỏi” khi gặp anh ở seminar của Gelfand, cho tới ngày hôm đó ở căn biệt thự ngoại ô của Fuchs.

Ngay sau khi tôi đến, qua cửa sổ tôi nhìn thấy Feigin đang nhảy xuống từ chiếc xe đạp. Sau khi chào hỏi và nói vài câu chuyện vu vơ, chúng tôi ngồi xuống quanh một chiếc bàn tròn trong bếp và Fuchs hỏi tôi, “Sao, cậu có gì mới nào?”

“Vâng... em đã tìm thấy bài báo thú vị này của một nhà toán học người Nhật tên là Wakimoto.”

“Hừm...” Fuchs quay sang Feigin: “Cậu có biết nó không?”

Feigin lắc đầu tỏ ý không, và Fuchs nói với tôi, “Cậu ta luôn biết về mọi thứ... nhưng thật tốt khi cả cậu ấy cũng chưa biết đến bài báo này - sẽ thú vị hơn nếu cậu ấy nghe cậu trình bày.”

Tôi bắt đầu trình bày công trình của Wakimoto cho cả hai người. Đây là lần đầu tiên tôi có cơ hội thảo luận chuyên sâu các khái niệm toán học với Feigin, và ngay lập tức tôi cảm thấy chúng tôi khá ăn ý với nhau. Anh chăm chú lắng nghe và đặt những câu hỏi rất tinh tế. Rõ ràng là anh hiểu được tầm quan trọng của công trình này, thậm chí dù cố tỏ vẻ thật thoải mái và bình thản, nhưng trông anh vẫn khá phấn

khích. Fuchs hầu như chỉ ngồi nhìn, nhưng tôi chắc rằng ông rất hạnh phúc vì kế hoạch bí mật giúp tôi và Feigin làm quen với nhau đã thành công mỹ mãn. Đó thực sự là một buổi trò chuyện hết sức ấn tượng. Tôi cảm thấy mình đang ở rất gần một điều gì đó quan trọng.

Có vẻ như Fuchs cũng cảm thấy như thế. Khi tôi ra về, ông bảo tôi: “Làm tốt lắm. Tôi ước rằng đó là bài báo của cậu. Nhưng tôi nghĩ giờ cậu đã sẵn sàng để nâng nó lên một tầm cao mới.”

Tôi trở về nhà và tiếp tục nghiên cứu các câu hỏi nảy ra từ bài báo của Wakimoto. Wakimoto không đưa ra bất kỳ lời giải thích nào cho các công thức của ông. Tôi đang phải làm một công việc chẳng khác gì công tác điều tra của tòa án vậy - đó là cố gắng lần tìm dấu vết của bức tranh lớn nằm đằng sau những công thức của Wakimoto.

Vài ngày sau, bức tranh ấy bắt đầu lộ diện. Trong một thời khắc lóe sáng của trí tuệ, khi đang đi lòng vòng quanh phòng ngủ của mình, tôi nhận ra rằng các công thức của Wakimoto bắt nguồn từ hình học. Đây là một phát kiến gây sửng sốt vì cách tiếp cận của Wakimoto là hoàn toàn đại số - không có gì gọi mở tới hình học cả.

Để giải thích cho cách hiểu hình học của tôi, hãy cùng ôn lại nhóm Lie $SO(3)$, nhóm đối xứng của mặt cầu và các nhóm vòng của nó. Như đã giải thích trong chương trước, mỗi phần tử thuộc nhóm vòng của $SO(3)$ là một tập hợp các phần tử của $SO(3)$, một phần tử của $SO(3)$ cho mọi điểm trên vòng. Mỗi phần tử của $SO(3)$ tác động lên mặt cầu bằng một phép quay cụ thể. Điều này ngụ ý rằng mỗi phần tử thuộc nhóm vòng của $SO(3)$ làm nảy sinh một đối xứng từ không gian vòng của mặt cầu đang xét.^[104]

Tôi nhận ra rằng có thể sử dụng thông tin này để thu được một biểu diễn của đại số Kac-Moody gắn với $SO(3)$. Tuy vậy, điều này vẫn còn chưa mang lại cho ta công thức của Wakimoto. Để thu được chúng, ta phải chỉnh sửa các công thức theo một cách khá triệt để. Hãy nghĩ về nó như việc lộn một chiếc áo choàng từ trong ra ngoài. Chúng ta có thể làm điều này với bất kỳ chiếc áo nào, nhưng trong hầu hết các trường

hợp, chiếc áo khi đó sẽ không thể dùng được nữa - ta không thể mặc nó ở nơi công cộng. Tuy nhiên, vẫn có những chiếc áo có thể mặc được cả hai mặt. Và những công thức của Wakimoto cũng giống như thế.

Được trang bị những hiểu biết mới này, tôi ngay lập tức cố gắng tổng quát hóa các công thức của Wakimoto cho những đại số Kac-Moody khác, phức tạp hơn. Bước hình học đầu tiên vận hành trơn tru, cũng giống như trong trường hợp $SO(3)$. Nhưng khi tôi cố gắng “lộn các công thức đó từ trong ra ngoài”, thì chỉ thu được những thứ vô nghĩa. Thứ toán học thu được đơn giản là phi lý. Tôi vầy vò đủ kiểu với các công thức này nhưng vẫn không thể tìm thấy cách vượt qua được vấn đề. Tôi còn phải tính đến khả năng rất thực tế là cách xây dựng này chỉ phù hợp với $SO(3)$ chứ không thỏa mãn đối với các đại số Kac-Moody tổng quát. Không có cách nào để biết chắc chắn vấn đề này có lời giải hay không, và nếu có, liệu có thể thu được lời giải đó từ các phương tiện sẵn có hay không. Tôi chỉ biết mình cần phải làm việc chăm chỉ nhất có thể và hy vọng điều tốt nhất sẽ đến.

Một tuần trôi qua, và đã đến lúc tôi gặp lại Fuchs. Tôi định nói với ông về những tính toán của mình và xin ông lời khuyên. Khi tôi đến căn biệt thự của ông, Fuchs nói với tôi rằng vợ ông phải đi Moscow để lo mấy việc lặt vặt, và ông phải ở nhà trông hai cô con gái nhỏ.

“Nhưng cậu biết không,” ông nói, “hôm qua Feigin đã tới đây và cậu ta hoàn toàn phấn khích về những gì mà cậu trình bày tuần trước. Tại sao cậu không đến gặp cậu ấy - nhà cậu ấy chỉ cách đây mười lăm phút thôi. Tôi đã nói với cậu ấy là sẽ bảo cậu đến đó hôm nay, có lẽ cậu ấy đang chờ đấy.”

Sau khi nghe ông chỉ đường, tôi đi đến nhà của Feigin.

Quả thật, Feigin đang mong ngóng tôi đến. Anh thân thiện chào đón tôi và giới thiệu với tôi Inna, người vợ rất quyến rũ của anh và ba người con: hai cậu bé hiếu động Roma và Zhenya, tám và mười tuổi, cùng cô con gái Lisa hai tuổi rất đáng yêu. Lúc đó, tôi không thể biết

rằng mình sẽ rất thân thiết với gia đình tuyệt vời này trong nhiều năm sắp tới.

Vợ của Feigin mang cho chúng tôi trà và ít bánh, sau đó hai chúng tôi ngồi ở hiên nhà. Đó là một buổi chiều hè thật đẹp, các tia nắng lấp ló qua kẽ lá, chim chóc hót líu lo, cảnh đồng quê thật thơ mộng. Nhưng dĩ nhiên, cuộc trò chuyện nhanh chóng chuyển sang công trình của Wakimoto.

Hóa ra Feigin cũng suy nghĩ về nó, và theo hướng tương tự với tôi. Thực tế, ngay từ đầu cuộc nói chuyện, về cơ bản chúng tôi luôn nói tiếp ý của nhau. Đó là một cảm giác đặc biệt: anh ấy hoàn toàn hiểu tôi, và tôi cũng hiểu anh ấy.

Tôi bắt đầu nói với anh về thất bại trong việc tổng quát hóa cách xây dựng trên cho các đại số Kac-Moody khác. Feigin chăm chú lắng nghe, và sau một vài phút ngồi im lặng suy tư, anh chỉ ra điểm quan trọng mà tôi đã bỏ qua. Trong khi cố gắng tổng quát hóa cách xây dựng của Wakimoto, chúng tôi cần phải tìm được một tổng quát hóa thích hợp cho mặt cầu - đa tạp mà trên đó $SO(3)$ bị tác động bởi các đối xứng. Trên thực tế, trong trường hợp của $SO(3)$, sự lựa chọn này là duy nhất. Nhưng với những nhóm khác thì có nhiều lựa chọn khác. Trong những tính toán của mình, tôi mặc nhiên coi rằng những tổng quát hóa tự nhiên của mặt cầu là không gian xạ ảnh. Nhưng điều đó không nhất thiết là đúng; thực tế việc tôi làm không đi tới đâu cả có thể chỉ vì sự lựa chọn các không gian của tôi là quá nghèo nàn.

Như tôi giải thích ở trên, cuối cùng, tôi cần phải “lộn công thức từ trong ra ngoài”. Toàn bộ cách xây dựng này phụ thuộc vào hy vọng rằng, như có phép màu, những công thức thu được vẫn còn đúng. Đó là điều đã xảy ra trong trường hợp của Wakimoto, đối với nhóm đơn giản nhất là $SO(3)$. Những tính toán của tôi chỉ ra rằng, đối với các không gian xạ ảnh, thì điều đó không còn đúng nữa, nhưng như thế không có nghĩa là không thể tìm thấy những cách xây dựng tốt hơn. Thay vì thế, Feigin đã khuyên tôi hãy thử với các đa tạp cò. ^[105]

Đa tạp cở đối với nhóm $SO(3)$ là mặt cầu quen thuộc, do vậy đối với những nhóm khác, các không gian này có thể được xem như sự thay thế tự nhiên cho mặt cầu. Nhưng các đa tạp cở thì phong phú hơn và linh hoạt hơn các không gian xạ ảnh, do đó cách xây dựng tương tự như của Wakimoto có thể có cơ may phù hợp với chúng.

Trời trở nên tối dần, và đã đến lúc tôi phải về nhà. Chúng tôi thỏa thuận sẽ gặp lại nhau vào tuần tới, sau đó tôi chào tạm biệt gia đình Feigin rồi quay trở ra ga.

Trên chuyến tàu về nhà, trong một khoang tàu trống vắng, với những cánh cửa sổ mở toang trong không khí nóng ẩm mùa hè, tôi không thể ngừng suy nghĩ về vấn đề này. Tôi phải thử làm nó, ngay tại đây thôi. Lấy ra một cái bút và một tập giấy, tôi bắt đầu viết ra các công thức cho những đa tạp cở đơn giản nhất. Chiếc tàu cũ, giạt liên hồi với những âm thanh đứt đoạn, làm tôi không thể giữ chắc được bút, khiến các công thức viết ra cứ loạn hết cả lên. Tôi thậm chí không thể đọc được những gì mình đã viết ra nữa. Nhưng trong quá trình hỗn loạn ấy, có một mẫu hình xuất hiện. Các đa tạp cở khiến mọi thứ hoạt động tốt hơn những không gian xạ ảnh mà tôi đã cố nắm bắt nhưng thất bại trong tuần trước.

Thêm một vài dòng tính toán nữa... và rồi Eureka! Nó đã vận hành. Các công thức “lộn từ trong ra ngoài” đã vận hành trơn tru như trong công trình của Wakimoto vậy. Cách xây dựng được tổng quát hóa này thật đẹp. Tôi ngập tràn trong vui sướng: điều này thật quá tuyệt vời. Tôi làm được rồi, tôi đã tìm được những thực hiện trường tự do mới của các đại số Kac-Moody!

Buổi sáng hôm sau, tôi cẩn thận kiểm tra lại những tính toán của mình. Mọi thứ đều ỔN. Nhà của Feigin không có điện thoại, do vậy tôi không thể gọi và báo cho anh những phát hiện mới của mình. Tôi đành viết ra dưới dạng một lá thư, định bụng khi gặp lại nhau vào tuần tới, tôi sẽ nói với anh về những kết quả mới của mình.

Đây là khởi đầu cho sự hợp tác của chúng tôi. Anh trở thành thầy tôi, người hướng dẫn của tôi, nhà cố vấn và là bạn tôi. Ban đầu tôi gọi anh là Boris Lvovich, theo kiểu Nga đã lỗi thời, kèm theo họ cha. Nhưng sau này anh yêu cầu tôi nên đổi sang cách gọi thân mật hơn là Borya.

Tôi đã vô cùng may mắn với những người thầy của mình. Evgeny Evgenievich chỉ cho tôi nhận thấy được vẻ đẹp của toán học, và khiến tôi yêu thích nó. Ông cũng giúp tôi học được những điều cơ bản. Fuchs cứu giúp tôi sau tai họa ở kỳ thi vào MGU, để bắt đầu sự nghiệp toán học chập chững của mình. Ông dẫn dắt tôi vượt qua dự án toán học nghiêm túc đầu tiên, qua đó mang lại cho tôi sự tự tin vào khả năng của mình, và hướng tôi tới một lĩnh vực nghiên cứu đầy sôi động ở ranh giới giữa toán học và vật lý. Cuối cùng, tôi đã sẵn sàng cho những cuộc chinh phục đỉnh cao. Borya đã chứng tỏ là người hướng dẫn tốt nhất mà tôi có thể mơ thấy ở giai đoạn đó trong hành trình của mình. Đường như sự nghiệp toán học của tôi bắt đầu được tăng tốc mạnh hơn.

Không nghi ngờ gì nữa, Borya Feigin là một trong những nhà toán học độc đáo nhất cùng thế hệ trên toàn thế giới, một người mơ mộng với sự nhạy cảm toán học sâu sắc nhất. Anh đã dẫn tôi qua những xứ sở diệu kỳ của toán học hiện đại, chứa đựng đầy những vẻ đẹp huyền bí, và hài hòa đến tuyệt vời.

Bây giờ khi đã có những học trò riêng của mình, tôi mới đánh giá hết những gì mà Borya làm cho tôi (và cả những gì mà Evgeny Evgenievich và Fuchs đã làm cho tôi trước đó nữa). Làm thầy giáo quả là một công việc khó nhọc! Tôi đoán, về nhiều mặt, thì nó cũng giống như việc có con cái vậy. Bạn phải hy sinh rất nhiều, mà không đòi hỏi phải được đền đáp lại gì cả. Dĩ nhiên, phần thưởng cho bạn đôi khi lại rất to lớn. Nhưng bằng cách nào bạn chọn được hướng đi cho sinh viên, khi nào chìa cho họ bàn tay giúp đỡ, và khi nào thì ném họ xuống nước sâu và để cho họ tự học bơi? Thì đây chính là một nghệ thuật. Không ai có thể dạy cho bạn cách làm điều đó.

Borya quan tâm sâu sắc tới tôi và sự tiến bộ toán học của tôi. Anh không bao giờ clù cho tôi phải làm gì, nhưng nói chuyện với anh và học hỏi từ anh luôn mang lại cho tôi cảm nhận về hướng đi. Bằng cách nào đó, anh có thể đảm bảo chắc chắn rằng tôi luôn biết mình muốn làm gì tiếp theo. Và, với anh ở bên cạnh, tôi luôn cảm thấy tự tin rằng mình đang đi đúng hướng. Tôi rất may mắn vì có người thầy như anh.

Lúc ấy, kỳ học mùa thu năm 1987, năm thứ tư của tôi ở Kerosinka, bắt đầu. Tôi đã mười chín tuổi, và cuộc sống của tôi chưa bao giờ hưng phấn hơn thế. Tôi vẫn sống trong ký túc xá, lang thang với bạn bè, bắt đầu yêu... Nhưng tôi vẫn duy trì nề nếp học tập của mình. Nhưng vào thời điểm đó, tôi bỏ hầu hết các bài giảng trên lớp và tự học thi (đôi khi chỉ vài ba ngày trước khi thi). Tôi vẫn thường nhận được điểm A - chỉ có một ngoại lệ là điểm B ở môn Kinh tế chính trị Marxist (thật xấu hổ).

Tôi giữ bí mật với hầu hết mọi người rằng tôi có “một cuộc sống khác” - cuộc sống đã lấy đi hầu hết thời gian và sinh lực của tôi - đó là công việc nghiên cứu toán học của tôi với Borya.

Tôi thường gặp Borya hai lần một tuần. Công việc chính thức của anh là ở viện Vật lý chất rắn, nhưng anh không phải làm nhiều ở đó, và chỉ cần có mặt ở viện một lần mỗi tuần. Vào những ngày khác, anh có thể làm việc ở căn hộ của mẹ anh, cách nhà anh độ mười phút đi bộ. Nó cũng gần với Kerosinka và ký túc xá của tôi. Đó cũng là nơi chúng tôi thường gặp gỡ. Tôi thường đến vào buổi sáng muộn hoặc buổi chiều sớm, và chúng tôi sẽ làm việc với dự án của mình, đôi khi là cả ngày. Buổi tối mẹ của Borya mới đi làm về, bà nấu bữa tối cho chúng tôi, và chúng tôi cùng nhau ra về vào khoảng 9 hay 10 giờ tối.

Bước đầu tiên trong công việc là tôi và Borya phải viết một bài tóm lược ngắn về những kết quả của chúng tôi và gửi cho tạp chí *Russian Mathematical Surveys* (Tổng quan toán học Nga). Nó được công bố sau chưa đầy một năm, thế là khá nhanh so với chuẩn chung

của các tạp chí toán học.^[106] Sau khi hoàn thành bước đầu tiên, Borya và tôi tập trung phát triển tiếp đề tài của mình. Cách xây dựng của chúng tôi rất thuyết phục, và nó mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới. Chúng tôi sử dụng những kết quả này để hiểu sâu hơn về biểu diễn của các đại số Kac-Moody. Công trình của chúng tôi cũng cho phép phát triển một thực hiện trường tự do của các mô hình lượng tử hai chiều. Điều này cho phép chúng tôi thực hiện các tính toán trong các mô hình này mà trước đây không thể làm được, kết quả là chẳng bao lâu sau các nhà vật lý rất quan tâm tới công trình của chúng tôi.

Đó là khoảng thời gian đầy phấn khích. Vào những ngày tôi và Borya không gặp nhau, tôi làm việc một mình - ở Moscow trong tuần và ở nhà vào những ngày cuối tuần. Tôi tiếp tục đến thư viện khoa học rồi đọc ngẫu nhiên sách và những bài báo về các chủ đề có liên quan. Tôi như đang sống, ăn và uống cùng những chủ đề này. Như thế tôi đắm chìm trong vũ trụ song song đẹp đẽ này, và muốn ở đó, ngày càng chìm sâu vào giấc mơ ấy. Với mỗi khám phá mới, mỗi ý tưởng mới, thế giới diệu kỳ này lại càng trở nên thân thuộc với tôi.

Nhưng mùa thu năm 1988, khi bước vào năm thứ năm, và cũng là năm học cuối cùng ở Kerosinka, tôi bị kéo trở lại với thực tại. Đây là thời điểm để bắt đầu nghĩ về tương lai. Mặc dù tôi đứng đầu lớp nhưng tương lai của tôi lại có vẻ rất ảm đạm. Chủ nghĩa bài Do Thái loại bỏ hết những trường sau đại học và những công việc tốt nhất sẵn có cho các tân cử nhân. Không có hộ khẩu Moscow, thì mọi chuyện lại còn rắc rối hơn nữa. Ngày phán xử đang đến rất gần.

Chương 12

CÂY TRI THỨC

Mặc dù biết mình sẽ không bao giờ được phép theo đuổi một nghề nghiệp hàn lâm, tôi vẫn tiếp tục làm toán. Mark Saul có nói về chuyện này trong bài báo của anh [\[107\]](#), (có nhắc tới tôi qua tên gọi thân mật là Edik):

Điều gì thúc đẩy Edik và những người khác tiếp tục theo đuổi đam mê, giống như rất nhiều chú cá hồi bơi ngược dòng? Có quá nhiều dấu hiệu chỉ ra rằng sự kỳ thị họ phải đối diện ở bậc đại học sẽ tiếp tục diễn ra trong nghề nghiệp sau này của họ. Vậy thì tại sao họ vẫn ráo riết chuẩn bị và sẵn sàng đương đầu với những thử thách như vậy cho sự nghiệp toán học?

Tôi không hề trông mong nhận lại gì ngoài niềm vui thuần túy và niềm đam mê theo đuổi tri thức. Tôi muốn dành trọn cuộc đời mình cho toán học đơn giản chỉ vì tôi thích làm toán.

Trong cuộc sống tù hãm trì trệ của thời kỳ Xô viết, những tài năng trẻ không thể sử dụng hết năng lực của họ vào kinh doanh; nền kinh tế lúc này không có thành phần tư nhân. Thay vào đó, nó được đặt dưới sự kiểm soát chặt chẽ của chính phủ. Cũng như thế, hệ tư tưởng cộng sản kiểm soát việc theo đuổi tri thức trong các lĩnh vực khoa học nhân văn, kinh tế, và khoa học xã hội. Mọi cuốn sách hay báo chí nghiên cứu trong các lĩnh vực này đều phải bắt đầu với các câu trích dẫn từ Marx, Engels, Lenin, và phải tuyệt đối ủng hộ quan điểm Marxist về lĩnh vực đó. Chẳng hạn, cách duy nhất để viết một bài báo về triết học nước ngoài, là phải trình bày nó như một sự phê phán “những quan điểm tư sản phản động” của các triết gia. Những ai không làm theo các quy tắc

ngghiêm ngặt đó sẽ bị quy chụp và ngược đãi. Điều tương tự cũng xảy ra với nghệ thuật, âm nhạc, văn học và điện ảnh. Bất kỳ thứ gì có thể được coi là phê phán - dù là rất xa xôi - xã hội, chính trị hay lối sống Xô viết hoặc đơn giản là đi chệch khỏi các tiêu chuẩn của “chủ nghĩa hiện thực xã hội chủ nghĩa” đều bị kiểm duyệt gắt gao. Những nhà văn, nhạc sĩ, và đạo diễn dám đi theo quan điểm nghệ thuật riêng đều bị ngăn cấm, và những tác phẩm của họ thì bị bỏ xó hoặc tiêu hủy.

Rất nhiều lĩnh vực khoa học bị chi phối bởi đường lối của Đảng. Chẳng hạn, di truyền học bị cấm trong rất nhiều năm bởi vì những khám phá của nó cho thấy sự mâu thuẫn với lời dạy của chủ nghĩa Marx. Thậm chí ngôn ngữ học cũng không phải là ngoại lệ: sau khi Stalin, người tự cho mình là một chuyên gia trong lĩnh vực này (cũng như nhiều lĩnh vực khác), viết bài tiểu luận đáng xấu hổ *On Certain Questions of Linguistics* (Về một số vấn đề đích thực của ngôn ngữ học), toàn bộ lĩnh vực này bị quy giản về việc giải thích luận thuyết đa phần là vô nghĩa đó. Những ai không đi theo luận thuyết ấy đều bị trấn áp.

Trong môi trường như vậy, toán học và vật lý là các ốc đảo của tự do. Mặc dù các thành viên trong bộ máy lãnh đạo của Đảng cộng sản muốn kiểm soát mọi phương diện của đời sống, nhưng đây lại là những lĩnh vực quá trừu tượng và khó hiểu đối với họ. Như Stalin chẳng hạn, ông ta không bao giờ dám tuyên bố gì về toán học cả. Cùng lúc ấy, các nhà lãnh đạo Xô viết cũng nhận ra tầm quan trọng của hai lĩnh vực có vẻ mù mờ và bí truyền này trong việc phát triển vũ khí hạt nhân, đó là lý do tại sao họ không muốn làm xáo trộn những lĩnh vực ấy. Kết quả là, các nhà toán học và vật lý lý thuyết làm việc trong dự án bom nguyên tử (có lẽ tôi nên nói thêm rằng, rất nhiều trong số họ làm miễn cưỡng) đều được khoan thứ, một số thậm chí còn được các Anh Lớn đối xử rất tốt.

Như vậy, một mặt thì toán học thực sự trừu tượng và không tồn kém, nhưng mặt khác, nó lại hữu ích trong những lĩnh vực mà các nhà

lãnh đạo Xô viết quan tâm sâu sắc - đặc biệt là trong quốc phòng, lĩnh vực đảm bảo sự tồn tại của chế độ. Điều đó giải thích tại sao hầu hết các nhà toán học lại được cho phép nghiên cứu một cách hào phóng và không phải chịu những hạn chế mà người ta áp đặt lên những ngành khác (trừ phi họ dính dáng đến chính trị, như với “Lá thư của 99 người” mà tôi đã đề cập đến ở trên).

Tôi tin rằng đó là lý do chính khiến cho nhiều sinh viên trẻ tài năng chọn toán học làm nghề nghiệp. Đây là một lĩnh vực mà ở đó họ có thể tự do theo đuổi tri thức.

Nhưng cho dù có đam mê và yêu thích toán học đến thế nào đi nữa thì tôi cũng cần phải có một công việc. Bởi vậy, song song với công việc chính là nghiên cứu toán học, mà tôi bí mật thực hiện với Borya, tôi vẫn phải thực hiện một vài nghiên cứu “chính thức” ở Kerosinka.

Thầy hướng dẫn của tôi ở Kerosinka là Yakov Isaevich Khurgin, giáo sư khoa Toán ứng dụng, một trong những thành viên có sức lôi cuốn đặc biệt và đáng kính nhất trong khoa. Là một cựu học trò của Gelfand, Yakov Isaevich khi ấy đã gần bảy mươi tuổi nhưng lại là một trong những giáo sư “chất” nhất mà chúng tôi có. Nhờ phong cách giảng bài cuốn hút và khiếu hài hước, lớp của ông luôn có đông sinh viên theo học nhất. Mặc dù tôi bỏ gần hết những bài giảng trên lớp từ năm thứ ba, nhưng tôi vẫn luôn cố gắng đến nghe những bài giảng của ông về lý thuyết xác suất và thống kê. Tôi bắt đầu làm việc với ông vào năm học thứ ba ấy.

Yakov Isaevich rất tử tế với tôi. Ông đảm bảo để tôi được đối xử tốt, và bất cứ khi nào tôi cần giúp đỡ, ông cũng luôn sẵn sàng. Chẳng hạn, khi tôi gặp chút rắc rối ở ký túc, ông đã dùng ảnh hưởng của mình để can thiệp. Yakov Isaevich là một người thông minh, ông đã học được cách “làm việc với chế độ”: mặc dù là người Do Thái, nhưng ông đã có được một vị trí uy tín ở Kerosinka, là giáo sư và là người đứng

đầu một phòng thí nghiệm hoạt động trong các lĩnh vực từ thăm dò dầu khí cho tới y học.

Ông còn là cây bút nổi tiếng về toán học thường thức, có nhiều cuốn sách bán chạy về đề tài toán học cho những người không chuyên. Tôi đặc biệt thích một cuốn trong số đó, với nhan đề: *So What?* (Thế thì sao?) Nó là cuốn sách viết về sự cộng tác của ông với các nhà khoa học, kỹ sư và bác sĩ. Qua những cuộc đối thoại với họ, ông giải thích những khái niệm toán học thú vị (chủ yếu là về xác suất và thống kê, những lĩnh vực chính mà ông là chuyên gia) và các ứng dụng của chúng, theo những cách dễ hiểu, và đậm tính giải trí. Nhan đề cuốn sách có ý nhắc tới sự tò mò của các nhà toán học khi họ tiếp cận với các vấn đề thực tiễn. Những cuốn sách này và niềm đam mê của ông trong việc biến những ý tưởng toán học trở nên dễ hiểu với công chúng là nguồn cảm hứng lớn đối với tôi.

Trong nhiều năm, Yakov Isaevich làm việc với các bác sĩ, hầu hết là những bác sĩ về tiết niệu. Động lực ban đầu của ông thuần túy cá nhân. Sau khi đăng ký vào học ở *Mekh-Mat* thì ông được gọi ra mặt trận trong Chiến tranh Thế giới lần thứ hai, và ở đó ông mắc bệnh thận nghiêm trọng ngay trong những chiến hào lạnh thấu xương. Đây hóa ra lại là điều may mắn với ông, vì nhờ đó mà ông được đưa đến bệnh viện, và ở đây người ta đã cứu sống ông, trong khi hầu hết những bạn học cùng lớp và cùng nhập ngũ với ông đều đã tử trận. Nhưng kể từ đó, ông luôn phải đối phó với những vấn đề về thận, ở Liên Xô, dịch vụ y tế được miễn phí, nhưng chất lượng phục vụ thì lại rất thấp. Để được điều trị tốt, bạn phải có mối quan hệ cá nhân với bác sĩ hay phải đút lót. Nhưng Yakov Isaevich lại có một thứ khác để đổi lại, thứ rất ít người có thể có được: đó là tri thức toán học uyên thâm của ông. Và ông sử dụng nó để giúp đỡ các chuyên gia tài giỏi nhất về tiết niệu ở Moscow.

Đây là một sự trao đổi tuyệt vời bởi vì mỗi khi đôi thận dở chứng, ông sẽ nhận được sự điều trị tốt nhất của những nhà tiết niệu hàng đầu ở bệnh viện tốt nhất của Moscow. Và đây cũng là một sự trao đổi tuyệt

vời đối với các bác sĩ, vì ông sẽ giúp phân tích những số liệu thu thập được, mà ở đó thường hé lộ những hiện tượng thú vị mà trước đây chưa được biết đến. Yakov Isaevich thường nói rằng tư duy của các bác sĩ chỉ phù hợp với việc phân tích bệnh của những bệnh nhân cụ thể và đưa ra quyết định dựa trên từng trường hợp riêng rẽ. Nhưng đôi khi điều này cũng gây ra cho họ nhiều khó khăn trong việc tập trung vào bức tranh toàn cảnh và phát hiện những mẫu hình và nguyên lý tổng quát. Đây là chỗ toán học trở nên hữu dụng bởi vì tư duy của chúng tôi là hoàn toàn khác biệt: chúng tôi được rèn luyện để tìm kiếm và phân tích những mẫu hình tổng quát. Những người bạn bác sĩ của Yakov Isaevich đánh giá rất cao điều đó.

Khi tôi trở thành học trò của ông, Yakov Isaevich đã tuyển tôi tham gia các dự án y học mà ông chủ trì. Cuối cùng, sau khoảng hai năm rưỡi làm việc cùng Yakov Isaevich, chúng tôi phát triển được ba đề tài khác nhau trong tiết niệu học. Các kết quả được ba nhà tiết niệu học trẻ sử dụng trong luận án tiến sĩ của họ. (Ở Nga, trong lĩnh vực y tế còn có một học vị cao hơn sau M.D, ở cùng bậc với Ph.D, đòi hỏi phải viết một luận án có chứa những kết quả nghiên cứu y học thực sự). Tôi trở thành một đồng tác giả của nhiều bài báo công bố trong các tạp chí y học, thậm chí còn là đồng tác giả của một bằng sáng chế.

Tôi còn nhớ rõ giai đoạn khởi đầu của dự án đầu tiên. Yakov Isaevich và tôi tới gặp Alexei Velikanov, một nhà tiết niệu trẻ, con của một bác sĩ hàng đầu ở Moscow. Yakov Isaevich là bạn (và cũng là bệnh nhân) lâu năm của Velikanov cha, người đã nhờ Yakov Isaevich giúp đỡ cậu con trai. Alexei cho chúng tôi xem một tờ giấy lớn ghi những dữ liệu khác nhau, được thu thập từ khoảng một trăm bệnh nhân đã được cắt khối u tiền liệt tuyến lành tính (thường được thấy ở đàn ông cao tuổi). Dữ liệu gồm có các đặc trưng khác nhau, như huyết áp và những kết quả xét nghiệm khác, trước và sau khi phẫu thuật. Alexei hy vọng có thể sử dụng những dữ liệu này để đưa ra một số kết luận về thời điểm phẫu thuật để có khả năng thành công hơn, bởi vậy chúng cho

phép anh ấy đưa ra được những lời khuyên khi nào thì nên cắt bỏ khối u.

Alexei cần người giúp phân tích những dữ liệu ấy và hy vọng rằng chúng tôi có thể làm được việc đó. Như sau này tôi được biết, thì đây là một tình huống khá điển hình. Các bác sĩ, kỹ sư và những người khác thường trông đợi rằng các nhà toán học có cây đũa thần, giúp họ nhanh chóng rút ra những kết luận từ bất kỳ dữ liệu nào mà họ đã thu thập được. Dĩ nhiên, đây là một ảo tưởng. Thật ra, chúng tôi có biết một số phương pháp phân tích thống kê hiệu quả, nhưng thường thì những phương pháp này không thể áp dụng được vì các dữ liệu không đủ chính xác hay bởi vì có nhiều loại dữ liệu khác nhau: một số thì khách quan còn số khác lại chủ quan (như mô tả bệnh nhân “cảm thấy” như thế nào, chẳng hạn); hay một số thì mang tính định lượng, như huyết áp, nhịp tim, số khác lại định tính như những câu trả lời “có” hay “không” cho một số câu hỏi cụ thể. Việc đưa những dữ liệu không thuần nhất như vậy vào một công thức thống kê là rất khó, nếu không muốn nói thẳng ra là không thể.

Mặt khác, đôi khi đặt ra những câu hỏi đúng sẽ cho phép bạn nhận ra rằng một số dữ liệu không hề liên quan và nên được loại bỏ đi. Kinh nghiệm của tôi là chỉ có 10 đến 15% lượng thông tin mà các bác sĩ thu thập có thể được sử dụng khi họ đưa ra những khuyến cáo trong chẩn đoán hay điều trị. Nhưng nếu bạn hỏi họ, họ sẽ không bao giờ nói thẳng cho bạn biết điều đó. Họ sẽ khẳng định rằng tất cả các dữ liệu đều hữu ích và thậm chí còn đưa ra những kịch bản khác nhau có sử dụng các dữ liệu đó. Mất khá nhiều thời gian để thuyết phục họ rằng thực ra trong tất cả những trường hợp ấy, họ đã bỏ qua hầu hết dữ liệu và đưa ra quyết định chỉ dựa trên rất ít những tiêu chuẩn căn bản. Dĩ nhiên, đôi khi vẫn có những câu hỏi có thể được trả lời đơn giản bằng cách đưa thêm dữ liệu vào một chương trình thống kê nào đó. Nhưng làm việc với những dự án thế này, tôi dần nhận thấy rằng chúng tôi, các nhà toán học, hữu ích nhất đối với các bác sĩ phần nhiều không phải bởi vì những hiểu biết của chúng tôi về các chương trình thống kê (vì xét cho

cùng, bản thân việc này không khó khăn gì cả, và ai cũng có thể học được), mà bởi khả năng biết đặt ra các câu hỏi đúng rồi thông qua sự phân tích lạnh lùng và không thiên lệch để thu được đáp án chính xác. Và chính “tư duy toán học này” dường như mới thực sự hữu ích nhất đối với những người không được rèn luyện để có tư duy như các nhà toán học.

Trong dự án đầu tiên, cách tiếp cận này giúp chúng tôi loại bỏ những dữ liệu không liên quan để rồi tìm ra một số mối liên hệ hay tương quan hữu ích giữa những tham số còn lại. Đây không phải là việc dễ dàng và phải mất tới vài tháng trời, nhưng chúng tôi rất hạnh phúc với các kết quả thu được. Chúng tôi viết chung một bài báo về những khám phá của mình, và Alexei đã sử dụng nó trong luận án tiến sĩ của anh. Yakov Isaevich và tôi được mời tới dự lễ bảo vệ, cùng với một sinh viên khác của Kerosinka, Alexander Lifshitz, người bạn tốt của tôi và cũng là người tham gia dự án này.

Tôi nhớ tại lễ bảo vệ, khi một trong những tiến sĩ có mặt hỏi về tên của chương trình máy tính được dùng để tính toán ra những kết quả này, Yakov Isaevich trả lời rằng tên của nó là “Edward-Alexander.” Đây là sự thật: chúng tôi không hề sử dụng máy tính, mà thay vì thế, tất cả các tính toán đều được làm bằng tay hay với sự trợ giúp của một máy tính đơn giản. Điểm quan trọng chính không phải là tính toán (vì nó khá dễ dàng), mà là đặt được ra các câu hỏi đúng. Một bác sĩ phẫu thuật xuất sắc, có mặt tại buổi bảo vệ, sau đó bình luận rằng ông thật sự ấn tượng bởi hóa ra toán học lại giúp ích nhiều cho y học đến như vậy, và có lẽ nó sẽ còn hữu ích hơn nữa trong nhiều năm tới. Công trình của chúng tôi được cộng đồng y học hoan nghênh, và Yakov Isaevich rất hài lòng.

Không lâu sau đó, ông đã đề nghị tôi tham gia vào một dự án khác về tiết niệu học có liên quan tới u thận (cho một luận án tiến sĩ khác), và tôi cũng thực hiện thành công. Dự án thứ ba, dự án y học cuối cùng tôi tham gia, là dự án thú vị nhất đối với tôi. Một bác sĩ trẻ, tên Sergei

Arutyunyan - người cũng cần giúp đỡ để phân tích dữ liệu của anh cho một luận án - và tôi đã có một mối quan hệ tuyệt vời. Anh đang chữa cho các bệnh nhân có hệ thống miễn dịch không tiếp nhận quả thận được cấy ghép. Trong những tình huống như vậy, người bác sĩ cần phải nhanh chóng đưa ra quyết định, có nên để người bệnh tiếp tục chiến đấu với quả thận ấy hay là cắt bỏ nó đi, với những hậu quả rất khó lường: nếu họ giữ lại quả thận, người bệnh có thể chết, nhưng nếu họ cắt bỏ nó đi, người bệnh sẽ cần một quả khác, song lại rất khó kiếm được.

Sergei muốn tìm cách đưa ra những khuyến cáo tin cậy nhất về mặt thống kê, dựa trên những chẩn đoán định lượng bằng siêu âm. Anh có nhiều kinh nghiệm trong lĩnh vực này và đã thu thập được một lượng lớn dữ liệu. Sergei hy vọng rằng tôi có thể giúp anh phân tích những dữ liệu ấy và tìm ra được những tiêu chuẩn khách quan trong việc ra quyết định, điều có thể hữu ích đối với các bác sĩ khác. Anh nói với tôi rằng chưa ai có khả năng làm việc này cả; hầu hết các bác sĩ nghĩ rằng điều đó là không thể, và thích dựa vào những cách tiếp cận đặc biệt (*ad hoc*) của riêng họ.

Tôi xem xét các dữ liệu. Giống như những đề tài trước, có khoảng 40 tham số khác nhau được đo đạc trên mỗi bệnh nhân. Trong các buổi gặp gỡ thường lệ của chúng tôi, tôi đều hỏi Sergei những câu hỏi có định hướng, cốt tìm ra dữ liệu nào trong đó là thích hợp và dữ liệu nào không. Nhưng đây là một việc khó khăn. Giống như các bác sĩ khác, anh ấy thường đưa ra các câu trả lời dựa trên những trường hợp cụ thể, một điều quả thật là không mấy hữu ích.

Tôi quyết định sử dụng một cách tiếp cận khác. Tôi nghĩ, “Người đàn ông này đưa ra những quyết định ấy mỗi ngày, và hiển nhiên là anh ấy rất giỏi việc đó. Điều gì sẽ xảy ra nếu tôi cố học để ‘là anh ấy’? Ngay cả khi tôi không biết nhiều về các khía cạnh y học của vấn đề, thì tôi vẫn có thể học được phương pháp luận qua quá trình đưa ra quyết

định của anh, và tôi có thể sử dụng những kiến thức ấy để đưa ra một bộ các quy tắc.”

Tôi đề nghị chúng tôi chơi một loại trò chơi.^[108] Sergei đã thu thập được dữ liệu trên khoảng 270 bệnh nhân. Tôi chọn ngẫu nhiên số liệu từ khoảng 30 người trong số họ và để phần còn lại sang một bên. Tôi lấy bệnh án của những bệnh nhân được chọn ngẫu nhiên này và bảo Sergei ngồi ở góc đối diện của văn phòng, đặt cho tôi những câu hỏi về các bệnh nhân, mà tôi sẽ trả lời nhờ tham khảo hồ sơ. Mục tiêu của tôi khi chơi trò này là tìm cách hiểu được hình mẫu trong các câu hỏi của Sergei (ngay cả khi nếu tôi không thể biết hết ý nghĩa của những câu hỏi này như anh ấy). Chẳng hạn, đôi khi anh ấy đặt ra những câu hỏi khác nhau, hay cùng các câu hỏi nhưng theo một thứ tự khác. Trong những trường hợp như vậy, tôi sẽ ngắt lời anh: “lần trước anh không hỏi điều này. Thế tại sao bây giờ anh lại hỏi?”

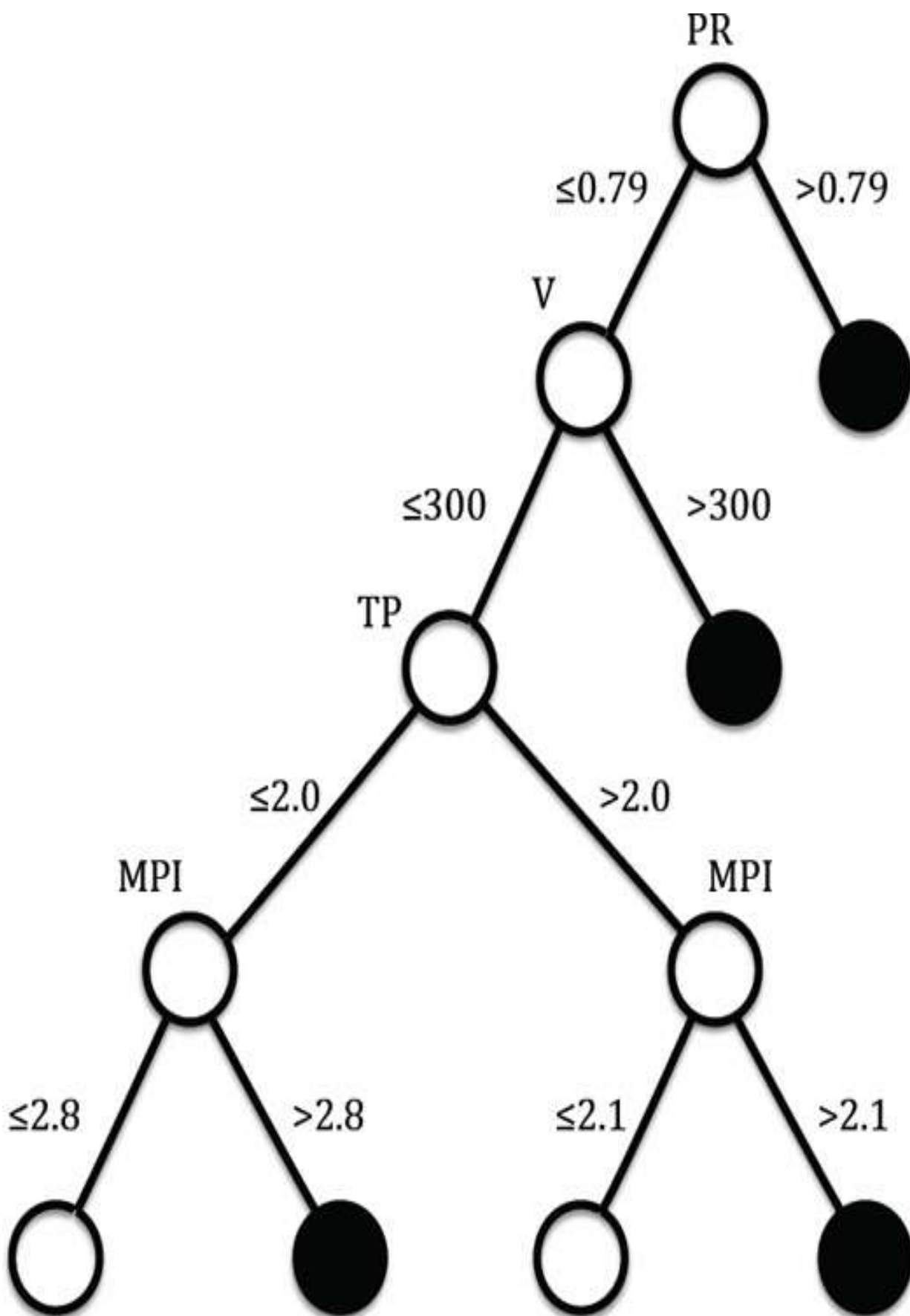
Và Sergei sẽ giải thích, “Bởi vì với bệnh nhân trước, thể tích của quả thận là thể này thế kia, và điều đó loại bỏ kịch bản này. Nhưng với bệnh nhân hiện tại thì nó lại thế này thế nọ, và do vậy kịch bản này là khá khả quan”. Tôi ghi chép tất cả chúng và cố gắng tiếp thu thông tin này càng nhiều càng tốt. Thậm chí nhiều năm sau, tôi vẫn còn có thể hình dung về nó rất rõ: Sergei ngồi ở một chiếc ghế trong góc phòng, chìm sâu trong suy tư, bập bập từng hơi thuốc lá, (anh vốn là người đốt thuốc liên tục). Tôi rất say mê cố gắng giải mã cấu trúc tư duy của anh - điều này cũng giống như thử làm ngược trò chơi ghép hình để tìm ra những mảnh nào là căn bản. Những câu trả lời của Sergei đã mang tới cho tôi những thông tin cực kỳ vô giá. Anh ấy luôn đi đến chẩn đoán sau không nhiều hơn ba hay bốn câu hỏi. Sau đó tôi sẽ so sánh nó với những gì thực sự đã xảy ra với mỗi bệnh nhân. Anh ấy luôn cực kỳ chính xác.

Sau hơn hai mươi trường hợp, tôi đã có thể tự đưa ra các chẩn đoán, bằng cách làm theo bộ quy tắc đơn giản mà tôi đã học được khi chơi trò hỏi đáp với Sergei. Sau một nửa tá trường hợp nữa, tôi gần gũi

được như anh ấy khi dự đoán kết cục xảy ra. Thực tế có một thuật toán đơn giản trong trò chơi mà Sergei đã đi theo trong hầu hết các trường hợp. Dĩ nhiên, luôn có một số ít các trường hợp mà thuật toán này không có ích nữa. Nhưng thậm chí nếu người nào có thể chẩn đoán hiệu quả và nhanh chóng cho khoảng từ 90 đến 95% các bệnh nhân, thì đó cũng là một thành công rồi. Sergei nói với tôi rằng trong các tài liệu tham khảo hiện có về chẩn đoán siêu âm, chưa hề có tài liệu nào viết về vấn đề này.

Sau khi hoàn tất “trò chơi”, tôi rút ra được một thuật toán tường minh và vẽ dưới dạng cây ra quyết định dưới đây. Từ mỗi nút (mắt) của cây, có hai cạnh đi xuống hai nút khác; đáp án cho một câu hỏi cụ thể ở nút đầu tiên sẽ quyết định người dùng nên đi tới nút nào trong số hai nút kế tiếp khả dĩ. Chẳng hạn, câu hỏi đầu tiên là về chỉ số kháng cản ngoại biên (PR) của mạch máu ở bên trong quả thận được cấy ghép. Đây là một tham số chính mà Sergei phát hiện ra trong nghiên cứu của mình. Nếu giá trị của nó lớn hơn 0,79, thì rất có khả năng là quả thận cấy vào không được chấp nhận, và bệnh nhân cần phải được phẫu thuật ngay. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ di chuyển tới nút đen ở bên phải. Nếu không, chúng ta di chuyển sang nút ở bên trái và đặt câu hỏi tiếp theo: Thể tích (V) của quả thận là bao nhiêu? Và cứ như thế. Bởi vậy mỗi dữ liệu của một bệnh nhân sẽ phát sinh một đường đi đặc biệt trên cây này. Cây sẽ kết thúc sau bốn bước hoặc ít hơn (ở thời điểm này, ý nghĩa của hai tham số còn lại, TP và MPI, đối với chúng ta không mấy quan trọng). Nút kết thúc sẽ chứa lời phán quyết cuối cùng, như được vẽ ở hình bên dưới: nút đen có nghĩa là “phải phẫu thuật” và nút trắng có nghĩa là “không phải phẫu thuật”.

Tôi cho chạy dữ liệu của 240 bệnh nhân mà trước đó tôi đã tạm xếp sang một bên, bằng thuật toán này. Sự phù hợp thật đáng kinh ngạc. Trong khoảng 95% các trường hợp, nó đều dẫn đến chẩn đoán chính xác.



Bằng một ngôn ngữ đơn giản, thuật toán trên đã mô tả những điểm cốt yếu trong quá trình tư duy của một bác sĩ trước khi đưa ra quyết định, và nó cũng chỉ ra những tham số nào mô tả hiện trạng của bệnh nhân phù hợp nhất với chẩn đoán. Chỉ có bốn tham số như thế, như vậy là đã thu hẹp danh sách ban đầu gồm khoảng 40 tham số. Chẳng hạn, thuật toán này chỉ ra tầm quan trọng của chỉ số kháng cảm ngoại biên mà Sergei đã phát triển, bằng cách đo dòng chảy của máu qua thận. Việc tìm ra vai trò thiết yếu của tham số này trong việc đưa ra quyết định là một khám phá rất quan trọng. Tất cả những điều này đều có thể được sử dụng trong những nghiên cứu sâu hơn trong lĩnh vực tiết niệu. Các bác sĩ khác cũng có thể áp dụng thuật toán này cho các bệnh nhân của họ, cũng như trải nghiệm, và tinh chỉnh nó để thu được hiệu quả cao hơn.

Chúng tôi viết chung một bài báo về dự án này, nó là cơ sở cho luận án tiến sĩ của Sergei, và bằng sáng chế anh đăng ký được cấp một năm sau đó. Tôi tự hào khi được làm việc với Yakov Isaevich, và ông cũng tự hào về tôi như vậy. Tuy nhiên, dù chúng tôi có một mối quan hệ tốt đẹp, tôi vẫn duy trì một đời sống toán học “khác” - đó là công việc của tôi với Fuchs và Feigin, dĩ nhiên tất cả những thứ đó đều được giữ bí mật với ông cũng như với hầu hết những người khác. Điều đó cũng tựa như toán học ứng dụng là vợ của tôi, còn toán học thuần túy là người tình bí mật của tôi vậy.

Tuy vậy, đến khi tôi phải tìm một việc làm, Yakov Isaevich nói sẽ cố tuyển dụng tôi làm trợ lý cho ông ở phòng thí nghiệm tại Kerosinka. Việc này sẽ giúp tôi trở thành nghiên cứu sinh một năm sau đó, mở ra con đường sáng sủa cho nghề nghiệp trong tương lai của tôi. Nghe ra thì có vẻ đó là một kế hoạch tuyệt vời, nhưng thực tế vẫn có rất nhiều trở ngại, không ít hơn những gì mà cha tôi đã được cảnh báo khi ông tới Kerosinka trước khi tôi nộp đơn xin vào học ở đó, nghĩa là tôi vẫn sẽ phải đối mặt với chủ nghĩa bài Do Thái.

Dĩ nhiên, Yakov Isaevich cũng ý thức rất rõ chuyện này. Ông đã ở Kerosinka trong nhiều thập niên, và biết ngọn ngành mọi thứ ở đây được vận hành như thế nào. Thực ra ông đã được chính ông hiệu trưởng Vinogradov tuyển dụng, người Yakov Isaevich luôn rất kính trọng. Nhưng những câu hỏi tuyển dụng tôi sẽ được xử lý bởi những công chức bậc trung, chứ không phải Vinogradov, và những người này chắc chắn sẽ đóng chặt tất cả các cánh cửa với những ai có tên nghe giống người Do Thái. Tuy thế, Yakov Isaevich đã biết cách đối phó với hệ thống này. Vào lúc bắt đầu kỳ học mùa xuân trong năm cuối cùng của tôi ở Kerosinka, khi vấn đề về việc làm của tôi trở nên bức thiết, ông đã viết một lá thư xin bổ nhiệm tôi vào làm việc tại phòng thí nghiệm của ông. Ông luôn mang bức thư đó theo mình trong chiếc cặp nhỏ, phòng khi có cơ hội đích thân nói chuyện với Vinogradov về tôi, thì ông đã có chuẩn bị trước rồi.

Cơ hội tự nó nhanh chóng xuất hiện. Một hôm ông đắm sâu vào Vinogradov khi bước vào cổng trường Kerosinka. Gặp ông, Vinogradov rất vui và hỏi:

“Cậu thế nào, Yakov Isaevich?”

“Tôi tệ khủng khiếp”, Yakov Isaevich chán nản trả lời (ông có thể là một diễn viên giỏi đấy).

“Có chuyện gì vậy?”

“Trước đây, chúng ta đã làm được nhiều điều tuyệt vời ở phòng thí nghiệm của tôi, nhưng bây giờ thì không thể tiếp tục được nữa. Tôi không nhận được nhân tài mới nào cả. Tôi có một cậu sinh viên xuất sắc, sẽ tốt nghiệp vào năm nay, nhưng tôi lại không thể tuyển dụng cậu ấy.”

Tôi đùa rằng Vinogradov đã muốn cho Yakov Isaevich thấy ai là ông chủ - mà đó lại chính là mục đích của Yakov Isaevich - do vậy ông ta trả lời: “Đừng lo, tôi sẽ lo chuyện này.”

Ngay lập tức, Yakov Isaevich chìa luôn lá thư xin tuyển dụng tôi ra. Và Vinogradov không còn lựa chọn nào khác là ký nó.

Thường thì, lá thư này phải được ký bởi cả tá những người khác trước khi được đặt lên bàn của Vinogradov: những người đứng đầu tổ chức Đoàn thanh niên Komsomol và tổ chức Đảng Cộng sản ở cơ sở, và đủ các loại công chức khác. Họ chắc chắn sẽ tìm ra cách ngăn trở quá trình này lại để việc ký duyệt sẽ không bao giờ xảy ra. Nhưng bây giờ nó đã có chữ ký của Vinogradov! Vậy thì họ còn có thể làm gì được nữa? Ông ấy là thủ trưởng, và họ sẽ không thể làm trái ý muốn của ông. Họ đành phải nghiêng răng trì hoãn một thời gian, nhưng rồi cuối cùng thì họ cũng phải tuân theo và ký thôi. Bạn cần nhìn thấy vẻ mặt của họ khi nhìn thấy chữ ký của Vinogradov ở dưới lá đơn! Yakov Isaevich đã chơi lại hệ thống này một cách thật là ngoạn mục!

Chương 13

LỜI MỜI TỪ HARVARD

Giữa lúc tất thảy mọi thứ đều căng thẳng và bất định đó, tháng 3 năm 1989, thì tôi nhận được một lá thư đến từ Mỹ, đề địa chỉ gửi là Đại học Harvard.

Tiến sĩ Frenkel thân mến,

Căn cứ vào lời đề cử của khoa Toán, tôi muốn mời ông đến thăm Đại học Harvard vào mùa thu năm 1989 với tư cách là người được hưởng học bổng Harvard Prize.

Thân mến,

Derek Bok

Hiệu trưởng Đại học Harvard.

Trước đó, tôi đã từng được nghe về Đại học Harvard, mặc dù phải thừa nhận rằng lúc ấy tôi chưa nhận thức hết tầm quan trọng của nó trong thế giới hàn lâm. Dầu vậy, tôi vẫn rất hài lòng. Được mời đến Mỹ với tư cách một người giành được học bổng nghe cũng khá vinh dự đấy chứ. Hiệu trưởng của Đại học Harvard đã đích thân viết thư cho tôi kia mà! Và ông lại còn gọi tôi là “Tiến sĩ” nữa, mặc dù tôi vẫn còn chưa nhận bằng cử nhân. (Khi ấy, tôi đã bước vào kỳ học cuối cùng ở Kerosinka.)

Vậy chuyện này đã xảy như thế nào? Thì ra lời đồn về công trình của tôi với Borya đã truyền lan rộng rãi. Bài báo ngắn đầu tiên của chúng tôi được công bố, và chúng tôi đã làm xong ba bài khác, dài hơn (tất cả đều viết bằng tiếng Anh). Nhà vật lý Lars Brink, đến thăm

Moscow từ Thụy Điển, đã năn nỉ xin một trong số ba bài báo đó cho một mục mà ông đang biên tập. Chúng tôi trao cho ông bài báo mà ông yêu cầu cho số tạp chí đó, và nhờ ông in sao ra khoảng 20 bản, rồi gửi nó cho các nhà toán học và vật lý ở nước ngoài mà chúng tôi nghĩ rằng có quan tâm đến công trình ấy. Tôi tìm ra địa chỉ của họ trong các bài báo ở thư viện Khoa học Moscow, và đưa danh sách đó cho Lars. Ông đã vui vẻ đồng ý giúp đỡ vì biết rằng chúng tôi sẽ gặp khó khăn thế nào nếu muốn tự gửi các bản sao ấy đi. Bài báo đó đã được biết đến rộng rãi, một phần là bởi vì những ứng dụng của nó trong vật lý lượng tử.

Chuyện này xảy ra vài năm trước khi Internet trở nên phổ biến, nhưng hệ thống phổ biến tài liệu khoa học làm việc khá hiệu quả: các tác giả cho lưu hành các bản thảo đánh máy của mình trước khi công bố (chúng được gọi là các *preprint*). Những người nhận sau đó sẽ sao chép và gửi cho các bạn đồng nghiệp cũng như cho thư viện các đại học. Có khoảng 20 người được Lars Bink gửi cho bài báo của chúng tôi, họ chắc cũng đã làm như vậy.

Trong thời gian ấy, những biến đổi khủng khiếp ở Liên Xô đã xảy ra, đó là thời điểm *perestroika*, do Mikhail Gorbachev phát động. Một trong những kết quả của nó là mọi người được phép đi ra nước ngoài thoải mái hơn. Trước đó, các nhà toán học như Feigins và Fuchs cũng nhận được nhiều lời mời tham dự các hội nghị hay tới thăm các trường đại học ở phương Tây, nhưng việc xuất ngoại bị chính phủ kiểm soát rất nghiêm ngặt. Trước khi nhận được thị thực nhập cảnh thông thường tới các nước khác, bạn phải xin được một thị thực xuất cảnh, cho phép rời khỏi Liên Xô. Rất hiếm những thị thực như thế được cấp, bởi nỗi sợ rằng người ta sẽ không trở về nữa (mà quả thật, rất nhiều người nhận được thị thực xuất cảnh đã không quay trở lại). Hầu hết các yêu cầu đều bị từ chối, thường là dựa vào những căn cứ giả trá, và một lần Fuchs nói với tôi rằng, đã rất nhiều năm rồi kể từ lần cuối cùng ông cố lấy một cái thị thực như thế.

Nhưng đột nhiên, vào mùa thu năm 1988, một số người được phép đi ra nước ngoài, trong số đó có Gelfand. Một người khác, một nhà toán học trẻ tài năng và là bạn của Borya tên là Sasha Beilinson, cũng tới Mỹ để thăm đồng tác giả trước đó của anh là Joseph Bernstein, người đã di cư vài năm trước, và hiện là giáo sư ở đại học Harvard.

Cùng thời điểm đó, một số nhà khoa học phương Tây cũng nhận thấy những thay đổi đang diễn ra, và cố gắng lợi dụng cơ hội này để mời các học giả từ Liên Xô. Một trong số đó là Arthur Jaffe, một nhà vật lý toán danh tiếng, khi đó là trưởng khoa Toán của đại học Harvard. Ông quyết định sáng lập một vị trí thỉnh giảng mới dành cho các nhà toán học trẻ tài năng người Nga. Khi Gelfand, người có học hàm danh dự của Harvard, ghé thăm vào năm 1988, Jaffe đã nhờ ông thuyết phục hiệu trưởng Derek Bok, người mà Gelfand có quen biết, cung cấp tiền bạc và hỗ trợ cho chương trình này (một phần tài trợ là của Landon Clay, người sau này đã sáng lập viện Toán học Clay). Jaffe gọi đó là Học bổng Harvard Prize.

Và khi chương trình này đã sẵn sàng, thì câu hỏi đặt ra là sẽ mời những ai, Jaffe lúc ấy đã thăm dò ý kiến đề nghị từ nhiều nhà toán học. Chắc hẳn tên tôi đã được nhiều người nhắc tới (bao gồm cả Beilinson), và đó chắc là nguyên do tôi được chọn là một trong số bốn ứng viên đầu tiên của học bổng này.

Lá thư từ hiệu trưởng Bok đã nhanh chóng được tiếp nối bởi một lá thư dài từ chính Jaffe, mô tả chi tiết hơn về những điều kiện. Tôi sẽ đến đó trong khoảng thời gian từ ba đến năm tháng; tôi sẽ là một giáo sư thỉnh giảng, nhưng sẽ không có bất kỳ nghĩa vụ chính thức nào ngoại trừ việc thỉnh thoảng trình bày một số bài giảng về công trình của tôi; Harvard sẽ chi trả tiền đi lại, nhà ở và sinh hoạt. Thực tế, thứ duy nhất mà Harvard sẽ không cung cấp đó là một thị thực xuất cảnh của Liên Xô. Thật may mắn, và cũng là một niềm ngạc nhiên to lớn của tôi, tôi nhận được nó trong vòng một tháng.

Arthur Jaffe viết trong thư rằng tôi có thể đến sớm hơn vào cuối tháng 8, và ở lại cho đến tận cuối tháng 1, nhưng tôi chọn chỉ ở lại trong ba tháng, đó là thời gian lưu lại ngắn nhất được đề cập trong thư. Tại sao? À, tôi không có ý định di cư đến Mỹ, mà dự định sẽ trở về. Bên cạnh đó, tôi cảm thấy có lỗi nếu từ bỏ công việc ở Kerosinka mà Yakov Isaevich đã phải tốn biết bao công sức mới giành được cho tôi.

Sau khi nhận được thị thực xuất cảnh, và chuyến đi của tôi chắc chắn sẽ diễn ra, tôi đành phải thú nhận tất cả với Yakov Isaevich và kể cho ông nghe về “những hoạt động ngoại khóa” của mình: nghiên cứu toán học cùng với Feigin và lời mời từ Harvard. Đương nhiên là ông rất ngạc nhiên. Ông tin chắc rằng tôi đã dành hết năng lực của mình cho những đề tài về y tế mà tôi làm cùng ông. Phản ứng đầu tiên của ông là khá tiêu cực.

“Vậy ai sẽ tới làm việc trong phòng thí nghiệm của tôi nếu cậu đi Harvard?”, ông hỏi.

Lúc đó, bà Tamara Alekseevna, vợ của Yakov Isaevich, người luôn nồng nhiệt chào đón tôi trong ngôi nhà của họ, xuất hiện để giải cứu tôi:

“Yasha, anh hỏi thật vô nghĩa,” bà nói. “Thằng bé được mời tới Harvard. Điều đó thật tuyệt vời! Dứt khoát là nó nên đi, và khi trở về thì nó sẽ lại tiếp tục làm việc với anh thôi.”

Yakov Isaevich đã miễn cưỡng đồng ý.

Những tháng hè trôi đi nhanh chóng và ngày tôi phải ra đi, ngày 15 tháng 9 năm 1989, đã đến. Tôi bay từ Moscow tới sân bay JFK ở New York và sau đó tới Boston. Jaffe không thể đích thân ra đón tôi ở sân bay, nhưng ông cho một học viên sau đại học tới đón. Tôi được dẫn tới một căn hộ hai phòng ngủ mà khoa Toán đã thuê cho tôi và một người khác cũng được nhận học bổng tên là Nicolai Reshetikhin, người đến sau tôi vài ngày. Ngôi nhà nằm trong Vườn Thực vật (*Botanic Garden*), một tổ hợp các căn hộ do Harvard sở hữu, cách khuôn viên

Harvard Yard không tới mười phút đi bộ. Mọi thứ thật khác biệt và phần khích.

Khi tôi về đến căn hộ của mình thì đêm đã khuya. Một mẻ vì chuyến bay kéo dài, tôi nhanh chóng chìm vào giấc ngủ. Sáng hôm sau, tôi đến khu chợ nông sản gần đó và mua vài thứ. Trở về nhà, tôi bắt đầu làm món salad thì nhận ra rằng mình không mua muối. Chẳng còn chút nào trong căn hộ cả, và tôi đành phải ăn món salad không muối vậy.

Ngay sau khi tôi ăn xong thì chuông cửa reo. Đó là Arthur Jaffe. Ông ngỏ ý mời tôi tham quan vòng quanh thành phố bằng xe hơi của mình. Nghĩ cũng oách thật, một chàng trai hai mươi một tuổi lại được ông chủ nhiệm của khoa Toán đại học Harvard lái đi vòng quanh thành phố. Tôi ngắm nhìn khung cảnh Harvard Yard, sông Charles, những ngôi nhà thờ tuyệt đẹp, và những tòa nhà chọc trời ở trung tâm Boston. Thời tiết cũng rất đẹp. Tôi thực sự bị ấn tượng với thành phố.

Trên đường trở về sau chuyến ngao du hai giờ, tôi nói với Arthur rằng mình cần phải mua muối, ông đáp, “Không vấn đề, tôi sẽ đưa cậu tới siêu thị ở gần đây.”

Ông đưa tôi đến siêu thị Ngôi sao ở quảng trường Porter, và nói sẽ ngồi đợi tôi trong ô tô. Đây là lần đầu tiên tôi bước vào một siêu thị và nó là một trải nghiệm đầy kinh ngạc. Thời đó, ở Nga đang rất thiếu thực phẩm. Ở thành phố Kolomna quê tôi, bạn chỉ có thể mua được bánh mì, sữa và một số rau quả thiết yếu như khoai tây. Để có được những thức khác, bạn phải tới Moscow, và thậm chí là ở Moscow thì điều tốt nhất mà bạn có thể hy vọng là một số loại xúc xích chất lượng thấp và bơ. Mỗi cuối tuần, khi từ Moscow trở về nhà, tôi thường mang theo một ít thực phẩm cho cha mẹ. Do vậy việc nhìn thấy hàng dãy hàng dãy đủ loại thực phẩm được đóng gói sẵn ở siêu thị là điều hoàn toàn không thể tin nổi.

“Làm sao mà tìm được cái mình cần đây?”, tôi nghĩ. Tôi bắt đầu đi dọc theo các dãy hàng hóa để tìm muối, nhưng chẳng thấy đâu cả. Tôi đoán chắc là mình đã hơi choáng về hàng hóa phong phú của trong siêu

thị; đến nỗi, tôi thậm chí không nhận thấy những chỉ dẫn ở bên trên. Tôi đã hỏi ai đó làm việc ở siêu thị: “Muối ở đâu vậy?”, nhưng tôi không hiểu từ nào trong lời nói của ông ấy. Tiếng Anh của tôi chỉ đủ tốt để có thể trình bày một bài giảng toán học, chứ tôi không quen dùng tiếng Anh giao tiếp hằng ngày. Và lại chất giọng nặng của dân Boston càng làm tôi khó hiểu.

Hơn nửa tiếng đồng hồ trôi qua, tôi hoàn toàn tuyệt vọng, lạc lối trong siêu thị Ngôi sao giống như một mê cung khổng lồ. Cuối cùng, tôi tình cờ thấy một gói muối trộn với tỏi. “Thế cũng tốt rồi”, tôi tự nhủ, “ra khỏi đây thôi.” Tôi trả tiền và bước ra khỏi siêu thị. Arthur tội nghiệp bắt đầu lo lắng - thằng bé này làm cái quái gì trong đó tới những 45 phút vậy - vậy nên ông bắt đầu đi tìm kiếm tôi.

“Lạc mất chính mình trong phồn hoa của thế giới tư bản,” tôi nghĩ.

Quá trình thích nghi của tôi với nước Mỹ đã bắt đầu.

Hai người khác cũng giành được học bổng đến vào kỳ học mùa thu là Nicolai Reshetikhin, người sẽ ở chung căn hộ với tôi (anh ấy đến một tuần sau đó), và Borya Tsygan (tên tiếng Nga là Vera Serganova, người thứ tư nhận học bổng Harvard Prize, đến vào mùa xuân). Họ hơn tôi mười tuổi, và đều có những đóng góp quan trọng cho toán học. Tôi có biết về công trình của họ nhưng chưa từng gặp riêng ai ngoài đời thế này. Trong suốt kỳ đầu tiên đó, chúng tôi sống gần bó với nhau và trở thành bạn thân.

Nicolai, hay Kolya như cách gọi thân mật của mọi người, đến từ St. Petersburg. Anh nổi tiếng bởi là một trong những người sáng tạo ra nhóm lượng tử, tổng quát hóa của các nhóm thông thường. Nói chính xác hơn, các nhóm lượng tử là những biến dạng nhất định của các nhóm Lie - các đối tượng toán học mà chúng ta đã nói tới ở trên. Hiện nay, các nhóm lượng tử này cũng xuất hiện ở khắp nơi trong toán học và vật lý như các nhóm Lie vậy. Chẳng hạn, Kolya và một nhà toán học

khác tên là Vladimir Turaev sử dụng những nhóm lượng tử này để xây dựng những bất biến của các nút và các đa tạp ba chiều.

Borya Tsygan là người cộng tác lâu năm với Boris Feigin, thầy tôi. Là người gốc Kiev, Ukraine, Tsygan có một ý tưởng lớn khi vừa mới tốt nghiệp đại học, ý tưởng này đã dẫn tới một đột phá trong lĩnh vực “hình học không giao hoán”. Cũng như những nhà toán học Do Thái khác, anh không được theo học sau đại học. Vì chuyện này, sau khi tốt nghiệp đại học, anh phải tới làm việc ở một nhà máy công nghiệp nặng ở Kiev, suốt cả ngày bị những cỗ máy ồn ào vây quanh. Tuy nhiên, chính trong những điều kiện tồi tệ đó, anh đã có những khám phá của riêng mình.

Người ta thường nghĩ rằng các nhà toán học luôn làm việc trong những điều kiện sạch sẽ, ngồi nhàn rỗi và nhìn chăm chăm vào màn hình của một chiếc máy tính hay nhìn lên trần nhà, trong một văn phòng tinh khôi sạch bóng. Nhưng thực tế thì một số những ý tưởng tuyệt vời nhất lại thường xuất hiện khi bạn ít trông đợi nhất, có thể từ nơi có tiếng ồn công nghiệp rất khó chịu.

Tản bộ quanh Harvard Yard và nhìn ngắm những kiến trúc cổ xưa của các tòa nhà gạch, bức tượng của Harvard, những tháp nhọn của những nhà thờ cổ, tôi cảm nhận được sự độc đáo không đâu có của nơi này, với truyền thống theo đuổi tri thức từ lâu đời và niềm đam mê vô hạn với những khám phá.

Khoa Toán của Đại học Harvard đặt ở Trung tâm Khoa học, một tòa nhà cấu trúc hiện đại ngay bên ngoài Harvard Yard. Trông nó tựa như một phi thuyền không gian khổng lồ của người ngoài hành tinh, mới hạ cánh xuống Cambridge, Massachusetts, và quyết định ở lại đây. Khoa Toán chiếm ba tầng trong đó. Bên trong tòa nhà, các văn phòng sắp lẫn với những khu vực sinh hoạt chung với đầy đủ các máy pha cà phê và những chiếc trường kỷ thoải mái. Cũng có một thư viện toán được thiết kế rất đẹp, và thậm chí có cả một bàn bóng bàn nữa. Tất cả

tạo nên một không khí ấm cúng, và ngay cả ban đêm bạn vẫn có thể tìm thấy rất nhiều người ở đây, trẻ có già có, làm việc, đọc sách trong thư viện, mặt đầm chiêu bước từng bước dọc theo hành lang, hay chuyện trò sôi nổi, và một số thì ngủ gà gật ở trường kỷ... Bạn sẽ cảm thấy rằng mình sẽ không bao giờ muốn rời nơi này (và dường như một số người không bao giờ rời đi thật).

Khoa Toán khá nhỏ nếu đem so sánh với những khoa khác: số người trong khoa không quá mười lăm giáo sư chính thức và khoảng 10 *postdoc* (thực tập sinh sau tiến sĩ) giữ chức vụ giảng dạy trong ba năm. Khi tôi tới, trong khoa đã có vài nhà toán học vĩ đại nhất thời đại chúng ta như Joseph Bernstein, Raoul Bott, Dick Gross, Heisuke Hironaka, David Kazhdan, Barry Mazur, John Tate, và Shing-Tung Yau. Được gặp và học tập từ họ là cơ hội lớn trong đời. Tôi có nhiều kỷ niệm đáng nhớ về Raoul Bott, một tài năng có sức hấp dẫn thiên phú, một người khổng lồ thân thiện tóc xám, khi đó đã gần bảy mươi tuổi, ông kéo tôi sang một bên ở hành lang và hỏi, với giọng sôi nổi: “Công việc thế nào hả chàng trai?”

Ngoài ra còn có khoảng 30 học viên sau đại học, họ cũng có những phòng nhỏ ở tầng hai.

Ba người Nga - Kolya, Borya, và tôi - đều được mọi người chào đón nồng nhiệt. Mặc dù chúng tôi là những người đầu tiên trong làn sóng các nhà khoa học Nga tràn sang các đại học Mỹ trong những năm sau đó, nhưng việc có các vị khách Liên Xô trong những ngày ấy vẫn là một sự kiện rất lạ lùng. Dẫu vậy, chỉ sau khoảng độ một tuần, ở Cambridge, tôi cảm thấy mình hòa nhập rất tốt với nếp sống ở đây. Mọi thứ có vẻ như rất tự nhiên và thoải mái. Tôi mua cho mình một chiếc quần bò hippy nhất và một chiếc Sony Walkman (hãy nhớ rằng, đó mới chỉ là năm 1989!) và rồi đi bộ quanh phố phường với chiếc headphone nghe những bài hát tuyệt nhất. Với người lạ thì tôi trông giống như một sinh viên hai mươi một tuổi điển hình. Tiếng Anh giao tiếp của tôi thì vẫn cần phải bù đắp nhiều. Để cải thiện nó, hằng ngày tôi mua tờ *New*

York Times và đọc với một cuốn từ điển kê kê bên cạnh, trong chí ít là một giờ (để giải mã vài từ tiếng Anh bí ẩn nhất mà bạn có thể tìm được, như sau này tôi mới nhận ra). Tôi cũng mắc nghiệm các chương trình ti vi đêm khuya.

Chương trình của David Letterman (khi đó bắt đầu vào lúc 0:35 sáng trên NBC) là chương trình tôi rất ưa thích. Lần đầu tiên xem nó, tôi đã không thể hiểu nổi lấy một từ. Nhưng không hiểu sao nó rõ ràng là chương trình *của tôi*, tôi sẽ thực sự tận hưởng nó nếu tôi có thể hiểu được người dẫn chương trình nói gì. Do vậy đây cũng là một động lực nữa đối với tôi. Tôi đã ngoan cường theo dõi nó mỗi đêm, và dần dà tôi bắt đầu hiểu được các trò đùa, bối cảnh và nền tảng. Đó là cách tôi khám phá nền văn hóa nhạc pop của Mỹ, và tôi đang ngẫu nhiên mọi mẩu nhỏ của nó. Có đêm, khi phải đi ngủ sớm, tôi thu video lại chương trình, và xem lại vào sáng hôm sau trong khi ăn sáng. Chương trình của Letterman, với tôi, trở thành thứ gì đó giống như nghi lễ tôn giáo vậy.

Mặc dù tôi và những người được hưởng học bổng khác không có bất kỳ nghĩa vụ chính thức nào, nhưng chúng tôi vẫn đến khoa mỗi ngày để nghiên cứu đề tài của mình, nói chuyện với mọi người, dự các seminar - ở đây luôn có vô khối những hoạt động như vậy. Hai giáo sư mà tôi hay nói chuyện nhiều nhất là hai Nga kiều: Joseph Bernstein và David Kazhdan. Cả hai đều là những nhà toán học xuất chúng, cựu học trò của Gelfand, và là bạn thân của nhau, nhưng bạn không thể tưởng tượng nổi sự khác biệt trong tính tình của họ đâu.

Joseph là người trầm tĩnh và khiêm tốn. Nếu được hỏi gì, ông sẽ yên lặng lắng nghe, dành thời gian để suy nghĩ và thường nói là ông không biết câu trả lời, nhưng vẫn nói với bạn những gì ông nghĩ về câu hỏi đó. Những diễn giải của ông hoàn toàn rõ ràng và gần gũi, thường thì ông thực ra đã giảng giải chính câu trả lời mà ông khẳng định là không biết. Ông luôn cho bạn cảm giác bạn không cần phải là thiên tài

mới hiểu được tất cả những thứ này - một cảm giác tuyệt vời cho một nhà toán học trẻ đang nỗ lực vươn lên.

Trái lại, David là một người năng động, cực kỳ sắc sảo và nhạy bén. Với vốn kiến thức bách khoa, khá phô trương và đôi khi hơi tỏ ra thiếu kiên nhẫn, ông gợi lại hình ảnh người thầy Gelfand của mình. Trong các seminar, nếu ông nghĩ rằng người trình bày không diễn giải tốt, ông sẽ nhảy lên bảng, giật lấy cục phấn từ tay của báo cáo viên, và tiếp tục giảng giải - đấy là nếu ông ưa thích chủ đề đó. Còn nếu không ông sẽ ngủ gật. Rất hiếm khi thấy ông trả lời “Tôi không biết” cho một câu hỏi - nhưng ông thực sự biết khá nhiều về mọi thứ. Tôi đã dành nhiều giờ dài nói chuyện với ông trong nhiều năm, và học được rất nhiều từ ông. Sau này, chúng tôi có cộng tác trong một đề tài chung, đó là một trải nghiệm bổ ích.

Vào tuần thứ hai của tôi ở Harvard, tôi có một cuộc gặp gỡ định mệnh khác. Bên cạnh Harvard, trong khu Cambridge còn có một đại học khác, ít được biết đến hơn, thường được gọi tắt bằng tên rút gọn của nó... MIT. (Dĩ nhiên là tôi đùa một chút ấy mà!) Luôn có chút cạnh tranh giữa Harvard và MIT, nhưng thực tế hai khoa Toán lại liên kết với nhau rất chặt chẽ. Chẳng hạn, sẽ chẳng có gì bất thường, nếu như một sinh viên ở Harvard lại nhận một giáo sư ở MIT làm thầy hướng dẫn hay ngược lại. Sinh viên của trường này vẫn thường đến nghe giảng ở trường kia.

Sasha Beilinson, người bạn và đồng tác giả với Borya Feigin, được bổ nhiệm làm giáo sư ở MIT, và tôi sẽ đến dự những bài giảng của ông ở đó. Ở bài giảng đầu tiên, có ai đó chỉ cho tôi một người đàn ông lịch lãm khoảng ngoài bốn mươi tuổi, ngồi cách tôi vài hàng ghế. “Đó là Victor Kac.” Trời! Đây chính là người sáng tạo ra đại số Kac-Moody và rất nhiều thứ khác, tôi đã nghiên cứu công trình của chính ông trong nhiều năm.

Sau bài giảng, chúng tôi được giới thiệu với nhau. Victor chào đón tôi nồng nhiệt, và muốn biết thêm về công trình của tôi. Tôi run lên vì

vui sướng khi được mời tới báo cáo tại seminar hằng tuần của ông. Tôi trình bày ba bài giảng ở seminar đó vào ba thứ Sáu liên tiếp. Chúng là những seminar đầu tiên của tôi bằng tiếng Anh, và tôi nghĩ mình đã hoàn thành tốt công việc: số người tham dự khá đông, mọi người có vẻ rất quan tâm, và họ đặt rất nhiều câu hỏi.

Victor quan tâm và giúp đỡ tôi rất nhiều. Chúng tôi thường gặp nhau trong văn phòng rộng lớn của ông ở MIT, trò chuyện về toán học, và ông thường mời tôi tới nhà ăn tối. Chúng tôi sau đó còn làm việc cùng nhau trong vài đề tài.

Một tháng sau khi tôi đến, Borya Feigin cũng tới Cambridge. Sasha Beilinson đã gửi thư mời anh tới thăm MIT trong hai tháng. Tôi rất vui vì Borya đến Cambridge: anh là thầy của tôi, và chúng tôi thì rất thân thiết. Chúng tôi cũng có một số đề tài toán học đang tiến hành, và đây là dịp tuyệt vời để cùng nhau làm việc. Ban đầu tôi không nhận thức được rằng việc anh sang đây cũng sẽ đẩy cuộc đời tôi vào một biến động lớn lao.

Thông tin về cánh cửa sang phương Tây bây giờ đã được mở rộng, rằng các nhà toán học được tự do đi lại, tới thăm các trường đại học của Mỹ và những nơi khác, nhanh chóng lan truyền khắp cộng đồng toán học Moscow. Rất nhiều người quyết định nắm lấy cơ hội này và chuyển hẳn sang Mỹ. Họ bắt đầu gửi hồ sơ xin việc tới nhiều trường đại học, kêu gọi các đồng nghiệp của họ ở Mỹ, nói rằng họ đang tìm kiếm công việc. Vì không ai biết chính sách “mở cửa” này sẽ kéo dài trong bao lâu (hầu hết mọi người đều đinh ninh rằng chỉ sau vài tháng thì biên giới sẽ bị đóng trở lại), điều này đã tạo nên một làn sóng đầy kích động ở Moscow - mọi cuộc đối thoại đều dẫn tới cùng một câu hỏi: “Thoát ra tốt nhất bằng cách nào?”

Mà làm sao có thể khác được? Hầu hết những người như thế đều phải đối diện với chủ nghĩa bài Do Thái, và với rất nhiều trở ngại khác trong xã hội Liên Xô. Họ không thể tìm được việc làm trong giới hàn

lâm, và phải nghiên cứu toán như một nghề tay trái. Và mặc dù cộng đồng toán học Liên Xô rất mạnh, nhưng hầu như nó bị cô lập với thế giới bên ngoài. Có những cơ hội phát triển nghề nghiệp tuyệt vời ở phương Tây mà đơn giản là không tồn tại ở Liên Xô. Làm sao bạn có thể hy vọng những người này phải trung thành với một đất nước đã chối bỏ và tìm mọi cách ngăn trở họ làm việc trong lĩnh vực mà họ yêu thích, khi mà những cơ hội sống tốt hơn ở nước ngoài xuất hiện trước họ?

Khi tới Mỹ, Borya Feigin thấy ngay rằng có một “quá trình chảy máu chất xám” lớn đang diễn ra, và không gì có thể dừng nó lại được. Ở Nga, nền kinh tế đang tan vỡ, thực phẩm thiếu thốn ở khắp mọi nơi, còn tình hình chính trị thì ngày càng trở nên bất ổn. Ở Mỹ, có một tiêu chuẩn sống cao hơn rất nhiều, mọi thứ đều dồi dào, và đời sống trong các cơ sở hàn lâm có vẻ như quá ư thoải mái. Sự tương phản quả là khổng lồ. Làm sao mà bạn có thể thuyết phục được ai đấy trở lại Liên Xô sau khi đã trải nghiệm tất cả những điểm ưu việt này? Sự ra đi của đại đa số các nhà toán học hàng đầu của Nga - hay thực sự là bất kỳ ai có thể tìm được một công việc - có vẻ như là không thể tránh được, và nó đã diễn ra rất nhanh chóng.

Tuy nhiên, Borya quyết định trở lại Moscow, mặc cho thực tế là anh sẽ phải tranh đấu với chủ nghĩa bài Do Thái trong suốt cuộc đời, và không hề có ảo tưởng gì về tình hình của Liên Xô cả. Anh được nhận vào học ở Đại học Moscow (năm 1969, khi anh nộp hồ sơ xin vào, một số sinh viên Do Thái vẫn còn được chấp nhận) nhưng lại không được nhận làm nghiên cứu sinh ở đó. Anh phải theo học và lấy bằng tiến sĩ tại một trường đại học tỉnh lẻ ở thành phố Yaroslavl. Sau đó, anh phải lao đao tìm kiếm việc làm, mãi cho tới khi được nhận vào viện Vật lý chất rắn. Dầu vậy, Borya thấy cuộc trốn chạy vội vã này quá ư rối loạn. Anh nghĩ rằng việc *đồng loạt* trốn chạy khỏi nước Nga như thế ở một thời điểm biến động lớn này là sai trái về mặt đạo đức, chẳng khác gì những con chuột rời bỏ con tàu đang bị chìm vậy.

Borya vô cùng buồn bã khi trường phái toán học Moscow vĩ đại chẳng bao lâu sẽ không còn nữa. Một cộng đồng toán học gắn kết chặt chẽ mà anh từng sống trong đó nhiều năm dường như sắp bay biến ngay trước mắt anh. Anh cũng biết rằng sắp tới mình sẽ phải làm việc gần như là đơn độc ở Moscow, anh sẽ bị tước đi niềm vui thú lớn nhất của cuộc đời: nghiên cứu toán học với bạn bè và đồng nghiệp.

Lẽ dĩ nhiên, chuyện này trở thành chủ đề chính trong những cuộc chuyện trò của tôi với Borya. Anh cố gắng thuyết phục tôi nên quay trở lại và đừng gục ngã trước cái mà anh cho là cơn kích động thái quá của những người đang cố gắng chạy trốn sang phương Tây. Anh cũng lo tôi sẽ không thể nào trở thành một nhà toán học giỏi ở Mỹ được. Cái “xã hội hưởng thụ” Mỹ, anh nghĩ, có thể giết chết động lực và đạo đức nghề nghiệp của bất kỳ ai.

“Hãy xem, cậu có tài năng,” anh nói với tôi, “nhưng nó cần được phát triển lên nữa. Cậu cần phải làm việc chăm chỉ, giống như cậu đã làm ở Moscow. Chỉ có như vậy cậu mới có thể thể hiện hết tiềm năng của mình. Ở đây, tại nước Mỹ, điều này là không thể. Có quá nhiều thứ làm xao lãng và quá nhiều cám dỗ. Cuộc sống ở đây tất cả chỉ là vui thú, hưởng thụ, và thỏa mãn tức thời. Làm sao mà cậu có thể tập trung vào nghiên cứu ở đây được?”

Tôi không đồng ý với lập luận của anh, chỉ ít là không hoàn toàn. Tôi biết rằng mình có một động lực lớn lao để làm toán. Nhưng tôi mới chỉ hai mươi một tuổi, còn Borya hơn tôi những mười lăm tuổi, là thầy hướng dẫn tôi. Tôi nợ anh mọi thứ mà tôi đã đạt được trong sự nghiệp toán học. Lời khuyên của anh khiến tôi chững lại - nhờ anh ấy đúng thì sao?

Lời mời của Harvard là bước ngoặt cuộc đời tôi. Chỉ mới năm năm trước, tôi đã trượt kỳ thi vào MGU, và lúc ấy tưởng như ước mơ trở thành nhà toán học của tôi đã tiêu tan không thể cứu vãn nổi. Được đến Harvard là một minh chứng, một phần thưởng cho những nỗ lực chăm chỉ của tôi ở Moscow trong năm năm đó. Nhưng tôi muốn tiếp

tục đi tới, tiếp tục có những khám phá mới. Tôi muốn trở thành nhà toán học giỏi nhất mà tôi có thể. Tôi coi lời mời của Harvard chỉ như một bước trong một hành trình dài. Đó là một bước tiến: Arthur Jaffe và những người khác đã tin tưởng ở tôi, và trao cho tôi cơ hội này. Tôi không thể làm họ thất vọng được.

Ở Cambridge, tôi may mắn có được sự ủng hộ của các nhà toán học xuất chúng như Victor Kac, những người đã động viên và giúp đỡ tôi theo mọi cách của riêng họ. Nhưng tôi vẫn cảm thấy sự ghen tị từ một số đồng nghiệp: tại sao gã đấy lại được ưu ái quá nhiều và quá sớm như thế? Hẳn đã làm được gì để xứng với điều đó? Tôi cảm thấy buộc phải thực hiện lời hứa của mình, phải chứng tỏ với mọi người thấy rằng những công trình toán học đầu tiên của tôi không phải chỉ là nhờ vào may mắn, rằng tôi có thể làm được những thứ còn tốt hơn và lớn lao hơn trong toán học.

Các nhà toán học tạo thành một cộng đồng nhỏ, và giống như tất cả mọi người, họ cũng thường tán gẫu về việc ai xứng với cái gì. Trong khoảng thời gian ngắn ngủi của tôi ở Harvard, tôi cũng nghe đủ chuyện về những thiên tài nhanh chóng tàn lụi. Tôi nghe thấy những lời bàn tán thiếu khoan dung về họ, như kiểu, “Nhớ người này, người kia không? Những công trình đầu tiên của hã cũng tuyệt lắm. Nhưng hã gần như chẳng làm ra được thứ gì quan trọng trong ba năm gần đây cả. Thật xấu hổ!”

Tôi sợ rằng ba năm sau họ cũng sẽ nói thế về mình, nên luôn cảm thấy áp lực phải làm được điều gì đó và đạt được thành công.

Trong khi đó, tình hình kinh tế ở Liên Xô đang nhanh chóng trở nên rệu rã, và triển vọng hết sức bất định. Nhận thấy tất cả những điều này từ trong nước và bị thuyết phục rằng tôi sẽ chẳng có tương lai gì ở Liên Xô cả, cha mẹ tôi đã đều đặn gọi điện thuyết phục tôi *đừng* trở về nữa. Trong những ngày ấy, rất khó (và rất đắt nữa) để gọi điện sang Mỹ từ Liên Xô. Cha mẹ tôi sợ rằng điện thoại nhà tôi bị ghi âm trộm, bởi vậy, họ phải tới Bưu điện trung tâm Moscow và thực hiện cuộc gọi ở

đó. Một chuyến đi như thế sẽ lấy mất của họ gần như cả một ngày. Và mặc dù cha mẹ nhớ tôi khủng khiếp, nhưng họ xác định sẽ làm mọi thứ trong khả năng để thuyết phục tôi ở lại Mỹ. Họ đã tuyệt đối tin rằng làm như thế là vì lợi ích tốt nhất của tôi.

Borya cũng nghĩ tới những lợi ích tốt nhất của tôi, nhưng quan điểm của anh một phần dựa trên nền tảng đạo đức. Anh đã đi ngược lại với xu hướng chung, và tôi ngưỡng mộ anh vì điều đó. Nhưng tôi cũng phải thừa nhận rằng anh có đủ khả năng để làm thế vì vị thế tương đối thoải mái của anh ở Moscow (dù rằng điều đó rồi sẽ nhanh chóng thay đổi, và anh buộc phải dành vài tháng trong năm đi công tác ở nước ngoài - chủ yếu là ở Nhật Bản - để trợ cấp cho gia đình). Vị thế của tôi lại hoàn toàn khác: tôi không có chỗ ở tại Moscow, và chỉ có một hộ khẩu tạm trú để sống ở đó. Mặc dù Yakov Isaevich đã kiếm được cho tôi một công việc tạm thời là làm trợ lý cho ông ở Kerosinka, nhưng đồng lương còm cõi mà tôi nhận được rõ ràng chỉ vừa đủ để thuê một phòng ở Moscow. Vì chủ nghĩa bài Do Thái, việc được nhận vào học sau đại học sẽ là một trận chiến đầy khó khăn, và triển vọng công việc trong tương lai của tôi có vẻ còn ảm đạm hơn nữa.

Cuối tháng 11, Arthur Jaffe gọi tôi tới phòng làm việc của ông và đề nghị kéo dài thời gian ở Harvard của tôi tới cuối tháng 5. Tôi phải quyết định nhanh chóng, nhưng tôi lại bị giằng xé. Tôi thích lối sống của mình ở Boston. Tôi cảm thấy rằng đây là nơi tôi thuộc về. Với Harvard và MIT, Cambridge là một trung tâm hàng đầu của toán học. Một số trí tuệ lỗi lạc nhất thế giới đang ở đây, và tôi có thể gõ cửa phòng họ, hỏi ý kiến và học hỏi từ họ. Cũng có vô khối các seminar mà ở đó khá nhiều các khám phá đầy phần khích được báo cáo ngay sau khi chúng được phát hiện. Ở quanh tôi là những sinh viên tài năng nhất. Đây là môi trường kích thích nhất cho một nhà toán học trẻ muốn khẳng định mình mà bất cứ ai cũng có thể tưởng tượng được. Moscow cũng từng là một nơi như vậy, nhưng giờ thì không còn như thế nữa.

Nhưng đây là lần đầu tiên tôi xa nhà trong một khoảng thời gian dài như vậy. Tôi nhớ gia đình và bạn bè. Còn Borya, người thầy của tôi, người thân thiết nhất của tôi ở Cambridge, lại cương quyết rằng tôi nên trở về vào tháng 12, như đã định.

Mỗi buổi sáng tôi thức dậy trong sợ hãi, nghĩ rằng “Mình nên làm gì?” Hồi tưởng lại, quyết định của tôi có vẻ như quá hiển nhiên. Nhưng với quá nhiều áp lực khác nhau va đập với nhau, lại cùng vào một lúc, khiến cho việc đưa ra quyết định lại không hề dễ dàng chút nào. Cuối cùng, sau nhiều lần cân nhắc trong đau khổ, tôi quyết định làm theo lời khuyên của cha mẹ là ở lại, và tôi nói với Jaffe về điều đó. Các bạn của tôi, Reshetikhin và Tsygan cũng làm như vậy.

Borya rất buồn vì điều này, và tôi cảm thấy mình đã làm anh ấy thất vọng. Đó là thời khắc buồn khổ và bất định ghê gớm khi tôi tiễn anh trở lại Moscow ở sân bay Logan, vào giữa tháng 12. Chúng tôi không biết rồi tương lai của cả hai sẽ như thế nào, thậm chí cũng không thể biết rằng liệu chúng tôi có thể sớm gặp lại nhau lúc nào đó nữa hay không. Tôi đã bỏ qua lời khuyên của Borya. Nhưng tôi vẫn e ngại có thể mình sẽ vấp phải những gì mà anh lo sợ.

Chương 14

BUỘC LẠI CÁC BÓ TRI THỨC

Kỳ học mùa xuân đón thêm vài vị khách nữa tới Harvard, trong số đó có Vladimir Drinfeld, một trong những người làm thay đổi hướng nghiên cứu của tôi, và trên nhiều phương diện còn làm thay đổi cả sự nghiệp toán học của tôi nữa. Mọi thứ xảy ra là nhờ Chương trình Langlands.

Trước đó, tôi từng được nghe nói về Drinfeld. Khi ấy anh mới chỉ ba mươi sáu tuổi, nhưng đã là một huyền thoại. Sáu tháng sau khi chúng tôi gặp nhau, anh được trao huy chương Fields, một trong những giải thưởng uy tín nhất trong toán học, được nhiều người cho là tương đương với giải thưởng Nobel.

Drinfeld công bố bài báo toán học đầu tiên khi mới mười bảy tuổi, và ở tuổi hai mươi anh đã tạo ra bước đột phá mới trong Chương trình Langlands. Sinh tại Kharkov, Ukraine, nơi cha anh là một giáo sư toán học có tiếng, Drinfeld học toán ở Đại học Moscow từ đầu những năm 1970. (Ở thời điểm đó, các học sinh Do Thái cũng gặp phải trắc trở để được nhận vào MGU, nhưng vẫn có tỉ lệ vài phần trăm trong đó được chấp nhận.) Vào thời gian nhận bằng cử nhân ở MGU, anh đã nổi tiếng trên toàn thế giới nhờ công trình của mình, và được nhận học sau đại học, một điều hết sức lạ thường với một sinh viên Do Thái. Người hướng dẫn anh là Yuri Ivanovich Manin, một trong những nhà toán học độc đáo và có ảnh hưởng nhất trên thế giới.

Tuy nhiên, ngay cả Drinfeld cũng không hoàn toàn thoát được khỏi chủ nghĩa bài Do Thái. Sau khi nhận bằng tiến sĩ, anh không thể xin được việc ở Moscow, và phải mất ba năm làm việc tại một đại học

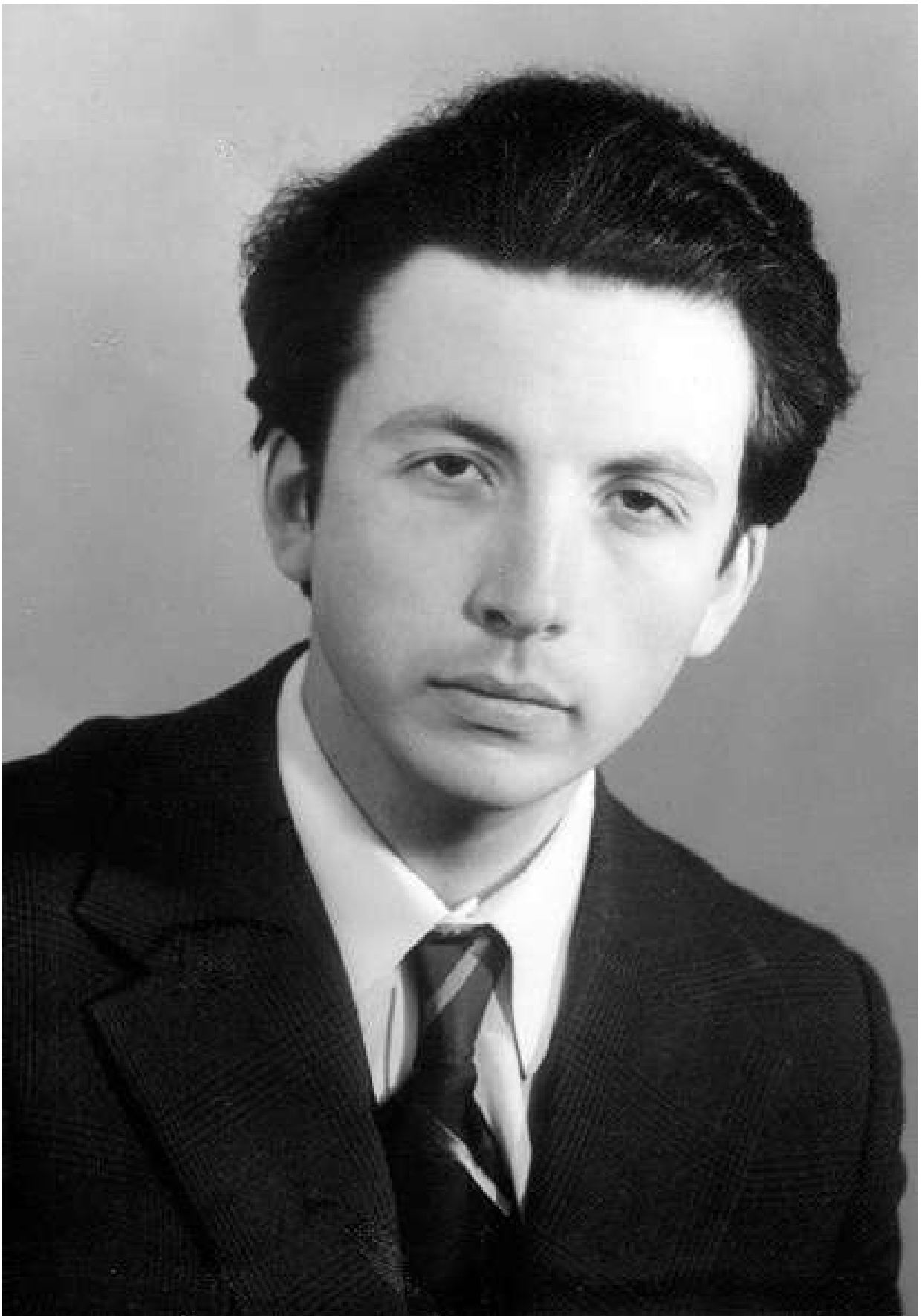
tinh lẻ ở Ufa, một thành phố công nghiệp ở vùng núi Ural. Drinfeld miễn cưỡng tới Ufa, nhất là vì ở đó không có nhà toán học nào làm việc trong những chủ đề mà anh quan tâm. Nhưng kết quả của việc tới Ufa là ở đó Drinfeld cùng với nhà toán học Vladimir Sokolov viết chung được một công trình quan trọng về lý thuyết các hệ khả tích - một chủ đề khá xa với những mối quan tâm của anh. Các hệ khả tích mà họ sáng tạo ra giờ đây được biết đến dưới tên là các hệ Drinfeld-Sokolov. Cuối cùng, sau ba năm ở Ufa, Drinfeld cũng có được việc làm tại thành phố quê hương anh, ở viện Vật lý nhiệt độ thấp Kharkov. Đây là một công việc tương đối thoải mái, và anh có điều kiện ở gần gia đình mình, nhưng sống ở Kharkov đồng nghĩa với việc anh sẽ bị cô lập với cộng đồng toán học Xô viết, tập trung chủ yếu ở Moscow, và với một cộng đồng nhỏ hơn ở St. Petersburg.

Bất chấp tất cả những điều ấy, dù là làm việc chủ yếu một mình, Drinfeld vẫn khám phá ra những kết quả phi thường trong các lĩnh vực khác nhau của toán học và vật lý. Ngoài việc chứng minh được những giả thuyết quan trọng trong Chương trình Langlands và mở ra một chương mới trong lý thuyết các hệ khả tích với Sokolov, anh còn phát triển được lý thuyết tổng quát của các nhóm lượng tử (vốn ban đầu được khám phá bởi Kolya Reshetikhin và các đồng tác giả), và rất nhiều thứ khác nữa. Quy mô những đóng góp của anh là không thể tưởng tượng nổi.

Đã có người cố gắng tuyển Drinfeld tới làm việc ở Moscow. Tôi được kể rằng, nhà vật lý Alexander Belavin, đã tìm cách đưa Drinfeld tới làm việc ở viện Vật lý lý thuyết Landau ở gần Moscow. Để tăng cơ may thành công, Belavin và Drinfeld đã cùng nhau giải được một bài toán quan trọng, đó là phân loại các nghiệm của “phương trình Yang-Baxter cổ điển”, điều các nhà vật lý rất quan tâm khi ấy. Bài báo của họ được công bố với nhiều lời khen ngợi trong tạp chí *Giải tích hàm và ứng dụng* của Gelfand (tôi tin rằng bài báo của anh là bài báo dài nhất từng được Gelfand cho công bố, điều này nói lên tầm quan trọng to lớn của nó). Và đây cũng chính là công trình đưa Drinfeld đến với lý thuyết

của các nhóm lượng tử, lý thuyết làm cách mạng hóa rất nhiều lĩnh vực trong toán học. Nhưng than ôi, không một kế hoạch tuyển dụng nào thành công cả. Chủ nghĩa bài Do Thái và việc thiếu hộ khẩu ở Moscow của Drinfeld là một sự kết hợp chết người. Drinfeld vẫn phải ở Kharkov, hiếm khi đến Moscow.

Drinfeld được mời đến Harvard vào mùa xuân năm 1990, và điều này là một bất ngờ thú vị đối với tôi. Anh đến vào cuối tháng 1. Do đã được nghe tất cả những huyền thoại về anh, nên lúc đầu tôi cũng hơi e ngại, nhưng hóa ra anh lại cực kỳ tử tế và hào hiệp. Với giọng nói nhẹ nhàng, cẩn thận cân nhắc từng lời nói của mình, Drinfeld rất rõ ràng mỗi khi nói về toán học. Khi giải thích cho bạn, anh không cố gắng làm theo cách tự phóng đại bản thân mình, như kiểu anh vừa hé lộ một bí ẩn lớn mà bạn sẽ không bao giờ có thể tự hiểu được hoàn toàn (thật không may, đây lại là trường hợp của vài bạn đồng nghiệp của chúng tôi, mà cho tới giờ vẫn vô danh). Trái lại, anh luôn biết sắp đặt mọi thứ theo cách đơn giản và sáng sủa nhất có thể, do đó sau khi nghe anh giải thích điều gì đó với bạn, bạn cảm thấy như mình đã biết tất cả về nó ngay từ đầu vậy.



Quan trọng hơn, Drinfeld đã nói ngay với tôi rằng anh rất quan tâm tới công trình của tôi với Feigin, và muốn sử dụng nó cho đề tài mới của anh có liên quan tới Chương trình Langlands.

Hãy cùng nhắc lại ba cột trên phiến đá Rosetta của André Weil mà ta đã nói ở chương 9:

Lý thuyết số

*Những đường cong trên
các trường hữu hạn* Các diện Riemann

Chương trình Langlands ban đầu được phát triển ở cột bên trái và cột giữa: lý thuyết số và lý thuyết về những đường cong trên các trường hữu hạn. Ý tưởng của Chương trình Langlands là thiết lập một mối liên hệ giữa các biểu diễn của một nhóm Galois và các hàm tự đẳng cấu. Khái niệm nhóm Galois có ý nghĩa hoàn hảo trong cột bên trái và cột ở giữa của phiến đá Rosetta, và có nhiều hàm tự đẳng cấu phù hợp có thể tìm thấy trong một lĩnh vực khác của toán học gọi là giải tích điều hòa.

Trước công trình của Drinfeld, người ta còn chưa biết rõ liệu có một sự tương tự của Chương trình Langlands cho cột bên phải, tức lý thuyết của các diện Riemann hay không. Các phương tiện để bao hàm cả các diện Riemann bắt đầu xuất hiện ở những năm đầu thập niên 1980 trong công trình của Drinfeld, và sau này được tiếp bước bởi nhà toán học Pháp, Gérard Laumon. Họ nhận ra rằng có thể phát biểu lại Chương trình Langlands một cách hình học để cho cột ở giữa và cột bên phải trên phiến đá Rosetta của André Weil đều trở nên có nghĩa.

Trong cột bên trái và cột ở giữa của phiến đá Rosetta, Chương trình Langlands liên kết các nhóm Galois với các hàm tự đẳng cấu. Vấn đề đặt ra lúc này là tìm kiếm những tương tự trực tiếp của các nhóm Galois và các hàm tự đẳng cấu trong lý thuyết hình học của các diện Riemann. Ở chương 9, chúng ta cũng thấy rằng trong lý thuyết hình học này nhóm cơ bản của một diện Riemann đóng vai trò của nhóm

Galois. Nhưng chúng ta lại không xét đến những tương tự hình học của các hàm tự đẳng cấu.

Hóa ra những tương tự hình học đúng lại không phải là các hàm, mà là các bó.

Để giải thích bó là gì, ta hãy nói về các con số trước. Chúng ta có các số tự nhiên: $1, 2, 3, \dots$ và dĩ nhiên chúng có rất nhiều ứng dụng. Một trong số đó được dùng để đo số chiều. Như chúng ta đã thảo luận trong chương 10, một đường thẳng là 1 chiều, một mặt phẳng là 2 chiều, và với bất kỳ số tự nhiên n nào chúng ta có một không gian phẳng n -chiều, cũng được biết đến như là một không gian vector^[109]. Bây giờ hãy tưởng tượng một thế giới mà trong đó các số tự nhiên được thay thế bởi các không gian vector; tức là thay vì số 1 ta có một đường thẳng, thay vì số 2 ta có một mặt phẳng, v.v.

Trong thế giới mới này, phép cộng các con số bây giờ được thay thế bằng tổng trực tiếp của các không gian vector. Với hai không gian vector bất kỳ cho trước, thuộc hai hệ tọa độ riêng rẽ, chúng ta tạo ra một không gian mới bằng cách kết hợp các tọa độ của cả hai không gian, và do vậy số chiều của nó bằng tổng số chiều của hai không gian ban đầu. Chẳng hạn, một đường thẳng có một tọa độ, còn mặt phẳng thì có hai. Tổng hợp chúng lại, ta được một không gian vector với ba tọa độ. Đó chính là không gian ba chiều của chúng ta.

Phép nhân các số tự nhiên được thay thế bởi một phép toán khác trên các không gian vector: cho trước hai không gian vector, chúng ta tạo ra không gian thứ ba, gọi là tích tensor của chúng. Tôi sẽ không đưa ra ở đây định nghĩa chính xác của tích tensor; điểm quan trọng là nếu hai không gian vector ban đầu của ta có số chiều lần lượt là m và n thì tích tensor của chúng có số chiều là $m.n$.

Do vậy, các phép toán trên các không gian vector tương tự với các phép toán cộng và nhân trên tập hợp các số tự nhiên. Nhưng thế giới song song chứa các không gian vector này phong phú hơn thế giới các số tự nhiên rất nhiều! Một con số không có cấu trúc nội tại. Như số 3

chẳng hạn, tự thân nó không có đối xứng nào cả. Nhưng một không gian ba chiều thì có. Thực tế, chúng ta đã thấy rằng bất kỳ phần tử nào của nhóm Lie $SO(3)$ cũng khởi sinh một phép quay của không gian ba chiều. Số 3 chỉ thuần túy là cái bóng của không gian ba chiều, nó chỉ phản ánh một thuộc tính của không gian này, ấy là số chiều. Nhưng con số này không chỉ ra được hết những khía cạnh khác của các không gian vector, chẳng hạn như những đối xứng của nó.

Trong toán học hiện đại, chúng ta tạo ra một thế giới mới mà trong đó các con số được hóa thân thành những không gian vector. Mỗi không gian này có một đời sống riêng phong phú và viên mãn, đồng thời chúng cũng có những mối liên hệ ý nghĩa hơn với nhau, không thể quy về các phép cộng và nhân đơn giản. Thực vậy, chúng ta có thể lấy 2 trừ 1 chỉ theo một cách. Nhưng chúng ta có thể nhúng một đường thẳng vào trong một mặt phẳng theo rất nhiều cách khác nhau.

Không giống các số tự nhiên, tạo thành một tập hợp, các không gian vector tạo thành một cấu trúc phức tạp hơn, các nhà toán học gọi đó là một phạm trù. Một phạm trù cho trước bao gồm các “vật”, như là các không gian vector, nhưng ngoài ra chúng còn có các “cấu xạ” từ vật này tới vật kia nữa.^[110] Chẳng hạn, các cấu xạ từ một vật vào chính nó trong một phạm trù cho trước về bản chất chính là các đối xứng của vật đó được cho phép trong phạm trù ấy. Do vậy ngôn ngữ phạm trù cho phép chúng ta tập trung không phải vào cấu trúc của các vật mà vào những phương thức tương tác giữa chúng. Bởi vậy, lý thuyết toán học của các phạm trù hóa ra lại đặc biệt phù hợp với khoa học máy tính.^[111] Sự phát triển của các ngôn ngữ lập trình hàm, như Haskell, chỉ là một trong vô số những ứng dụng mới đây.^[112] Có vẻ như việc các thể hệ máy tính mới sẽ dựa trên lý thuyết phạm trù nhiều hơn lý thuyết tập hợp là điều không thể tránh khỏi, và các phạm trù sẽ thâm nhập vào đời sống hằng ngày của chúng ta, bất kể chúng ta có nhận thấy hay không.

Sự thay đổi mẫu hình từ tập hợp tới các phạm trù cũng là một trong những động lực chủ đạo của toán học hiện đại. Nó được nhắc tới

dưới cái tên *sự phạm trù hóa*. Về thực chất, chúng ta đang tạo ra một thế giới mới, trong đó các khái niệm đã biết được nâng lên tầm cao hơn. Chẳng hạn, các con số được thay thế bằng các không gian vector. Câu hỏi tiếp theo là: cái gì sẽ thay thế các hàm số trong thế giới mới này?

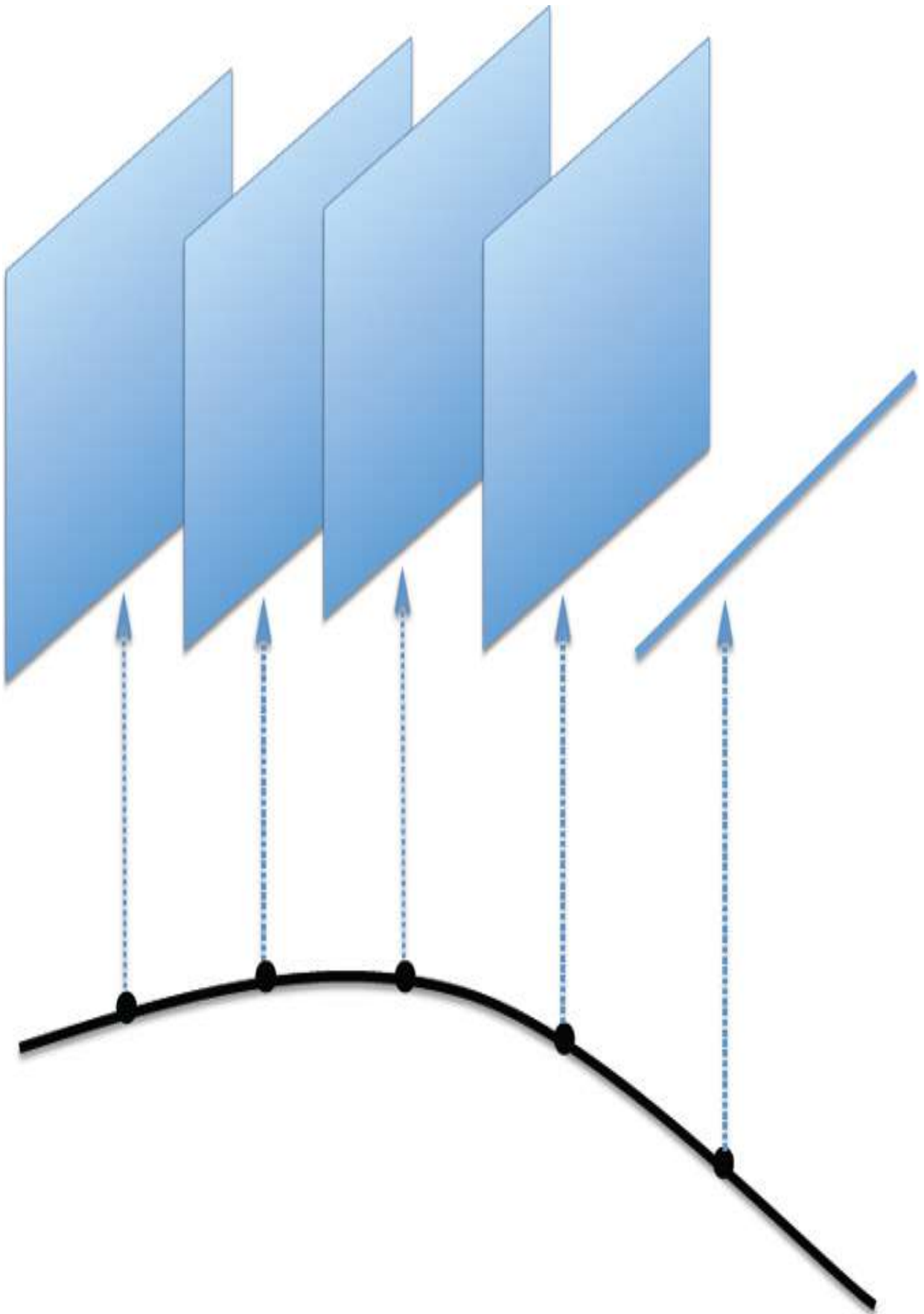
Để trả lời câu hỏi đó, hãy cùng ôn lại khái niệm hàm số. Giả sử chúng ta có một dạng hình học, như một mặt cầu hoặc một đường tròn, hay bề mặt của một chiếc bánh donut, chẳng hạn. Gọi nó là S . Như ta đã thảo luận ở trên, các nhà toán học gọi những dạng hình học như vậy là các đa tạp. Một hàm f trên một đa tạp S là một quy tắc gán mỗi điểm s trên S với một con số, gọi là giá trị của hàm số f tại điểm s . Chúng ta ký hiệu nó là $f(s)$.

Ví dụ một hàm số là nhiệt độ, với đa tạp S đơn giản chính là không gian ba chiều mà ta đang sống. Tại mỗi điểm s , ta có thể đo nhiệt độ, bằng một con số. Điều này cho ta một quy tắc gán mỗi điểm với một con số, do vậy ta có một hàm số. Tương tự như vậy, khí áp cũng cho ta một hàm số.

Xét một ví dụ khác trừu tượng hơn, ta cho S là một đường tròn. Mỗi điểm trên đường tròn được xác định bởi một góc, mà như trước đây ta sẽ gọi nó là φ . Đặt f là hàm sin. Khi đó giá trị của hàm này tại điểm trên đường tròn tương ứng với góc φ là $\sin(\varphi)$. Chẳng hạn nếu $\varphi = 30^\circ$ (hay $\pi/6$ nếu chúng ta đo góc bằng radian thay vì độ), thì giá trị của hàm sin bằng $1/2$. Nếu $\varphi = 60^\circ$ (hay $\pi/3$), thì giá trị đó là $\sqrt{3}/2$, v.v

Bây giờ ta sẽ thay thế các con số bằng các không gian vector. Khi ấy một hàm sẽ trở thành một quy tắc gán mỗi điểm s trên đa tạp S , không phải với một con số mà là với một không gian vector. Một quy tắc như vậy gọi là một bó. Nếu ta ký hiệu một bó bằng chữ cái F , thì không gian vector được gán cho điểm s sẽ được ký hiệu bởi $F(s)$.

Do đó sự khác biệt giữa các hàm số và các bó là ở cái mà chúng ta gán cho mỗi điểm trên đa tạp S : với các hàm số, chúng ta gán các con số cho các điểm, còn với các bó thì cái ta gán là các không gian vector. Với một bó cho trước, tại mỗi điểm s khác nhau, các không gian vector này có thể có số chiều khác nhau. Chẳng hạn ở hình dưới đây, hầu hết các không gian vector là mặt phẳng (tức là không gian vector hai chiều), nhưng vẫn có một trong số đó là đường thẳng (tức là không gian vector 1 chiều). Các bó là phạm trù hóa của các hàm số, theo cùng một cách như các không gian vector là phạm trù hóa của các con số vậy.



Mặc dù điều này vượt ra ngoài phạm vi kiến thức của cuốn sách này, nhưng một bó thực ra không chỉ là một tập hợp rời rạc của các không gian vector được gán cho các điểm trên đa tạp đang xét. Các thớ của một bó cho trước tại các điểm khác nhau phải liên hệ với nhau bởi một tập hợp các quy tắc cụ thể. [\[113\]](#)

Nhưng điều quan trọng đối với chúng ta lúc này đó là có một sự tương tự sâu sắc giữa các hàm và các bó, và điều này đã được khám phá bởi nhà toán học vĩ đại người Pháp Alexander Grothendieck.

Tầm ảnh hưởng của Grothendieck đối với toán học hiện đại thực sự là vô tiền khoáng hậu. Nếu bạn hỏi ai là nhà toán học quan trọng nhất trong nửa sau của thế kỷ 20, thì rất nhiều nhà toán học sẽ trả lời mà không hề do dự: Grothendieck. Không chỉ bởi vì ông gần như đơn thương độc mã sáng tạo ra hình học đại số hiện đại, mà ông còn làm thay đổi cách suy nghĩ của chúng ta về toán học nói chung. Từ điển giữa các hàm và các bó mà chúng ta sử dụng để phát biểu lại Chương trình Langlands một cách hình học, là một ví dụ tuyệt vời về sự hiểu biết cực kỳ sâu sắc, vốn là đặc trưng trong các công trình của Grothendieck.

Để cho các bạn thấy thực chất ý tưởng của Grothendieck, tôi sẽ nhắc lại khái niệm về trường hữu hạn ở chương 8. Với mỗi số nguyên tố p , tồn tại một trường hữu hạn với p phần tử $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Như ta đã thảo luận, p phần tử này tạo thành một hệ thống số với các phép toán cộng, trừ, nhân, và chia theo modun p , và các phép toán này cũng tuân theo các quy tắc giống như các phép toán tương ứng trên các số hữu tỉ và các số thực.

Nhưng vẫn có gì đó đặc biệt về hệ thống số này. Nếu bạn lấy bất kỳ phần tử nào của trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ và nâng lên lũy thừa p - theo nghĩa modun p mà ta đã thảo luận trước đây - bạn sẽ nhận lại chính phần tử đó! Nói cách khác:

$$a^p = a \text{ theo modun } p$$

Công thức này đã được Pierre Fermat, tác giả của Định lý cuối cùng của Fermat, chứng minh. Không giống như chứng minh của định lý kia, chứng minh cho công thức này khá đơn giản. Nó có thể viết vừa vặn bên lề một cuốn sách. Và tôi đã đưa nó vào cuối của cuốn sách này. ^[114] Để phân biệt kết quả trên với Định lý cuối cùng của Fermat (đôi khi còn được gọi là Định lý Fermat lớn), nó được gọi là Định lý Fermat nhỏ.

Chẳng hạn, lấy $p = 5$. Khi đó trường của chúng ta là $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Lấy lũy thừa bậc năm của mỗi phần tử. Chắc chắn là 0 lũy thừa lên bao nhiêu thì cũng bằng 0, 1 lũy thừa mấy thì cũng bằng 1, không có gì đáng ngạc nhiên ở đây cả. Tiếp theo, lấy lũy thừa 5 của 2, ta được 32. Nhưng $32 = 2 + 5 \cdot 6$, do vậy theo modun 5 sẽ được 2 - nghĩa là ta nhận lại 2 theo công thức trên. Hãy lấy lũy thừa 5 của 3, ta được 243, nhưng nó bằng $3 + 5 \cdot 48$, do vậy nó là 3 theo modun 5. Một lần nữa, ta lại nhận được số mà ta đã bắt đầu. Và cuối cùng, làm tương tự với 4, lũy thừa bậc năm của nó là 1024, cũng chính là 4 theo modun 5. Quả đúng như định lý đã nói. Tôi khuyên bạn nên kiểm tra $a^3 = a$ theo modun 3, và $a^7 = a$ theo modun 7 (với những số nguyên tố lớn hơn bạn cần một chiếc máy tính bỏ túi để kiểm tra Định lý Fermat nhỏ).

Điều cũng đáng lưu ý ở đây, đó là một phương trình tương tự đã tạo thành cơ sở của thuật toán mã hóa RSA được sử dụng rộng rãi trong giao dịch ngân hàng trực tuyến. ^[115]

Công thức $a^p = a$ theo modun p này còn hơn cả một khám phá tinh tế - nó mang ý nghĩa rằng phép nâng các số lên lũy thừa bậc p , gửi a vào a^p , là một phần tử thuộc nhóm Galois của trường hữu hạn. Nó được gọi là đối xứng Frobenius. Hóa ra nhóm Galois của trường hữu hạn p phần tử lại sinh ra bởi chính đối xứng Frobenius này. ^[116]

Hãy cùng quay trở lại với ý tưởng của Grothendieck. Chúng ta bắt đầu ở cột giữa trên phiến đá Rosetta của Weil. Khi đó chúng ta sẽ nghiên cứu những đường cong trên các trường hữu hạn và những đa tạp tổng

quát hơn trên các trường hữu hạn. Những đa tạp này được xác định bởi hệ các phương trình đa thức như:

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

mà chúng ta đã nói đến ở chương 9.

Giả sử chúng ta có một bó trên một đa tạp như vậy. Nó là một quy tắc gán cho mỗi điểm của đa tạp một không gian vector, nhưng thực tế có nhiều cấu trúc hơn. Khái niệm bó được định nghĩa sao cho bất kỳ một đối xứng nào của hệ thống số mà đa tạp được xác định - trong trường hợp này là một trường hữu hạn - đều khởi sinh một đối xứng của không gian vector đó. Đặc biệt, đối xứng Frobenius, một phần tử trong nhóm Galois của trường hữu hạn, nhất thiết phải sinh ra một đối xứng (như phép quay hoặc phép dẫn) của không gian vector này.

Bây giờ, nếu chúng ta có một đối xứng của một không gian vector, chúng ta có thể tạo ra được một con số từ nó. Có một kỹ thuật chuẩn để làm điều này. Chẳng hạn, nếu không gian vector của chúng ta là một đường thẳng, thì đối xứng của không gian này mà chúng ta thu được từ đối xứng Frobenius sẽ là một phép dẫn: mỗi phần tử z sẽ được chuyển thành Az với một số A nào đó. Khi đó con số mà ta gán cho đối xứng này chính là A . Còn với không gian vector có số chiều lớn hơn 1, chúng ta sẽ lấy vết của đối xứng này.^[117] Bằng cách lấy vết của đối xứng Frobenius trên không gian $F(s)$, ta gán một con số cho chính điểm s .

Trường hợp đơn giản nhất là đối xứng Frobenius đóng vai trò như đối xứng đồng nhất trên không gian vector. Khi đó vết của nó bằng với chiều của không gian vector. Do vậy trong trường hợp này, bằng cách lấy vết của đối xứng Frobenius, chúng ta gán cho không gian vector số chiều của nó. Nhưng nếu đối xứng Frobenius không phải là đối xứng đồng nhất, thì phép dựng này sẽ gán cho không gian vector một con số tổng quát hơn, mà không nhất thiết phải là số tự nhiên.

Kết luận trên có nghĩa là nếu có một đa tạp S trên trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ (điều sẽ xảy ra nếu ta xét cột ở giữa trên phiến đá Rosetta của Weil) và một bó F trên S , thì chúng ta có thể gán cho mỗi

điểm s trên S một con số. Cách làm này cho ta một hàm số trên S . Bởi vậy ta thấy rằng ở cột giữa trên phiến đá Rosetta của Weil ta có một cách đi từ các bó tới các hàm số.

Grothendieck gọi đây là “từ điển bó-tới-hàm”. Tuy nhiên, đây là một dạng từ điển kỳ lạ. Dựa vào phương thức được mô tả ở trên, chúng ta sẽ nhận được một kết nối từ các bó tới các hàm. Hơn nữa, các phép toán tự nhiên trên các bó cũng tương tự với các phép toán tự nhiên trên các hàm. Chẳng hạn như phép toán lấy tổng trực tiếp hai bó, được định nghĩa tương tự như tổng trực tiếp của hai không gian vector, thì cũng tương tự với phép toán lấy tổng của hai hàm số.

Nhưng không có cách tự nhiên nào để đi ngược từ các hàm tới các bó.^[118] Hóa ra ta chỉ có thể làm thế với một vài hàm thôi, chứ không phải với tất cả. Nhưng nếu ta có thể làm được, thì bó sẽ mang thêm nhiều thông tin phụ mà hàm số không có. Thông tin này sau đó có thể được sử dụng để tiếp cận phần cốt lõi nhất của hàm số ấy. Có một thực tế đáng chú ý là hầu hết các hàm số xuất hiện trong Chương trình Langlands (trong cột thứ hai của phiến đá Rosetta của Weil) đều bắt nguồn từ các bó.

Các nhà toán học đã nghiên cứu các hàm số, một trong những khái niệm trung tâm của toàn bộ toán học, trong nhiều thế kỷ. Đây là một khái niệm mà chúng ta có thể hiểu được trực quan khi liên tưởng tới nhiệt độ hay khí áp. Nhưng điều mà người ta không nhận biết được trước Grothendieck là nếu xét các đa tạp trên những trường hữu hạn (như là các đường cong trên một trường hữu hạn), chúng ta có thể đi xa hơn các hàm, và thay vì các hàm, chúng ta sẽ làm việc với các bó.

Nếu bạn thích, thì có thể coi các hàm số là khái niệm của toán học cổ đại, và các bó là khái niệm của toán học hiện đại. Grothendieck đã chỉ ra rằng, trên nhiều phương diện, các bó mang tính căn bản hơn: các hàm số cổ điển kia chỉ còn thuần túy là những cái bóng của chúng mà thôi.

Khám phá này đã thúc đẩy mạnh mẽ sự tiến bộ toán học ở nửa sau của thế kỷ 20. Bởi các bó là những đối tượng quan trọng và linh hoạt hơn, với nhiều cấu trúc hơn. Chẳng hạn, một bó có thể có những đối xứng của riêng nó. Nếu chúng ta nâng một hàm thành một bó, chúng ta có thể khai thác những đối xứng ấy, và bằng cách này chúng ta có thể học hỏi được nhiều điều so với sử dụng hàm số.

Điều thực sự quan trọng với chúng ta đó là các bó có ý nghĩa cả trong cột giữa lẫn cột bên phải của phiên đá Rosetta của Weil. Điều này mở ra một hướng dịch chuyển Chương trình Langlands từ cột giữa sang cột bên phải.

Trong cột bên phải của phiên đá Rosetta, chúng ta xét các đa tạp được xác định trên trường số phức. Chẳng hạn, chúng ta xét các diện Riemann như là mặt cầu hay bề mặt của một chiếc bánh donut. Trong thiết đặt này, các hàm tự đẳng cấu xuất hiện ở cột bên trái và cột giữa của phiên đá Rosetta của Weil không mang nhiều ý nghĩa. Nhưng các bó thì lại khác. Do vậy một khi chúng ta thay thế các hàm bằng các bó ở cột giữa (ta có thể làm được như vậy nhờ có từ điển của Grothendieck), ta sẽ lại thu được sự tương tự giữa cột giữa và cột bên phải của phiên đá Rosetta của Weil.

Ta hãy tổng kết lại: khi đi từ cột giữa sang cột bên phải của phiên đá Rosetta, chúng ta phải thực hiện một số điều chỉnh ở cả hai vế của mỗi liên hệ này, mỗi liên hệ mà Chương trình Langlands đã gợi mở. Đó là bởi vì những khái niệm của nhóm Galois và các hàm tự đẳng cấu không có các đối ứng trực tiếp trong hình học của các diện Riemann. Đầu tiên, nhóm Galois tìm thấy sự tương tự của nó trong nhóm cơ bản của một diện Riemann, như đã giải thích ở chương 9. Tiếp theo, chúng ta sử dụng từ điển Grothendieck và thay vì các hàm tự đẳng cấu, chúng ta xét các bó thỏa mãn những tính chất tương tự như những tính chất của các hàm tự đẳng cấu. Ta gọi chúng là các bó tự đẳng cấu.

Những điều trên được minh họa bởi lược đồ sau, trong đó chúng ta có ba cột của phiến đá Rosetta, và hai hàng ở mỗi cột chứa tên các đối tượng ở hai vế của quan hệ Langlands đặc thù cho cột đó.

<i>Lý thuyết số</i>	<i>Những đường cong trên các trường hữu hạn</i>	<i>Các trường C</i>	<i>diện Riemann</i>
Nhóm Galois	Nhóm Galois		Nhóm cơ bản
Các hàm tự đẳng cấu	Các hàm tự đẳng cấu	Cấu trúc hoặc các bó tự đẳng cấu	Các bó tự đẳng cấu

Câu hỏi đặt ra lúc này là làm thế nào để xây dựng được các bó tự đẳng cấu. Đây hóa ra lại là vấn đề cực kỳ khó. Đầu thập niên 1980, lần đầu tiên Drinfeld đề xuất cách xây dựng như vậy cho trường hợp đơn giản nhất (dựa trên những công trình trước đây chưa được công bố của Pierre Deligne). Những ý tưởng của Deligne được Gérard Laumon phát triển xa hơn một vài năm sau đó.

Khi tôi gặp Drinfeld, anh nói đã phát hiện ra một phương pháp mới rất quan trọng để xây dựng các bó tự đẳng cấu. Nhưng cách xây dựng mới này lại phụ thuộc vào một giả thuyết mà anh nghĩ là tôi có thể rút ra từ công trình của mình với Feigin về các đại số Kac-Moody. Tôi không thể tin nổi: công trình của tôi lại có thể hữu ích đối với Chương trình Langlands ư?

Cơ hội có thể làm được gì đó liên quan tới Chương trình Langlands khiến tôi hào hứng học mọi thứ về nó. Mùa xuân năm ấy, hầu như ngày nào tôi cũng ghé tới văn phòng của Drinfeld ở Harvard, quấy rầy anh với đủ thứ câu hỏi về Chương trình Langlands, còn anh luôn trả lời một cách kiên nhẫn. Anh cũng hỏi về công trình tôi viết chung với Feigin, bởi nội dung của nó rất quan trọng đối với cái mà anh đang làm. Thời gian còn lại của ngày tôi đọc ngẫu nhiên tất cả những gì có thể tìm thấy trong thư viện Harvard về Chương trình Langlands. Chủ đề này quá quyến rũ tới nỗi mỗi đêm tôi cố gắng ngủ

thật nhanh, sao cho buổi sáng tới sớm hơn và tôi có thể đắm mình sâu hơn vào Chương trình Langlands. Tôi biết là mình đã dẫn thân vào một trong những dự án quan trọng nhất của cuộc đời.

Còn vài chuyện nữa diễn ra gần vào cuối kỳ học mùa xuân đã ném tôi quay trở lại ngay trải nghiệm kiểu Kafka của kỳ thi tuyển vào Đại học Tổng hợp Moscow.

Một ngày, Victor Kac gọi điện cho tôi từ nhà ông ở Cambridge và nói rằng có ai đó đã mời Anatoly Logunov, Hiệu trưởng của Đại học Tổng hợp Moscow tới để giảng bài ở khoa Vật lý của MIT. Kac và nhiều đồng nghiệp khác cảm thấy như bị xúc phạm khi MIT lại trao diễn đàn cho một người chịu trách nhiệm trực tiếp về việc phân biệt đối xử với các sinh viên Do Thái trong kỳ thi tuyển vào MGU. Kac và mọi người cảm thấy rằng hành động của ông ta chính là một tội ác, do vậy lời mời này quả là một sự phỉ báng.

Logunov là một người đàn ông rất quyền lực: ông ta không chỉ là hiệu trưởng của MGU, mà còn là giám đốc của viện Vật lý năng lượng cao, ủy viên Ban chấp hành Trung ương Đảng cộng sản Liên Xô, và nhiều chức vụ khác. Nhưng tại sao ai đó ở MIT lại mời ông ta nhỉ? Dù thế nào đi nữa, Kac cùng một vài đồng nghiệp kịch liệt phản đối và yêu cầu phải hủy chuyến thăm viếng cùng bài giảng đó. Một sự thỏa hiệp được chấp nhận sau vài cuộc thương thảo: Logunov sẽ tới và trình bày bài giảng, nhưng sau bài giảng ấy sẽ có một cuộc đối thoại về tình hình ở MGU, và mọi người sẽ có cơ hội đối chất với ông ta về tình trạng phân biệt đối xử. Đại loại cũng giống như cuộc họp của Hội đồng thành phố vậy.

Lẽ dĩ nhiên, Kac mời tôi đến tham dự cuộc gặp gỡ đó để trình bày câu chuyện của mình như một bằng chứng điển hình nhất cho những gì đã xảy ra ở MGU dưới sự lãnh đạo của Logunov. Tôi hơi miễn cưỡng khi phải làm việc này. Tôi chắc rằng Logunov sẽ được các “phụ tá” hộ tống, những người này sẽ ghi chép lại mọi thứ. Hãy nhớ rằng, khi đó là

tháng 5 năm 1990, hơn một năm trước *cuộc nổi dậy* thất bại vào tháng 8 năm 1991, khởi đầu cho sự tan rã của Liên Xô. Mà tôi thì sẽ phải trở về nhà vào mùa hè. Nếu tôi nói gì đó thậm chí chỉ hơi khiến một quan chức Xô viết có địa vị cao như Logunov bối rối, tôi có thể dễ dàng rơi vào vòng nguy hiểm. Ít nhất thì họ cũng có thể ngăn cản tôi rời khỏi Liên Xô và trở lại Harvard. Dầu vậy, tôi không thể từ chối yêu cầu của Kac. Tôi biết lời chứng của mình quan trọng thế nào ở buổi đối thoại, nên tôi nói với Kac rằng mình sẽ đến, và nếu cần thiết, tôi sẽ kể lại chuyện của mình. Kac cố gắng trấn an tôi.

“Đừng lo, Edik,” ông nói, “nếu họ bỏ tù cậu vì chuyện này, tôi sẽ làm tất cả những gì có thể để cứu cậu ra.”

Lời đồn về sự kiện sắp tới đã lan ra rất nhanh chóng, và giảng đường chật ních thính giả ngồi nghe Logunov thuyết trình. Mọi người không đến để học bất kỳ thứ gì từ ông ta cả. Ai cũng biết rằng Logunov là một nhà vật lý yếu kém, ông ta đã dành cả sự nghiệp để bác bỏ thuyết tương đối của Einstein (Điều tôi cứ băn khoăn tự hỏi tại sao). Như chờ đợi, bài thuyết trình - về lý thuyết hấp dẫn “mới” của ông ta - thực ra chẳng có mấy giá trị. Nhưng ở nhiều khía cạnh thì nó khá bất thường. Trước tiên, Logunov không nói bằng tiếng Anh mà bằng tiếng Nga, và được dịch trực tiếp bởi một người đàn ông cao to trong bộ comple và cà vạt đen, với một thứ tiếng Anh hoàn hảo. Anh ta có lẽ cũng có chữ “KGB” in hoa trên trán. Kẻ nhân bản vô tính của anh ta (như trong phim *Ma trận*) ngồi lẫn trong đám khán giả và quan sát xung quanh.

Trước khi bài giảng bắt đầu, một trong những chủ tọa của MIT đã mời Logunov, giới thiệu ông ta theo một kiểu rất kỳ quặc. Người này chiếu một slide của trang đầu một bài báo viết bằng tiếng Anh, trong đó Logunov là đồng tác giả với một vài người khác, công bố khoảng một thập kỷ trước. Tôi đoán rằng chuyện đó chẳng qua là để chỉ ra rằng Logunov cũng không hoàn toàn là một tên ngốc, mà thực ra cũng đã có danh tiếng qua một vài công bố trong một số tạp chí có bình duyệt. Tôi

chưa từng thấy ai được giới thiệu theo kiểu như vậy. Rõ ràng là Logunov được mời đến MIT không phải bởi tài năng khoa học của ông ta.

Không có sự phản đối nào trong khi bài giảng diễn ra, mặc dù Kac đã phân phát cho các thính giả những bản copy của vài tài liệu chỉ trích. Một trong số đó là bảng điểm của một sinh viên mang họ Do Thái từ một thập kỷ trước. Anh đã đạt điểm A ở tất cả các môn, nhưng trong năm cuối ở MGU anh đã bị đuổi vì “thành tích học tập”. Một chú thích ngắn được thêm vào bảng điểm thông báo cho người đọc thấy rằng sinh viên này đã bị các nhân viên an ninh mật phát hiện tại một giáo đường Do Thái ở Moscow.

Sau khi bài giảng kết thúc, mọi người tới một căn phòng khác và ngồi quanh một chiếc bàn chữ nhật lớn. Logunov ngồi ở một phía, gần cuối bàn, với hai “trợ lý” là hai nhân viên an ninh mặc thường phục yểm trợ ngồi hai bên có nhiệm vụ phiên dịch, còn Kac và những người tố cáo ngồi ở phía đối diện. Tôi ngồi yên lặng với vài người bạn ở đầu đối diện của bàn, cùng phía với Logunov, do vậy ông ta không chú ý đến chúng tôi.

Đầu tiên, Kac và một số người khác nói rằng họ đã được nghe về nhiều trường hợp học sinh Do Thái không được nhận vào MGU. Họ hỏi Logunov, với tư cách là hiệu trưởng của Đại học Tổng hợp Moscow, ông ta sẽ nói gì về chuyện này. Dĩ nhiên, ông ta thẳng thừng phủ định mọi thứ, bất kể người ta có nói gì đi nữa. Rồi một gã an ninh mặc thường phục nói, bằng tiếng Anh, “Các bạn biết đấy, Giáo sư Logunov là một người rất khiêm nhường, do vậy ông sẽ không bao giờ nói với các anh chuyện như thế này. Nhưng tôi sẽ nói. Ông ấy đã giúp đỡ rất nhiều người Do Thái trong sự nghiệp của họ.”

Sau đó, gã mặc thường phục thứ hai nói với Kac và mọi người, “Các ông cứ đưa ra bằng chứng hoặc câm ngay đi. Nếu các ông muốn nói tới bất kỳ trường hợp cụ thể nào, thì hãy đưa họ ra đây. Nếu không, Giáo sư Logunov rất bận, vì ông vẫn còn những việc khác cần làm.”

Lúc đó, tất nhiên, Kac nói, “Thực ra, chúng tôi có một trường hợp cụ thể muốn nói với các ông,” và chỉ tay về phía tôi.

Tôi đứng dậy. Mọi người hướng cả về phía tôi, cả Logunov và hai “trợ lý” của ông ta, với những khuôn mặt lộ rõ vẻ lo lắng. Giờ, tôi đang đối diện trực tiếp với Logunov.

“Rất thú vị,” Logunov nói bằng tiếng Nga - câu này được dịch ngay sang tiếng Anh cho mọi người - và sau đó ông ta nói khẽ với hai gã trợ lý, nhưng tôi có thể nghe thấy: “Đừng quên ghi lại tên của nó.”

Phải nói rằng tôi hơi sợ hãi, nhưng tôi đã chạm tới điểm không thể thoái lui. Tôi giới thiệu bản thân, và nói, “Tôi đã bị đánh trượt ở kỳ thi tuyển vào *Mekh-Mat* sáu năm trước.”

Và sau đó tôi kể lại ngắn gọn những gì đã xảy ra trong kỳ thi. Căn phòng bỗng trầm lặng. Đây là một bằng chứng “cụ thể” từ một trong những nạn nhân của chính sách của Logunov, và ông ta không có cách nào phủ nhận chuyện phân biệt đối xử đã xảy ra. Hai gã trợ lý vội lao vào để hỗ trợ:

“À, ra là cậu đã trượt kỳ thi tuyển vào MGU. Vậy sau đó cậu thi vào đâu?” một trong hai gã hỏi.

“Tôi vào Học viện Dầu khí,” tôi nói.

“Nó đến Kerosinka,” gã trợ lý dịch cho Logunov, ông này sau đó gật đầu, rồi dẫn giọng *ra thế* - dĩ nhiên, ông ta thừa biết rằng đó chính là một trong số ít những nơi ở Moscow mà các sinh viên như tôi có thể được nhận.

“Tốt thôi,” gã trợ lý tiếp tục, “Có lẽ, sự cạnh tranh ở Học viện Dầu khí không khắc nghiệt như ở MGU. Và có lẽ đó cũng là lý do mà cậu phải vào học chỗ đó chứ không phải chỗ kia?”

Điều này không đúng: tôi biết một thực tế là có rất ít tính cạnh tranh ở *Mekh-Mat* giữa những người không bị phân biệt đối xử. Tôi được nghe kể rằng việc nhận một điểm B và ba điểm C trong bốn bài thi thì vẫn đủ để đỗ. Ngược lại, những bài thi tuyển vào Kerosinka lại mang tính cạnh tranh rất cao. Lúc ấy, Kac bỗng dưng xen vào: “Từ khi

còn là sinh viên, Edward đã viết những công trình toán học mang tính đột phá và được mời tới Harvard làm giáo sư thỉnh giảng ở tuổi hai mươi mốt, chưa đầy năm năm sau khi cậu ấy thi trượt vào MGU. Có phải các ông đang muốn nói rằng tính cạnh tranh cho một vị trí ở Harvard còn kém hơn cả ở kỳ tuyển vào MGU?”

Im lặng kéo dài. Sau đó, đột nhiên, Logunov nổi đóa lên.

“Điều này đã xúc phạm tôi!” ông ta hét lên. “Tôi sẽ điều tra và trừng phạt những người đã đánh trượt chàng trai trẻ này. Tôi sẽ không bao giờ cho phép chuyện thế này xảy ra ở MGU nữa!”

Và ông ta tiếp tục như thế trong vòng vài phút.

Thế này thì ai còn có thể nói gì được nữa? Không ai ngồi đó tin cơn giận của Logunov là thật và rằng ông ta sẽ thực sự làm gì đó. Logunov quá thông minh. Bằng cách thể hiện sự bất bình giả mạo của mình cho một trường hợp, ông ta đã làm lệch hướng một vấn đề lớn hơn rất nhiều: đó là vấn đề của hàng nghìn sinh viên khác, những người đã bị đánh trượt một cách tàn nhẫn do chính sách phân biệt đối xử được chỉ đạo một cách chặt chẽ và rõ ràng đã được phê chuẩn bởi những người có chức vụ cao nhất ở MGU, trong đó bao gồm cả chính ngài hiệu trưởng.

Chúng tôi không thể đưa ra những trường hợp khác ở buổi đối thoại để chứng minh rằng có một chính sách bài Do Thái đã được dự tính trước ở kỳ thi tuyển sinh vào *Mekh-Mat*. Dù là tôi đã có thể đối mặt trực tiếp với người làm khổ mình và buộc ông ta thừa nhận rằng cấp dưới của ông ta đã hãm hại tôi, tất cả chúng tôi đều biết rằng câu hỏi lớn hơn vẫn chưa được giải đáp.

Những người mời Logunov, rõ ràng cảm thấy xấu hổ bởi tất cả những điều tiếng xung quanh chuyến thăm của ông ta, muốn kết thúc chuyện này nhanh nhất có thể. Họ cho ngừng buổi đối thoại và kéo ông ta đi. Sau đó, ông ta không bao giờ được mời lại nữa.

Chương 15

MỘT VŨ ĐIỆU DUYÊN DÁNG

Mùa thu năm 1990, tôi trở thành nghiên cứu sinh ở Harvard, tôi buộc phải làm thế để chuyển từ giáo sư thỉnh giảng sang một vị trí thường trực hơn. Joseph Bernstein đồng ý làm thầy hướng dẫn chính thức của tôi. Cho tới khi ấy, tôi đã có nhiều hơn những gì cần thiết cho một luận án tiến sĩ, và Arthur Jaffe gắp chủ nhiệm khoa để cắt giảm thời gian học thông thường là hai năm cho tôi, do vậy tôi có thể nhận bằng tiến sĩ trong một năm. Nhờ đó, sự “giáng cấp” từ giáo sư xuống một nghiên cứu sinh của tôi không kéo dài quá lâu.

Thực tế, tôi viết luận án tiến sĩ về một đề tài mới, được hoàn thành cũng trong năm đó. Tất cả bắt đầu từ những buổi thảo luận của tôi với Drinfeld về Chương trình Langlands hồi mùa xuân. Đây là một trong số đó, viết dưới dạng một kịch bản phim.

CẢNH VÀO DẪN

NỘI CẢNH. VĂN PHÒNG CỦA DRINFELD Ở HARVARD

DRINFELD đang đi lại trước bảng đen. EDWARD, ngồi trên ghế, đang ghi chép. Một tách trà đặt trên bàn bên cạnh anh.

DRINFELD

Do vậy, giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil cho ta một mối liên kết giữa các phương trình cubic và các dạng modular, nhưng Langlands còn tiến xa hơn điều này rất nhiều. Ông ấy nhìn thấy được một mối liên hệ tổng quát hơn, trong đó những biểu diễn tự đẳng cấu của một nhóm Lie đóng vai trò là các dạng modular.

EDWARD

Vậy một biểu diễn tự đẳng cấu là gì?

DRINFELD

(sau khi ngừng lại, một lúc lâu)

Hiện thời, định nghĩa chính xác của nó không quan trọng lắm. Nhưng dù sao thì cậu cũng có thể đọc nó trong sách. Quan trọng hơn nó là một biểu diễn của nhóm Lie G - chẳng hạn, nhóm $SO(3)$ các phép quay của một mặt cầu.

EDWARD

Đồng ý. Vậy các biểu diễn tự đẳng cấu này liên quan tới những gì?

DRINFELD

Phải, đó mới là phần hấp dẫn nhất: Langlands phỏng đoán rằng chúng liên quan tới những biểu diễn của nhóm Galois trong một nhóm Lie khác. [\[119\]](#)

EDWARD

Em hiểu rồi. Ý anh là nhóm Lie này không cùng nhóm với nhóm G ?

DRINFELD

Không! Nó là một nhóm Lie khác, được gọi là nhóm đối ngẫu Langlands của G .

DRINFELD viết ký hiệu ${}^L G$ lên bảng.

EDWARD

L là ký hiệu cho Langlands à?

DRINFELD

(hơi mỉm cười)

À, động lực ban đầu của Langlands là để hiểu về cái được gọi là các L-hàm, do vậy, ông ấy gọi nhóm này là một L-nhóm...

EDWARD

Để thử xem em có hiểu không nhé. Với mỗi nhóm Lie G , có một nhóm Lie khác gọi là ${}^L G$, đúng không?

DRINFELD

Đúng thế. Và nó xuất hiện trong mối liên hệ Langlands. Mà nhìn khái lược thì như thế này.

DRINFELD vẽ một giản đồ lên bảng: [\[120\]](#)

Các biểu diễn của nhóm Galois trong ${}^L G \leftrightarrow$ Các biểu diễn tự đẳng cấu, của nhóm G

EDWARD

Em không hiểu... chí ít, là vẫn chưa. Nhưng hãy cho em hỏi một câu đơn giản hơn. Nhóm đối ngẫu Langlands của $SO(3)$ là gì?

DRINFELD

Câu này khá đơn giản: Nó là lớp phủ kép của $SO(3)$. Cậu đã từng thấy trò xoay cốc bao giờ chưa?

EDWARD

Trò xoay cốc á? À, em nhớ là...

CHUYỂN CẢNH:

NỘI CẢNH. BỮA TIỆC TẠI NHÀ CÁC NGHIÊN CỨU SINH Ở HARVARD

Khoảng một tá sinh viên, khoảng từ hai năm đến ba mươi lăm tuổi, đang trò chuyện, uống rượu bia. EDWARD đang nói chuyện với một sinh viên.

SINH VIÊN

Đây, trò ấy được thao tác như thế này.

Cô sinh viên lấy một chiếc cốc nhựa có rượu và để nó lên lòng bàn tay phải. Sau đó cô ấy bắt đầu xoay lòng bàn tay và cánh tay (như được chỉ ra ở chuỗi các bức ảnh dưới đây). Sau khi đã xoay tròn một vòng (360°), cánh tay của cô ấy đã bị vặn đi. Giữ chiếc cốc thẳng đứng, cô ấy

tiếp tục quay, và sau khi quay tròn một vòng nữa - thật ngạc nhiên! - cánh tay và chiếc cốc trở lại vị trí không bị xoắn vặn ban đầu.^[121]

MỘT SINH VIÊN KHÁC

Em đã nghe kể rằng người Philipine có một điệu múa rượu truyền thống, mà họ làm y như thế với cả hai tay.^[122]

Anh ta nhặt lên hai cốc bia và cố gắng xoay cả hai cùng một lúc, nhưng bàn tay anh ta không vững, nên nhanh chóng làm đổ cả hai. Mọi người cười ầm lên.

CHUYỂN CẢNH:

NỘI CẢNH. TRỞ LẠI VĂN PHÒNG CỦA DRINFELD

DRINFELD

Trò này minh họa cho thực tế rằng có một đường đóng không tầm thường trên nhóm $SO(3)$, nhưng nếu ta đi theo nó hai lần, ta sẽ thu được một đường tầm thường.^[123]

EDWARD

À, em hiểu rồi. Khi anh thực hiện lần quay tròn vẹn đầu tiên chiếc cốc sẽ xoắn tay của anh, và nó cũng giống như đường không tầm thường trên $SO(3)$.

Anh ấy cầm cốc trà ở bàn lên, và cẩn thận xoay lần đầu tiên.

EDWARD

Anh sẽ nghĩ rằng quay thêm tròn vẹn một vòng nữa sẽ làm cánh tay anh bị xoắn thêm nữa.

Nhưng không, lần quay thứ hai lại gỡ nó khỏi bị xoắn.

EDWARD hoàn tất phép quay.

DRINFELD

Chính xác.^[124]

EDWARD

Nhưng chuyện này thì có liên quan gì tới nhóm đối ngẫu Langlands?

DRINFELD

Nhóm đối ngẫu Langlands của $SO(3)$ là một lớp phủ kép của $SO(3)$, do vậy...



Cup trick (read left to right, top to bottom). Photos by Andrea Young.

Trò xoay cốc (từ trái sang phải, từ trên xuống dưới). Ảnh chụp bởi Andrea Young.

EDWARD

Do vậy, với mỗi phần tử của $SO(3)$, sẽ có hai phần tử của nhóm đối ngẫu Langlands.

DRINFELD

Bởi thế, nhóm mới này^[125] sẽ không có bất kỳ đường đóng không tầm thường nào.

EDWARD

Vậy việc chuyển sang nhóm đối ngẫu Langlands là một cách để loại bỏ những phép xoắn buồn cười này?

DRINFELD

Đúng rồi.^[126] Ban đầu, việc này có vẻ giống như một sự khác biệt nhỏ, nhưng thực ra nó lại có nhiều ảnh hưởng lớn, chẳng hạn như sự khác, biệt về hành vi giữa các viên gạch cơ bản cấu thành, nên vật chất, như electron và quark, và các hạt mang tương, tác giữa chúng như photon. Với những, nhóm Lie tổng quát, hơn, sự khác biệt: giữa nhóm ấy và đối ngẫu Langlands của nó thậm chí còn rõ rệt hơn. Thực tế, trong nhiều, trường hợp, không có mối liên kết rõ ràng giữa hai nhóm đối ngẫu này.

EDWARD

Thế tại sao nhóm đối ngẫu lại xuất hiện trong quan hệ Langlands? Cứ như là có ma thuật vậy...

DRINFELD

Chúng, ta còn chưa thực sự biết tại sao.

CẢNH TỐI DẦN.

Đối ngẫu Langlands thiết đặt một mối liên hệ theo cặp giữa các nhóm Lie: với mỗi nhóm Lie G , có một nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$, và đối ngẫu của ${}^L G$ lại chính là nhóm G .^[127] Thật ngạc nhiên Chương trình Langlands lại liên hệ hai loại đối tượng khác nhau (một từ lý thuyết số và một từ giải tích điều hòa), nhưng thực tế rằng hai nhóm đối ngẫu, G và ${}^L G$, xuất hiện ở hai vế của mỗi liên hệ này, như được chỉ ra trên giản đồ ở trang 227, mới là điều không thể tin nổi.

Chúng ta đã nói về Chương trình Langlands kết nối những lục địa khác nhau của thế giới toán học. Một cách tương tự, hãy coi những lục địa này là châu Âu và Bắc Mỹ, và chúng ta có cách ghép cặp một người ở châu Âu với một người ở Bắc Mỹ và ngược lại. Hơn nữa, giả sử rằng trong mỗi quan hệ này, rất nhiều thuộc tính như là cân nặng, chiều cao, và tuổi được ghép hoàn toàn trùng khớp với nhau, nhưng giới tính thì bị tráo đổi: mỗi người đàn ông được ghép cặp với một phụ nữ, và ngược lại. Khi đó thì điều này cũng giống như sự chuyển đổi giữa một nhóm Lie và nhóm đối ngẫu Langlands của nó thông qua mỗi quan hệ được tiên đoán bởi Chương trình Langlands.

Phép tráo đổi này thực ra là khía cạnh bí ẩn nhất của Chương trình Langlands. Chúng ta đã biết một vài cơ chế mô tả nhóm đối ngẫu xuất hiện như thế nào, nhưng chúng ta vẫn không biết *tại sao* nó lại xảy ra. Đây là một trong những lý do để chúng ta cố gắng mở rộng ý tưởng của Chương trình Langlands sang những lĩnh vực khác nhau trong toán học (thông qua phiên đá Rosetta của Weil) và sau đó sang vật lý lượng tử, như sẽ thấy ở chương sau. Chúng ta muốn tìm thêm những ví dụ khác về sự xuất hiện của nhóm đối ngẫu Langlands và hy vọng rằng chúng sẽ cho ta nhiều manh mối hơn về lý do nó xuất hiện, và ý nghĩa của nó là gì.

Bây giờ, ta hãy vào cột bên phải trên phiên đá Rosetta của Weil, cột liên quan đến các diện Riemann. Như chúng ta đã chỉ ra ở chương trước (xem giản đồ ở trang 219) trong phiên bản của quan hệ Langlands thể hiện ở cột này, các diễn viên có “các bó tự đẳng cấu” đóng vai trò

như những hàm tự đẳng cấu (hay các biểu diễn tự đẳng cấu) được gắn với một nhóm Lie G . Hóa ra các bó tự đẳng cấu này “sống” trong một không gian xác định gắn với một diện Riemann X và nhóm G , gọi là không gian moduli của G -phân thớ trên X . Hiện tại thì nó là gì, đối với chúng ta không quan trọng.^[128] Ở vế bên kia của quan hệ này, thì nhóm cơ bản của diện Riemann đóng vai trò của nhóm Galois, như chúng ta đã thấy ở chương 9. Từ giản đồ ở trang 227 ta có thể thấy rằng quan hệ Langlands hình học (cũng được biết đến với tên gọi là tương ứng Langlands hình học) được mô tả một cách khái lược như sau:

Các biểu diễn của nhóm cơ bản X trong ${}^L G \leftrightarrow$ Các bó tự đẳng cấu trên không gian moduli của các G -phân thớ trên X

Nghĩa là ta có thể gắn cho mỗi biểu diễn của nhóm cơ bản trong ${}^L G$ một bó tự đẳng cấu. Và Drinfeld đã có một ý tưởng hoàn toàn mới để làm điều này.

CẢNH VÀO DẪN:

NỘI CẢNH. VĂN PHÒNG CỦA DRINFELD

DRINFELD

Vậy nên ta phải tìm một cách có hệ thống để xây dựng những bó tự đẳng cấu này. và anh nghĩ rằng những biểu diễn của các đại số Kac-Moody có thể giúp ta thực hiện điều đó.

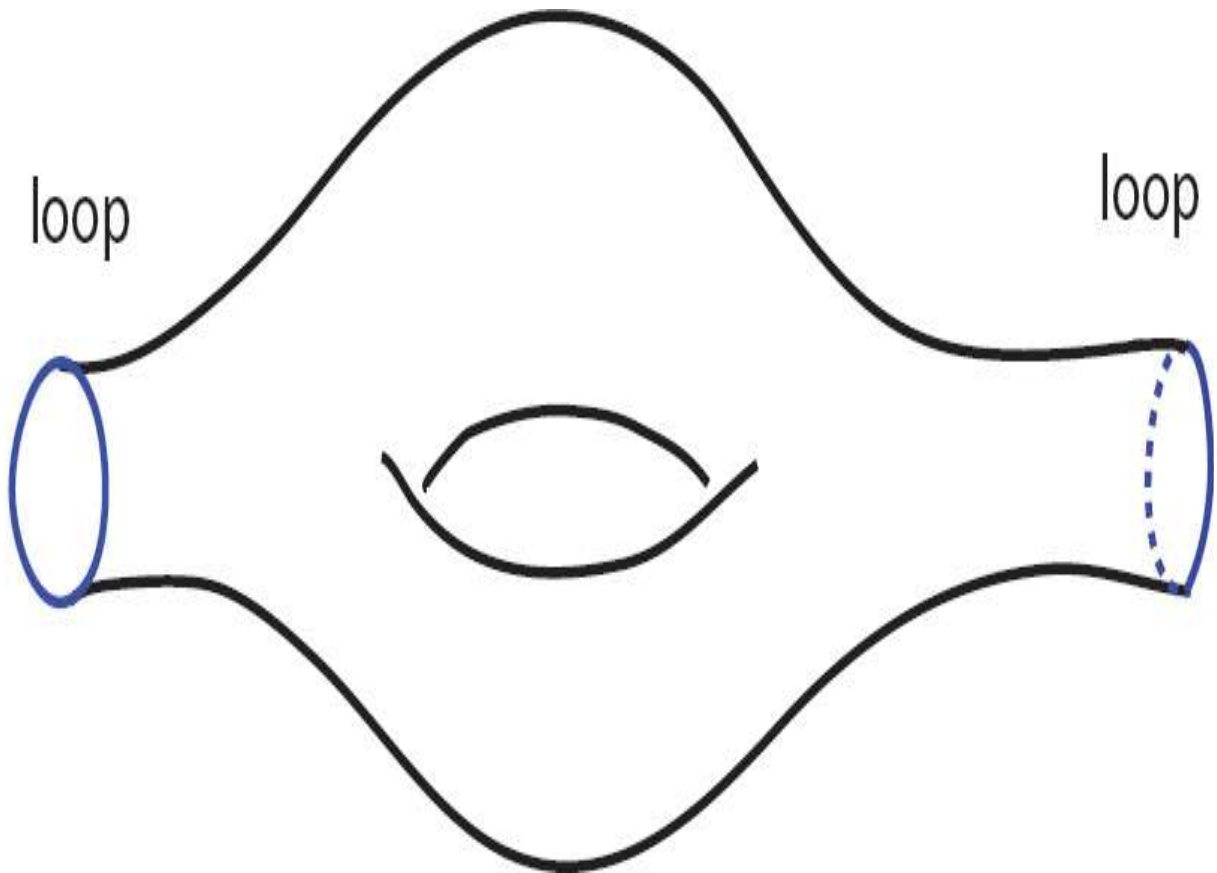
EDWARD

Tại sao lại thế?

DRINFELD

Hiện chúng ta đang ở trong thế giới của các diện Riemann. Một diện như thế có thể có biên, bao gồm các vòng.

DRINFELD vẽ một hình lên bảng.



DRINFELD

Các vòng trên một diện Riemann cung cấp cho chúng ta một mối liên kết tới những nhóm vòng và do vậy tới các đại số Kac-Moody. Sử dụng liên kết này, ta có thể chuyển những biểu diễn của một đại số Kac-Moody thành các bó trên không gian của những G -phân thớ trên diện Riemann của chúng ta. Bây giờ hãy bỏ qua các chi tiết. Một cách khái lược, anh hy vọng nó sẽ diễn ra như thế này.

Anh vẽ một giản đồ lên bảng:

Một biểu diễn của nhóm cơ bản trong ${}^L G \rightarrow$ Một biểu diễn của nhóm đại số Kac-Moody của G
 $\rightarrow$ Một bó tự đẳng cấu trên không gian, moduli của các G -phân thớ

DRINFELD

Mũi tên thứ hai đã rõ ràng với anh. Vấn đề thực sự ở đây là làm thế nào để xây dựng mũi tên thứ nhất. Feigin nói với anh về công trình của em liên quan với những biểu diễn của các đại số Kac-Moody. Anh nghĩ rằng em có thể đem nó ra sử dụng ở đây.

EDWARD

Nhưng thế thì biểu diễn của đại số Kac-Moody của G bằng cách nào đó phải “biết” về nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$.

DRINFELD

Đúng rồi.

EDWARD

Làm sao mà có thể thế được ạ?

DRINFELD

Đây là câu hỏi dành cho em.

CẢNH TỐI DẦN.

Tôi cảm thấy mình hơi giống với Neo đang nói chuyện với Morpheus trong phim *The Matrix* (Ma trận). Thật phấn khích nhưng cũng hơi lo sợ. Liệu tôi thực sự có thể nói được điều gì mới mẻ về lĩnh vực này?

Để giải thích cách tôi đã tiếp cận vấn đề này như thế nào, tôi cần phải nói với bạn về một phương pháp hiệu quả để xây dựng những biểu diễn nhóm cơ bản của một diện Riemann. Chúng ta sẽ làm điều đó bằng cách sử dụng các phương trình vi phân.

Phương trình vi phân là một phương trình liên hệ một hàm số với các đạo hàm của nó. Ví dụ, xét một chiếc ô tô đi trên đường thẳng. Con

đường này chỉ có một tọa độ và ta ký hiệu nó là x . Vị trí của chiếc ô tô ở thời điểm t được mã hóa bởi một hàm $x(t)$. Chẳng hạn nó có thể là $x(t)=t^2$.

Vận tốc của chiếc xe là tỉ số giữa quãng đường đi được trong một khoảng thời gian rất nhỏ Δt và khoảng thời gian đó:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Nếu chiếc xe chuyển động với một vận tốc không đổi, thì việc chọn khoảng thời gian Δt của chúng ta thế nào không quan trọng lắm, Nhưng nếu chiếc xe thay đổi vận tốc của nó, thì một khoảng thời gian Δt nhỏ hơn sẽ cho ta một xấp xỉ chính xác hơn cho vận tốc của xe ở thời điểm t . Để thu được chính xác vận tốc tức thời tại thời điểm đó, ta phải lấy giới hạn của tỉ số này khi cho Δt tiến tới 0. Giới hạn này gọi là đạo hàm của $x(t)$. Nó được ký hiệu bởi $x'(t)$.

Chẳng hạn, nếu $x(t) = t^2$, thì $x'(t)=2t$ và tổng quát hơn nếu $x(t) = t^n$ thì $x'(t)=nt^{n-1}$. Không khó để thu được những công thức này, nhưng đối với chúng ta điều này hiện tại không quan trọng lắm.

Rất nhiều những quy luật của tự nhiên có thể được biểu diễn dưới dạng các phương trình vi phân, tức là những phương trình bao gồm các hàm số và những đạo hàm của chúng. Chẳng hạn, các phương trình Maxwell mô tả điện từ trường, mà chúng ta sẽ nói tới ở chương sau, là các phương trình vi phân, và các phương trình mô tả hấp dẫn của Einstein cũng thế. Thực tế, hầu hết các mô hình toán học (như trong vật lý, sinh học, hóa học hay các thị trường tài chính) đều liên quan tới các phương trình vi phân. Thậm chí các câu hỏi đơn giản nhất mà một

người có thể đặt ra về tài chính cá nhân, như là làm thế nào để tính lãi suất kép, đều nhanh chóng dẫn ta tới các phương trình vi phân.

Đây là một ví dụ về phương trình vi phân:

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t}.$$

Hàm số $x(t) = t^2$ là một nghiệm của phương trình này. Thật vậy, ta có $x'(t) = 2t$, và $2x(t)$

$$t = 2t^2$$

t , do vậy thay $x(t) = t^2$ vào vế trái và vế phải ta sẽ thu được cùng một kết quả là $2t$. Hơn nữa, hóa ra bất kỳ nghiệm nào của phương trình này cũng có dạng $x(t) = Ct^2$, với C là một số thực nào đó độc lập với t . Chẳng hạn, $x(t) = 5t^2$ cũng là một nghiệm.

Tương tự như vậy, các nghiệm của phương trình vi phân

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

được cho bởi công thức $x(t) = Ct^n$, với C là một số thực tùy ý.

Không có gì ngăn cản chúng ta gán cho n một giá trị nguyên âm vào đây. Phương trình này vẫn sẽ có nghĩa, và công thức $x(t) = Ct^n$ cũng

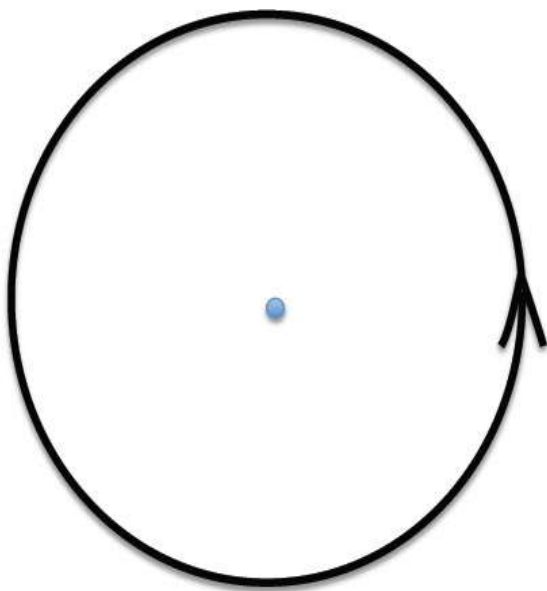
vậy, ngoại trừ hàm số này không xác định tại $t = 0$. Do vậy, hãy bỏ không xét tới $t = 0$. Khi làm như vậy, ta có thể cho phép n là một số hữu tỉ, và thậm chí là một số thực tùy ý.

Và bây giờ ta hãy tiến thêm một bước nữa: trong phát biểu ban đầu của phương trình vi phân này, ta coi t là thời gian, do vậy nó được coi là một số thực. Nhưng hãy giả sử rằng t là một số phức, như vậy nó có dạng

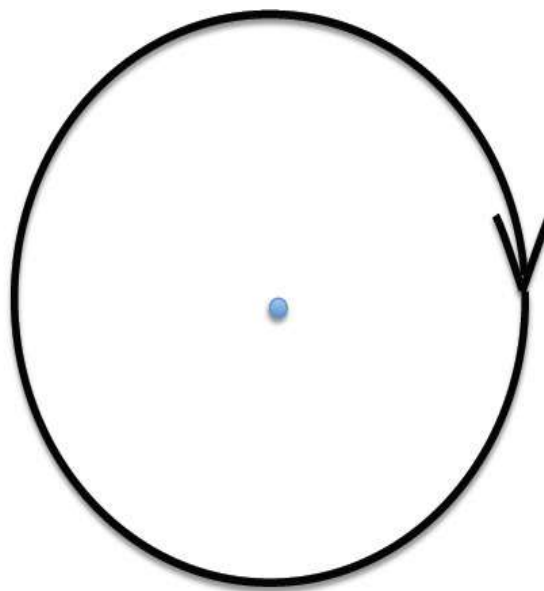
$$r + s\sqrt{-1}$$

với r, s là các số thực. Như đã thảo luận trong chương 9 (xem hình ở trang 141), các số phức có thể được biểu diễn như những điểm trên mặt phẳng với tọa độ r và s . Một khi đã coi t là số phức, $x(t)$ thực sự trở thành một hàm số trên mặt phẳng. À, đúng ra là mặt phẳng bỏ đi một điểm. Bởi vì ta đã quyết định rằng $x(t)$ có thể không xác định tại điểm $t = 0$, chính là gốc tọa độ trên mặt phẳng này (với cả hai tọa độ, r và s , đều bằng 0), nên $x(t)$ thực sự được xác định trên mặt phẳng bỏ đi một điểm, là gốc tọa độ.

Tiếp theo, ta sẽ đưa nhóm cơ bản vào cuộc. Những phần tử của nhóm cơ bản, như ta đã thảo luận trong chương 9, là các đường đóng. Hãy cùng xét nhóm cơ bản của mặt phẳng bỏ đi một điểm. Khi đó bất kỳ đường đóng nào cũng có một “số vòng quấn”: đây là số lần đường cong đi vòng quanh điểm bị bỏ đi. Nếu đường đó đi ngược chiều kim đồng hồ, thì ta tính số này với dấu dương, còn nếu nó đi theo chiều kim đồng hồ, ta tính nó với dấu âm.^[129] Các đường đóng có số vòng quấn là +1 hoặc -1, được minh họa ở hình dưới đây.



Winding number +1



Winding number -1

Số vòng quấn bằng +1 / Số vòng quấn bằng -1

Một đường xoắn ốc xoắn vòng quanh hai lần đồng thời tự cắt để trở về điểm khởi đầu sẽ có “số vòng quấn” bằng +2 hoặc -2, và cứ như thế với các đường phức tạp hơn.

Bây giờ hãy quay trở lại với phương trình vi phân của chúng ta:

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

với n là một số thực tùy ý và t bây giờ lấy giá trị là số phức. Phương trình này có một nghiệm là $x(t) = t^n$. Tuy nhiên, điều bất ngờ là: nếu n không phải là một số nguyên, thì khi ta đánh giá nghiệm này dọc

theo một đường đóng trên mặt phẳng và trở lại cùng một điểm, thì giá trị của nghiệm ở điểm cuối cùng không nhất thiết phải bằng với giá trị mà ta xét lúc đầu. Nó sẽ được nhân với một số phức. Trong trường hợp này, chúng ta nói rằng nghiệm này đã trải qua một *monodromy* (đơn đạo) dọc theo đường đó.

Khẳng định rằng có gì đó thay đổi khi ta đi trọn một vòng theo một đường tròn thoát nghe có vẻ phản trực quan và thậm chí là tự mâu thuẫn. Nhưng nó phụ thuộc hoàn toàn vào việc chúng ta nghĩ gì khi nói đi trọn vẹn theo một đường tròn. Chúng ta có thể đi theo một đường đóng và trở lại cùng một điểm theo nghĩa một thuộc tính *cụ thể*, như là vị trí của chúng ta trong không gian, chẳng hạn. Nhưng những thuộc tính khác có thể phải bị thay đổi.

Ta hãy thử xét ví dụ sau. Rick gặp Ilsa ở một buổi dạ tiệc ngày 14 tháng 3 năm 2010, và lập tức phải lòng cô. Đầu tiên Ilsa không để ý lắm tới Rick nhưng vẫn đồng ý hẹn hò với anh ta. Và sau đó là một buổi hẹn khác. Rồi lại hẹn hò tiếp nữa. Ilsa bắt đầu thích Rick; tại sao, vì anh ấy vui tính và thông minh, quan tâm tới cô. Đột nhiên, Ilsa cũng thấy mình đang yêu; thậm chí cô còn thay đổi dòng trạng thái trên Facebook của mình thành “đang hẹn hò”, và cả Rick cũng thế. Thời gian trôi nhanh, chẳng mấy chốc đã lại đến ngày 14 tháng 3, kỷ niệm một năm ngày họ lần đầu gặp mặt. Theo cuốn lịch, nếu chúng ta chỉ để ý tới tháng và ngày mà bỏ qua năm - thì Rick và Ilsa đã đi trọn một vòng. Nhưng mọi thứ đã thay đổi. Ở ngày mới gặp, Rick đã yêu, còn Ilsa thì không. Nhưng chỉ một năm sau, mọi chuyện đã khác; thực tế, cả hai có thể đều yêu nhau, hoặc có lẽ Ilsa yêu điên đảo, còn Rick thì cũng vừa vừa thôi. Thậm chí anh ta có thể không còn yêu Ilsa nữa và bắt đầu bí mật gặp người khác. Chúng ta không biết, điều quan trọng với chúng ta là dù thậm chí họ quay lại đúng ngày ghi trên cuốn lịch, ngày 14 tháng 3, nhưng tình yêu của họ dành cho nhau đã thực sự thay đổi.

Cha tôi thì nói rằng ví dụ này thật rối rắm bởi vì nó gợi ra rằng Rick và Ilsa đã quay trở lại đúng một thời điểm, mà điều này là không

thể. Nhưng điều mà tôi chú ý đến là những thuộc tính đặc biệt: cụ thể là ngày và tháng. Theo nghĩa đó, đi từ 14 tháng 3 năm 2010 đến 14 tháng 3 năm 2011 thì đúng là đã tạo thành một vòng tròn.

Nhưng có lẽ tốt hơn là ta nên xét một đường đóng trong không gian. Giả sử rằng trong khi yêu nhau, Rick và Ilsa đi du lịch quanh thế giới. Khi đi du lịch, tình cảm của họ cũng tiến triển, bởi vậy, khi họ trở về cùng một điểm trong không gian - thành phố quê họ - tình cảm của họ dành cho nhau có thể đã thay đổi.

Trong trường hợp đầu tiên, chúng ta có một đường thời gian đóng (chính xác hơn, theo lịch ngày-tháng), còn trong trường hợp thứ hai là một đường không gian đóng. Nhưng kết luận thì nhu nhau: tình cảm có thể thay đổi dọc theo một đường đóng. Cả hai kịch bản cùng giải thích một hiện tượng mà ta có thể gọi là đơn đạo của tình yêu.

Về mặt toán học, ta có thể biểu diễn tình yêu của Rick dành cho Ilsa bởi một số X , còn tình yêu của Ilsa cho Rick bởi số y . Khi đó trạng thái quan hệ của họ ở mỗi thời điểm sẽ được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng với tọa độ (x, y) . Chẳng hạn, trong kịch bản thứ nhất, vào ngày mà họ lần đầu gặp nhau, đó là điểm $(1,0)$. Nhưng sau đó họ đã đi theo một đường cong đóng (trong thời gian hoặc không gian), vị trí của điểm đó sẽ thay đổi. Do vậy, sự tiến triển của mối quan hệ giữa họ được biểu diễn bởi một quỹ đạo trong mặt phẳng xy . Đơn đạo ở đây đơn giản chỉ là sự khác biệt giữa điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo đó.

Còn đây là một ví dụ kém lãng mạn hơn. Giả sử bạn trèo lên một cầu thang xoắn ốc và xoay tròn một vòng. Chẳng nào chỉ quan tâm tới hình chiếu của mình trên mặt phẳng sàn nhà, thì bạn đã đi trọn một vòng tròn. Nhưng một thuộc tính khác - độ cao của bạn, chẳng hạn - đã thay đổi: bạn đã lên tới bậc cao hơn. Đó cũng là một đơn đạo. Chúng ta có thể liên hệ ví dụ này với ví dụ đầu tiên bởi vì cuốn lịch cũng giống như một đường xoắn ốc: 365 ngày của một năm cũng giống như đường tròn trên sàn nhà, còn năm thì cũng giống như độ cao. Bởi vậy, tính từ

một ngày cho trước, như là ngày 14 tháng 3 năm 2010, tới đúng ngày đó ở năm sau thì cũng tương tự như trèo lên một chiếc cầu thang vậy.

Bây giờ hãy cùng quay trở lại với nghiệm phương trình vi phân của chúng ta. Một đường đóng trên mặt phẳng cũng giống như đường đóng hình chiếu của bạn trên sàn nhà. Giá trị của nghiệm cũng giống như độ cao của bạn trên cầu thang. Từ quan điểm này, không có gì ngạc nhiên khi thấy rằng giá trị của nghiệm sau khi ta đi trọn một vòng lại khác với giá trị ban đầu.

Lấy thương hai giá trị đó, ta sẽ thu được đơn đạo của nghiệm dọc theo đường này. Hóa ra ta có thể giải thích đơn đạo này như là một phần tử của nhóm đường tròn.^[130] Để minh họa điều này, hãy hình dung bạn có thể uốn một thanh kẹo mềm thành một hình xoắn. Sau đó đi theo đường xoắn đó. Di chuyển dọc theo thanh kẹo này cũng giống như đi theo một đường đóng trên mặt phẳng, vòng xoáy đó cũng là nghiệm của ta vậy. Khi ta đi trọn một vòng trên thanh, nói chung vòng xoáy này sẽ khiến ta trở lại một điểm khác với điểm ban đầu. Sự khác biệt này cũng giống như đơn đạo nghiệm của chúng ta. Nó tương ứng với một phép quay thanh kẹo theo một góc nào đó.

Tính toán được trình bày ở chú thích 12 chỉ ra rằng đơn đạo dọc theo một đường đóng có số vòng xoắn $+1$ là phần tử của nhóm đường tròn tương ứng với phép quay theo góc $360n^\circ$. (Chẳng hạn, nếu $n=1/6$ thì chúng ta gán cho đường này phép quay $360/6=60^\circ$.) Tương tự như vậy, đơn đạo dọc theo một đường với số vòng xoắn w là phép quay một góc $360wn^\circ$.

Kết luận cuối cùng cho những thảo luận này đó là các đơn đạo dọc theo những đường khác nhau trên mặt phẳng bỏ đi một điểm sẽ làm nảy sinh một biểu diễn của nhóm cơ bản của nó trong nhóm đường tròn.^[131] Tổng quát hơn, chúng ta có thể xây dựng những biểu diễn cho nhóm cơ bản của bất kỳ diện Riemann nào (có thể, với vài điểm bị bỏ đi, như trong trường hợp của chúng ta) bằng cách đánh giá đơn đạo của các phương trình vi phân xác định trên diện đó. Các phương trình này ngày

càng trở nên phức tạp hơn, nhưng về cục bộ, trong một lân cận nhỏ của một điểm trên diện đó, thì tất cả chúng đều nhìn tương tự như phương trình ở trên. Sử dụng đơn đạo nghiệm của các phương trình phức tạp hơn, chúng ta có thể xây dựng được các biểu diễn của nhóm cơ bản của một diện Riemann cho trước theo một cách tương tự trong các nhóm Lie chứ không còn là nhóm đường tròn nữa. Chẳng hạn, chúng ta có thể xây dựng các biểu diễn của nhóm cơ bản trong nhóm $SO(3)$.

Quay trở lại với vấn đề mà tôi phải đối diện: chúng ta bắt đầu với một nhóm Lie G , và lấy, đại số Kac-Moody tương ứng. Giả thuyết của Drinfeld đòi hỏi phải tìm được một mối liên kết giữa những biểu diễn của đại số Kac-Moody này và những biểu diễn của nhóm cơ bản trong nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$.

Bước đầu tiên là thay thế những biểu diễn của nhóm cơ bản bằng các phương trình vi phân phù hợp mà các đơn đạo của chúng lấy giá trị trong ${}^L G$. Điều này làm cho câu hỏi mang tính đại số hơn, và do vậy gần với thế giới các đại số Kac-Moody hơn. Những loại phương trình vi phân liên quan ở đây (chủ yếu là trong trường hợp mặt phẳng bỏ, đi một điểm như vừa nói ở trên) đã được Drinfeld và Sokolov đưa ra từ trước, trong thời gian Drinfeld phải “đi đày” tới Ufa. Beilinson và Drinfeld sau đó đã tổng quát hóa công trình này cho các diện Riemann bất kỳ, và gọi các phương trình vi phân tìm được là các “oper”. Từ “oper” phái sinh từ “operator” (toán tử), nhưng phần nào cũng là một trò đùa bên, bởi trong tiếng Nga nó là một từ lóng nghĩa là nhân viên cảnh sát, như “cop” trong tiếng Anh vậy.

Trong luận án của tôi, xây dựng dựa trên công trình mà tôi viết chung với Borya ở Moscow, tôi đã xây dựng được các biểu diễn của đại số Kac-Moody của một nhóm G được tham số hóa bởi các “oper” tương ứng với nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$. Mối liên kết tồn tại giữa hai đối tượng này; gần như là một phép màu: bằng cách nào đó đại số Kac-Moody gắn với nhóm G lại “biết” về nhóm đối ngẫu Langlands

${}^L G$, đúng như Drinfeld dự đoán. Điều đó đã làm cho công trình dự kiến của anh Vận hành theo sơ đồ sau:^[132]

Một biểu diễn của nhóm cơ bản của X trong ${}^L G \rightarrow$ Một oper trên diện Riemann X

$\rightarrow$ Một biểu diễn của đại số Kac-Moody của $G \rightarrow$ Một bó tự đẳng cấu trên không gian moduli của G -phân thớ trên X .

Chứng minh của tôi cho kết quả này khá là mang tính kỹ thuật. Tôi có thể giải thích *làm thế nào* mà nhóm đối ngẫu Langlands lại xuất hiện, nhưng thậm chí bây giờ, hơn hai mươi năm sau, tôi vẫn thấy thật bí ẩn là *tại sao* nó lại xuất hiện. Tôi đã giải quyết được bài toán, nhưng không thật, vừa ý khi cứ cảm thấy có thứ gì đó bỗng dưng xuất hiện từ hư vô. Kể từ đó nghiên cứu của tôi đã được thúc đẩy một phần nhờ cố gắng, tìm kiếm một lời giải thích toàn vẹn hơn.

Mọi chuyện thường xảy ra như thế này: Ai đó chứng minh được một định lý, những người khác kiểm chứng nó, rồi tiến bộ mới được tạo ra dựa trên định lý này, nhưng để hiểu biết ý nghĩa thực sự của nó phải mất hàng năm, có khi hàng thập kỷ. Tôi biết rằng thậm chí nếu tôi không tìm được câu trả lời, thì những thế hệ các nhà toán học sau này sẽ đốt tiếp ngọn đuốc của tôi, những người cuối cùng sẽ tìm được nó. Nhưng dĩ nhiên, tôi vẫn thích chính mình tìm được chân tướng của vấn đề hơn.

Beilinson và Drinfeld sau này đã sử dụng định lý từ luận án của tôi để xây dựng mối quan hệ Langlands hình học một cách vô cùng đẹp đẽ (ở cột bên phải trên phiến đá Rosetta của Weil, xem giản đồ ở trang 233). Công trình ngoạn mục của họ là khởi đầu cho một chương mới trong Chương trình Langlands, nó mang đến một loạt những ý tưởng tươi mới và những cái nhìn sâu sắc về chủ đề này và mở rộng nó xa hơn nữa.

Sau này, tôi đã tổng kết lại những nghiên cứu của mình trong lĩnh vực này (một số trong đó là cộng tác với Borya, và một số khác với

Dennis Gaitsgory) trong cuốn sách *Langlands Correspondence for Loop Groups* (Tương ứng Langlands cho các nhóm vòng) do Nhà xuất bản Đại học Cambridge ấn hành.^[133] Cuốn sách được in năm 2007, chính xác là 20 năm sau khi tôi viết những công thức đầu tiên cho sự thực hiện trường tự do của các đại số Kac-Moody trên chuyến tàu đêm trở về nhà từ căn biệt thự ngoại ô của Borya, một tính toán mà tôi không ngờ lại là khởi đầu cho hành trình dài của mình tới Chương trình Langlands.

Tôi đã chọn những dòng sau trong tập thơ in năm 1931 của E.E. Cummings, một nhà thơ mà tôi ưa thích, làm lời đề từ cho cuốn sách của mình:

Những hình học đồng tâm trong vắt

Chìm qua đại số kiêu ngạo

Đâm sầm quay cuồng xoáy lốc

Vào môn số học sắt cam.

Với tôi, đoạn thơ này giống như một ẩn dụ thi vị về những gì mà chúng tôi đang cố gắng thu được trong Chương trình Langlands: đó là sự thống nhất giữa hình học, đại số và số học (tức là lý thuyết số). Một thuật giả kim của thời hiện đại.

Công trình của Beilinson và Drinfeld đã giải quyết được một số vấn đề tồn đọng từ lâu nhưng nó cũng làm nảy sinh nhiều câu hỏi nữa. Đó chính là ý nghĩa của toán học: mỗi kết quả mới lại đẩy lui tấm màn che phủ những điều chưa biết, nhưng sau đó những điều hé lộ kỳ thực cũng không bao quát hết các câu trả lời - nó bao hàm cả những câu hỏi chưa biết, những hướng đi mới bản thân chúng ta vẫn còn chưa biết, và do vậy mỗi khám phá lại khơi nguồn cảm hứng cho ta tạo ra sự tiến bộ mới để không bao giờ thỏa mãn trong công cuộc theo đuổi tri thức của mình.

Tháng 5 năm 1991, tôi tham dự buổi lễ tốt nghiệp ở Harvard. Đó là một thời khắc còn hơn cả đặc biệt đối với tôi vì diễn giả của lễ phát bằng là Eduard Shevardnadze, một trong những kiến trúc sư của chính sách *perestroika* ở Liên Xô. Ông vừa mới từ chức Bộ trưởng Bộ ngoại giao để phản đối tình trạng bạo lực ở các nước cộng hòa Baltic, và cảnh báo về một nền độc tài đang manh nha.

Đó là những khoảng thời gian rối loạn. Chúng ta còn chưa biết về tất cả những náo động sắp xảy đến: cuộc đảo chính vào tháng 8 năm ấy, sự tan vỡ sau đó của Liên Xô, những khổ lao mà hầu hết mọi người đều phải chịu đựng trong công cuộc cải cách lãnh tế. Chúng ta cũng không thể tiên đoán được thời gian nắm quyền đầy tranh cãi của Shevardnadze với tư cách là người đứng đầu nước Cộng hòa Georgia, quê hương ông. Nhưng vào ngày vinh quang ấy ở Harvard Yard chan hòa ánh nắng, tôi muốn nói lời “cảm ơn” với người đàn ông đã giải phóng tôi, và hàng triệu đồng bào tôi, khỏi chế độ cộng sản.

Tôi bước đến gặp ông sau bài diễn văn và nói rằng tôi vừa mới nhận học vị tiến sĩ từ Harvard, điều không thể làm được nếu không có chính sách *perestroika*, ông mỉm cười và nói bằng tiếng Nga với giọng Georgia đầy quyến rũ rằng, “Tôi rất vui khi được nghe chuyện này. Tôi chúc cậu đạt được thành công lớn trong công việc.” Ông ngừng lại, và nói thêm, như một người Georgia đích thực: “Và có được hạnh phúc trong đời sống riêng.”

Sáng hôm sau tôi bay sang Ý. Victor Kac đã mời tôi tham dự một hội nghị tổ chức ở Pisa với đồng nghiệp người Ý của ông là Corrado De Concini. Từ Pisa, tôi tới đảo Corsica để có một cuộc gặp gỡ khác, rồi tới Kyoto, Nhật Bản. Những cuộc hội thảo này là nơi hội tụ của các nhà vật lý và toán học quan tâm tới đại số Kac-Moody và những ứng dụng của nó trong vật lý lượng tử. Tôi đã trình bày bài giảng về công trình mà tôi mới hoàn tất. Đây là lần đầu tiên mà hầu hết những người tham gia được nghe về Chương trình Langlands, và họ dường như bị cuốn hút bởi Chương trình này. Hồi tưởng lại những ngày ấy, tôi cảm

thấy thật sự lãn nhạc vì kể từ đó mọi thứ đã thay đổi biết bao nhiêu. Chương trình Langlands bây giờ được coi như hòn đá tảng của toán học hiện đại, và được biết đến rộng rãi qua hầu hết các lĩnh vực khác nhau.

Đây là lần đầu tiên tôi có cơ hội đi vòng quanh thế giới. Tôi sẽ khám phá các nền văn hóa khác nhau, và tôi cũng nhận ra cách thức mà toán học, ngôn ngữ chung của nhân loại, đã mang chúng ta tới gần nhau hơn như thế nào. Mọi thứ đều mới mẻ và phấn khích, bởi thế giới này - là một kính vạn hoa của vô vàn những khả năng.

Chương 16

ĐỐI NGẪU LƯỢNG TỬ

Chúng ta đã thấy Chương trình Langlands phản chiếu qua hầu khắp các lĩnh vực của toán học, từ lý thuyết số tới những đường cong trên các trường hữu hạn, tới các diện Riemann. Thậm chí những biểu diễn của các đại số Kac-Moody cũng đã được trộn lẫn vào. Qua lăng kính của Chương trình Langlands, chúng ta nhìn thấy được cùng những mẫu hình, những hiện tượng y hệt nhau hiện diện trong những lĩnh vực khác nhau của toán học. Chúng biểu hiện theo những cách khác nhau, nhưng ta vẫn luôn có thể nhận ra một số đặc điểm chung (như sự xuất hiện của nhóm đối ngẫu Langlands). Chúng đều chỉ dẫn tới một cấu trúc bí ẩn nằm sâu bên dưới, thứ có thể gọi là mã nguồn của toàn bộ toán học. Chúng ta nói về Chương trình Langlands như một lý thuyết Thống nhất lớn của toán học là theo nghĩa như thế.

Chúng ta cũng nhận thấy một số khái niệm chung và trực quan nhất của toán học mà ta đã học ở phổ thông: số học, hàm số, phương trình - bị xoắn bện, uốn cong, và thậm chí đôi khi còn bị phá vỡ nữa. Rất nhiều khái niệm đã chứng tỏ chúng không hẳn cơ bản như người ta tưởng. Trong toán học hiện đại, có những khái niệm và ý tưởng sâu sắc, toàn diện hơn như: các không gian vector, nhóm đối xứng, số học theo modun các số nguyên tố, hay các bó. Do vậy toán học vẫn còn chứa đựng nhiều điều hơn hẳn thứ ta thấy, và chính Chương trình Langlands sẽ giúp chúng ta bắt đầu nhìn thấy được những gì mà trước đây chưa thấy. Cho tới bây giờ, chúng ta mới chỉ có thể nắm bắt đại cương cái thực tại còn ẩn giấu. Và hiện tại, cũng giống như các nhà khảo cổ học phải đối mặt với một bức tranh khảm bị gãy vỡ, chúng ta đang cố gắng

gắn các mảnh thu thập được lại với nhau. Mỗi mảnh mới của câu đố lại mang đến những nhận thức sâu sắc mới, những công cụ mới để làm sáng tỏ sự bí ẩn ấy. Và mỗi lần như vậy, chúng ta lại sửng sốt trước sự phong phú dường như vô tận của bức tranh đang dần lộ dạng.

Tôi đã tìm ra lối đi riêng vào thế giới toán học diệu kỳ khi Drinfeld kết nối công trình về các đại số Kac-Moody của tôi với Chương trình Langlands. Chủ đề rộng lớn này và tính phổ quát của nó trong toán học đã mê hoặc tôi kể từ đó. Tôi ép bản thân phải học hỏi ngày càng nhiều về những đường hướng khác nhau của Chương trình Langlands mà chúng ta thảo luận trong cuốn sách này, và hầu hết những nghiên cứu của tôi kể từ đó hoặc là về Chương trình Langlands hoặc là được lấy cảm hứng từ nó theo cách này hoặc cách khác. Nó thúc đẩy tôi chu du qua các lục địa của toán học, học tập những ngôn ngữ và các nền văn hóa khác nhau.

Giống như bất cứ một du khách nào khác, tôi hoàn toàn kinh ngạc trước những gì tai nghe mắt thấy. Chúng ta giờ đây sẽ chạm tới một trong những sự ngạc nhiên lớn nhất: hóa ra Chương trình Langlands lại cũng có mối liên kết không thể tách rời với vật lý lượng tử. Điểm mấu chốt chính là tính đối ngẫu, trong vật lý cũng như trong toán học.

Đi tìm sự đối ngẫu trong vật lý xem ra là chuyện hơi lạ lùng, nhưng theo một nghĩa nào đó thì đây là một khái niệm từng quen thuộc chúng ta. Hãy lấy lực điện và lực từ làm ví dụ. Mặc dù hai lực này có vẻ như khá khác nhau, nhưng thực ra chúng lại cùng được mô tả chỉ bởi một lý thuyết toán học duy nhất, gọi là lý thuyết điện từ. Lý thuyết này có một đối ngẫu ẩn giấu, trong đó lực điện và lực từ được hoán đổi cho nhau. (Dưới đây chúng ta sẽ thảo luận chi tiết về vấn đề này.) Vào thập niên 1970, các nhà vật lý đã cố gắng tổng quát hóa đối ngẫu thành các lý thuyết chuẩn (*gauge theory*) không giao hoán. Đây là những lý thuyết mô tả các lực hạt nhân: lực “mạnh”, lực giữ các quark lại với nhau bên trong proton, neutron, và các hạt cơ bản khác; và lực “yếu”, lực gây ra những hiện tượng như phân rã phóng xạ.

Cốt lõi của mỗi lý thuyết chuẩn là một nhóm Lie, gọi là nhóm chuẩn (*gauge group*). Theo một nghĩa nào đó thì lý thuyết điện từ là lý thuyết chuẩn đơn giản nhất, và nhóm chuẩn ở trường hợp này lại là một người bạn cũ của chúng ta, nhóm đường tròn (nhóm các phép quay của bất kỳ vật thể hình tròn nào). Nhóm này là giao hoán; tức là phép nhân bất kỳ hai phần tử nào cũng không phụ thuộc vào thứ tự mà nó được thực hiện: $a.b=b.a$. Nhưng với các lý thuyết tương tác mạnh và yếu, các nhóm chuẩn tương ứng lại không giao hoán, tức là trong các nhóm chuẩn đó thì $ab \neq b.a$. Và bởi vậy ta gọi chúng là những lý thuyết chuẩn không giao hoán.

Vào những năm 1970 ấy, các nhà vật lý nhận thấy rằng có một sự tương tự của đối ngẫu điện từ trong những lý thuyết chuẩn không giao hoán, nhưng với một sự biến dạng đáng ngạc nhiên. Hóa ra nếu chúng ta bắt đầu với lý thuyết chuẩn có nhóm chuẩn là G thì lý thuyết đối ngẫu của nó cũng sẽ là một lý thuyết chuẩn nhưng với một nhóm chuẩn khác. Và thật ngạc nhiên, hóa ra nhóm này lại chính là nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$, một yếu tố then chốt của Chương trình Langlands!

Hãy tư duy về điều đó theo cách sau: toán học và vật lý giống như hai hành tinh khác nhau, như Trái Đất và Hỏa tinh chẳng hạn. Trên Trái Đất, chúng ta khám phá được một mối liên hệ giữa những lục địa khác nhau. Theo mối liên hệ này, mỗi người ở châu Âu được ghép cặp với một người Bắc Mỹ; chiều cao, cân nặng, và tuổi của họ đều giống nhau. Nhưng họ lại có giới tính ngược nhau (điều này cũng giống như tráo đổi giữa một nhóm Lie và nhóm Lie đối ngẫu của nó). Và rồi một ngày kia, chúng ta có một người khách đến từ Hỏa tinh đến, người này nói với chúng ta rằng ở chỗ họ, họ cũng khám phá ra một mối quan hệ giữa các lục địa của họ. Hóa ra mỗi người Hỏa tinh trên một lục địa cũng có thể được ghép cặp với một người Hỏa tinh ở một lục địa khác, mà chiều cao, cân nặng, tuổi của họ đều như nhau, nhưng... họ lại có giới tính ngược nhau (ai mà biết được rằng người Hỏa tinh có hai giới tính, cũng như chúng ta hay không?) Chúng ta không thể tin vào điều chúng ta vừa nghe: vì có vẻ như là mối quan hệ mà chúng ta có trên

Trái Đất, và mối quan hệ của họ có trên Hỏa tính bằng cách nào đó lại có mối liên hệ với nhau. Nhưng tại sao lại thế được nhỉ?

Tương tự như vậy, vì nhóm đối ngẫu Langlands xuất hiện cả trong toán học và trong vật lý, nên sẽ là tự nhiên nếu ta giả sử rằng chắc hẳn phải có một mối liên hệ giữa Chương trình Langlands trong toán học và đối ngẫu điện từ trong vật lý. Nhưng hầu như trong gần ba mươi năm, không ai tìm ra được mối liên hệ đó.

Trong nhiều năm, tôi đã có nhiều dịp thảo luận câu hỏi này với Edward Witten, giáo sư ở viện Nghiên cứu cao cấp Princeton, ông được coi là một trong những nhà vật lý lý thuyết vĩ đại nhất hiện nay. Một trong những phẩm chất đáng kinh ngạc của ông đó là khả năng sử dụng những công cụ phức tạp nhất của vật lý lượng tử để có được những khám phá và giả thuyết gây sửng sốt trong toán học. Những công trình của ông đã truyền cảm hứng cho nhiều thế hệ các nhà toán học, và ông trở thành nhà vật lý đầu tiên được nhận huy chương Fields, một trong những giải thưởng uy tín nhất trong toán học.



Chân dung Witten

Tò mò về mối liên kết có thể có giữa các đối ngẫu lượng tử với Chương trình Langlands, Witten đôi khi cũng hỏi tôi về nó. Chúng tôi thảo luận về mối liên kết này tại văn phòng của tôi ở Harvard khi ông tới Harvard hoặc MIT, hay tại văn phòng của ông ở Princeton khi tôi tới đó. Những cuộc thảo luận luôn rất hào hứng, nhưng chúng tôi không đi được xa lắm. Rõ ràng là còn thiếu những thành phần căn bản nào đó, vẫn đang chờ được khám phá.

Rồi chúng tôi đã được trợ giúp từ một nguồn không hề mong đợi.

Tại một hội nghị ở Rome tháng 5 năm 2003,^[134] tôi nhận được email từ Kari Vilonen, người bạn cũ và cũng là đồng nghiệp của tôi. Sinh ra tại Phần Lan, Kari là một trong những nhà toán học quảng giao nhất mà tôi biết. Khi tôi lần đầu đặt chân đến Harvard, anh và vợ tương lai Martina đã dẫn tôi tới một quán bar ở Boston để xem một trận bóng rổ giành vé vượt của Red Sox. Chao ôi, Red Sox bị thua, nhưng đó mới thật là một trải nghiệm đáng nhớ làm sao. Chúng tôi đã trở thành bạn kể từ đó, và nhiều năm sau, chúng tôi cộng tác với nhau viết vài bài báo về Chương trình Langlands (cùng với một nhà toán học khác là Dennis Gaitsgory). Đặc biệt, chúng tôi cùng chứng minh một trường hợp rất quan trọng của quan hệ Langlands.

Trong email, Kari (sau này trở thành giáo sư ở Đại học Northwestern) viết rằng anh đã được người của DARPA liên hệ, họ muốn tài trợ chúng tôi nghiên cứu Chương trình Langlands.

DARPA, tên viết tắt của *Defense Advanced Research Projects Agency* (Cơ quan Quản lý các Dự án Nghiên cứu Cao cấp phục vụ Quốc phòng), là một nhánh nghiên cứu của Bộ Quốc phòng Mỹ. Cơ quan này được thành lập năm 1958, sau vụ phóng vệ tinh *Sputnik* của Liên Xô, với nhiệm vụ thúc đẩy khoa học-công nghệ ở Mỹ và nhằm

ngăn chặn những thành công bất ngờ về mặt công nghệ tương tự như vụ *Sputnik*.

Tôi đã đọc được những dòng sau trên trang web của DARPA:^[135]

Để thực hiện nhiệm vụ của mình, cơ quan này dựa trên nhiều thành viên khác nhau để áp dụng những cách tiếp cận đa ngành vừa để tạo ra tri thức mới thông qua những nghiên cứu cơ bản, vừa để sáng tạo ra những công nghệ cách tân đáp ứng những vấn đề thực tiễn hiện thời thông qua các nghiên cứu ứng dụng. Những nghiên cứu khoa học của DARPA bao quát từ những nỗ lực trong phòng thí nghiệm tới việc tạo ra sản phẩm công nghệ ở quy mô lớn... Với vai trò là cỗ máy đổi mới chính của DoD (tức Bộ quốc phòng), DARPA đảm nhận những dự án có thời gian hữu hạn nhưng tạo ra sự thay đổi bền vững mang tính cách mạng.

Qua nhiều năm, DARPA đã tài trợ cho nhiều dự án trong toán học ứng dụng và khoa học máy tính; chẳng hạn cơ quan này đã đỡ đầu dự án ARPANET, tiền thân của mạng Internet. Nhưng trong chừng mực mà tôi biết, họ không hỗ trợ các đề tài toán học thuần túy. Thế thì tại sao họ lại muốn hỗ trợ những nghiên cứu trong Chương trình Langlands?

Lĩnh vực này có vẻ thuần túy và trừu tượng, không hề có ứng dụng trực tiếp nào. Nhưng chúng ta phải nhận thấy rằng những nghiên cứu khoa học cơ bản tạo nền tảng cho tất cả những tiến bộ công nghệ. Thường thì, những khám phá trông có vẻ như trừu tượng và khó hiểu nhất trong toán học và vật lý lại dẫn tới những cách tân mà ngày nay chúng ta sử dụng trong đời sống hằng ngày. Chẳng hạn, ta hãy nghĩ về số học theo modun các số nguyên tố. Khi chúng ta nhìn thấy nó lần đầu, trông nó có vẻ trừu tượng tới mức tưởng như không có thú gì giống như vậy lại có ứng dụng trong thế giới thực tiễn. Thực tế, nhà toán học người Anh, G.H. Hardy đã có câu nói nổi tiếng rằng, “một đồng toán học cao cấp thì cũng vô dụng mà thôi.”^[136] Nhưng câu nói đùa này lại vận vào ông: rất nhiều kết quả có vẻ bí truyền trong lý thuyết số (lĩnh vực mà ông là chuyên gia) bây giờ lại xuất hiện ở khắp nơi, chẳng hạn như trong giao dịch ngân hàng trực tuyến. Khi chúng ta thực hiện

các giao dịch trực tuyến, thì cũng có sự can dự của số học theo modun N (xem mô tả thuật toán mã hóa RSA trong chú thích 7 của chương 14 ở cuối sách). Thế nên, chúng ta đừng bao giờ đánh giá vội vàng tiềm năng của một công thức hay một ý tưởng toán học với các ứng dụng thực tiễn.

Lịch sử cho thấy rằng tất cả những đột phá ngoạn mục trong công nghệ đều được dẫn đường, thường là trước hàng thập kỷ, bởi những tiến bộ trong nghiên cứu thuần túy. Bởi vậy, nếu chúng ta giới hạn việc ủng hộ cho các nghiên cứu khoa học cơ bản thì chúng ta đang giới hạn chính tiến bộ và sức mạnh của mình vậy.

Việc này còn có một khía cạnh khác nữa: xét trên phạm vi một xã hội, chúng ta được xác định phần lớn dựa trên các nghiên cứu và đổi mới khoa học. Nó là một phần quan trọng trong nền văn hóa và phúc lợi xã hội của chúng ta. Robert Wilson, giám đốc đầu tiên của Phòng thí nghiệm quốc gia Fermi, nơi xây dựng máy gia tốc hạt lớn nhất trong những năm 1960, đã nói lại điều này trong cuộc điều trần tại ủy ban liên hợp quốc hội về Năng lượng Nguyên tử năm 1969. Khi được hỏi rằng liệu cỗ máy nhiều triệu đô la này có thể hỗ trợ được cho an ninh quốc gia không, ông nói:^[137]

Chỉ nên nhìn nhận một công nghệ đang phát triển với nhãn quan sâu rộng, nếu không, nó chỉ có thể có liên quan mà thôi: chúng ta có phải là họa sĩ, nhà điêu khắc, nhà thơ vĩ đại không? Ý tôi là tất cả những gì mà chúng ta thực sự tôn thờ, và tôn vinh trên đất nước này, đều có liên quan đến lòng yêu nước. Theo nghĩa đó, thì kiến thức mới này hết thảy đều có liên quan đến sự tôn vinh và tổ quốc, nhưng nó không liên quan trực tiếp tới việc bảo vệ đất nước mà khiến đất nước này đáng được bảo vệ.

Anthony Tether, giám đốc của DARPA từ 2001 đến 2009, đã nhận thấy tầm quan trọng của nghiên cứu khoa học cơ bản. Ông đã yêu cầu những chuyên viên quản lý dự án của mình tìm kiếm một đề tài toán học thuần túy khả thi. Một trong số họ, Doug Cochran, đã rất nghiêm túc nhận

yêu cầu này. Ông có một người bạn ở quỹ Khoa học quốc gia (NSF) có tên là Ben Mann. Là một chuyên gia trong lĩnh vực topo học, Ben đã rời bỏ công việc học thuật và tới Washington để làm giám đốc dự án ở phân viện Toán học của NSF.

Khi Doug đề nghị Ben giới thiệu một đề án đáng quan tâm trong toán học thuần túy, ông đã nghĩ đến Chương trình Langlands. Dù đây không phải là lĩnh vực chuyên môn của mình, nhưng Ben nhận thấy được tầm quan trọng của nó qua các đề nghị tài trợ gửi đến NSF. Chất lượng của đề án và thực tế thì chính những ý tưởng giống nhau lại lan truyền qua các ngành toán học khác nhau đã gây ấn tượng mạnh mẽ đến ông.

Do vậy Ben đề nghị với Doug rằng DARPA nên ủng hộ những nghiên cứu trong Chương trình Langlands, và điều đó giải thích tại sao Kari, tôi, và hai nhà toán học khác đã được liên hệ và được yêu cầu viết một bản kế hoạch dự kiến để Doug trình bày với giám đốc của DARPA. Điều được kỳ vọng ở đây là nếu giám đốc thông qua đề án đó, chúng tôi sẽ nhận được một khoản tài trợ lên tới hàng triệu đô cho những nghiên cứu trực tiếp trong lĩnh vực này.

Thật lòng mà nói, ban đầu chúng tôi hơi do dự. Đây là một địa hạt chưa từng có tiền lệ: trước đó chúng tôi chưa từng thấy một nhà toán học nào lại nhận được mức tài trợ lớn đến vậy. Thường thì các nhà toán học nhận được lượng tài trợ cá nhân tương đối nhỏ từ NSF (một ít tiền đi lại, trợ giúp học viên sau đại học, và có thể là cả hỗ trợ cho kỳ hè). Ở đây chúng tôi phải phối hợp những công trình của hàng tá các nhà toán học với mục tiêu là tạo ra được một nỗ lực chung trong một lĩnh vực nghiên cứu rộng lớn. Bởi vì mức tài trợ rất lớn, chúng tôi sẽ trở thành đối tượng bị soi xét nhiều hơn từ công chúng, và có lẽ là cả sự nghi ngờ và đổ kỵ từ các đồng nghiệp. Chúng tôi nhận thấy rằng nếu trong đề án này không có được những tiến bộ đáng chú ý, thì chúng tôi sẽ bị nhạo báng, và một thất bại như thế có lẽ sẽ khép lại cánh cửa xin tài trợ từ DARPA cho những đề án toán học thuần túy đáng giá khác.

Mặc dù bối rối, chúng tôi vẫn muốn tạo ra một dấu ấn trong Chương trình Langlands. Và lại ý tưởng thay thế dự án tài trợ truyền thống, bảo thủ cho nghiên cứu toán học bằng một khoản tài trợ khổng lồ cho một lĩnh vực đầy hứa hẹn nghe thật lôi cuốn và hấp dẫn. Đơn giản là chúng tôi không thể từ chối.

Câu hỏi kế tiếp là chúng tôi nên tập trung vào đâu trong đề án của mình. Chương trình Langlands, như chúng ta đã biết, mang tính đa diện và liên quan tới nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Thật dễ để viết nửa tá các đề xuất cho chủ đề tổng quát này. Chúng tôi phải lựa chọn và đã quyết định tập trung vào thứ mà chúng tôi cho là bí ẩn lớn nhất: đó là mối liên kết tiềm tàng giữa Chương trình Langlands và những đối ngẫu trong vật lý lượng tử.

Một tuần sau, Doug trình bày bản đề xuất của chúng tôi với giám đốc của DARPA, và theo lời kể của mọi người, thì đó là một bài thuyết trình thành công. Giám đốc đã ký duyệt khoản tiền tài trợ nhiều triệu đô la cho dự án này trong ba năm. Theo như tôi được biết, thì cho đến nay đây là mức tài trợ lớn nhất cho những nghiên cứu trong toán học thuần túy. Hiển nhiên, những kỳ vọng vào đề án này là rất lớn. Đó là thời điểm cực kỳ hào hứng, nhưng vẫn có những lo lắng.

Thật may mắn, Ben Mann chuyển từ NSF sang DARPA để đảm nhận chức vụ quản lý đề án của chúng tôi. Ngay từ những buổi gặp gỡ đầu tiên với ông, chúng tôi thấy rõ rằng Ben là người duy nhất có đủ năng lực cho cương vị này. Ông có tầm nhìn và sự dũng cảm để chấp nhận một đề án rủi ro cao/thành công lớn, tìm kiếm được đúng người thực hiện nó, và giúp họ phát triển tối đa ý tưởng của mình. Và chính lòng nhiệt thành dễ lây lan của ông đã tiếp sinh lực cho mọi người xung quanh. Chúng tôi thực sự may mắn khi có Ben lãnh đạo. Chúng tôi có lẽ đã không thể đạt được một phần của thành quả sau này nếu không có sự hướng dẫn và hỗ trợ của ông.

Bước đầu tiên, tôi gửi email cho Edward Witten trình bày về khoản tài trợ và ước muốn xem ông có hứng thú tham gia với chúng tôi hay không. Với vị trí độc tôn của Witten trong vật lý và toán học, chúng tôi cần có ông tham gia cùng. Than ôi, phản ứng đầu tiên của Witten lại là từ chối một cách khéo léo. Ông chúc mừng chúng tôi đã nhận được tài trợ, nhưng cũng nói rõ rằng mình có nhiều đề tài cần làm, và chúng tôi không nên tính thêm ông vào làm gì.

Nhưng thật may, Peter Goddard, một trong những nhà vật lý đã khám phá ra đối ngẫu điện từ trong các lý thuyết chuẩn không giao hoán, lại sắp trở thành giám đốc viện Nghiên cứu cao cấp ở Princeton. Những nghiên cứu gần đây của ông đều có liên quan tới biểu diễn của các đại số Kac-Moody, và bởi vậy, tôi có dịp gặp Peter ở nhiều hội nghị khác nhau.

Tôi đặc biệt nhớ rất rõ về một trong các buổi gặp gỡ đó. Đó là vào tháng 8 năm 1991, khi chúng tôi đang dự một hội thảo lớn về toán và vật lý lượng tử tại Đại học Kyoto, Nhật Bản. Giữa chừng hội thảo, chúng tôi nhận được tin tức động trời về cuộc đảo chính ở Liên Xô. Có vẻ như chế độ độc tài đã giành lại được quyền lực, và sự tự do bị giới hạn kiểu *perestroika* sẽ nhanh chóng quay trở lại. Điều này có nghĩa là biên giới sẽ bị đóng lại, và do vậy có khả năng rất cao là tôi sẽ không thể gặp gia đình mình trong nhiều năm tới. Cha mẹ tôi đã gọi điện ngay cho tôi để nói rằng nếu điều đó xảy ra thì tôi cũng đừng lo lắng cho họ, và dù có chuyện gì đi nữa thì cũng không nên tìm cách quay về Nga. Ngay sau khi nói lời tạm biệt, chúng tôi đều chuẩn bị cho tình huống xấu nhất. Thậm chí, chúng tôi còn không biết sắp tới mình có thể nói chuyện được với nhau qua điện thoại không nữa.

Đó là những ngày đầy náo động. Một đêm, bạn thân của tôi, nhà vật lý Fedya Smirnov và tôi đang ngồi trong phòng chờ nhà khách, xem chương trình truyền hình Nhật Bản và cố gắng hình dung chuyện gì đang xảy ra ở Moscow. Những người khác trong tòa nhà có vẻ như đang ngủ say. Đột nhiên, khoảng ba giờ sáng, Peter Goddard bước vào

phòng, với một chai whisky Glenfiddich trên tay. Ông hỏi chúng tôi về những tin tức mới nhất, và chúng tôi cùng ngồi uống. Sau đó, ông đi ngủ nhưng nhấn mạnh rằng chúng tôi cứ giữ lấy chai rượu mà uống - một cử chỉ động viên rất lịch thiệp.

Một ngày sau, cuộc *đảo chính* đã bị đánh bại, một tin khiến chúng tôi vô cùng nhẹ nhõm. Một bức ảnh của tôi và Borya Feigin (anh cũng tham gia hội thảo này) cười tươi và tung nắm đấm vào không trung xuất hiện trên trang nhất của *Yomiuri*, một trong những tờ báo hàng đầu của Nhật.

Trong email gửi cho Peter, tôi gọi nhắc về thời kỳ đó và nói với ông về khoản tài trợ của DARPA cho chúng tôi. Tôi gợi ý rằng chúng tôi muốn tổ chức một cuộc hội thảo tại viện Nghiên cứu cao cấp để mời các nhà vật lý và toán học tới chia sẻ về Chương trình Langlands và những đối ngẫu trong vật lý, nhằm tìm kiếm nền tảng chung, và nhờ vậy chúng tôi có thể cùng nhau giải quyết câu đố ấy.

Lời phúc đáp của Peter là điều tuyệt vời nhất mà chúng tôi có thể trông đợi. Ông nói sẽ ủng hộ hết mình trong việc tổ chức hội thảo. Viện nghiên cứu là địa điểm hoàn hảo cho một cuộc gặp gỡ như vậy. Được thành lập năm 1930 như một trung tâm nghiên cứu và tư duy độc lập, viện đã trở thành nhà của Albert Einstein (ông ấy dành 20 năm cuối đời ở đó), của André Weil, John von Neumann, Kurt Godel và nhiều nhà khoa học lỗi lạc khác. Những thành viên hiện tại cũng xuất chúng như vậy: đó chính là Robert Langlands, người đã trở thành giáo sư ở đó từ năm 1972 (bây giờ là giáo sư công huân), và Edward Witten. Ở đó còn có hai nhà vật lý khác là Nathan Seiberg và Juan Maldacena, làm việc ở những lĩnh vực liên quan mật thiết với vật lý lượng tử, và một vài nhà toán học như Pierre Deligne và Robert MacPherson, đang tiến hành nghiên cứu về các chủ đề gắn liền với Chương trình Langlands.

Thư từ trao đổi của tôi với Goddard đã mang lại kết quả, kế hoạch cho một cuộc gặp gỡ mang tính khai phá sẽ được tổ chức vào đầu tháng 12 năm 2003. Ben Mann, Kari Vilonen, và tôi sẽ đến Princeton, còn

Goddard cũng hứa sẽ tham dự. Chúng tôi mời cả Witten, Seiberg và MacPherson; Mark Goresky, một nhà toán học khác ở Princeton, người cùng đảm trách dự án DARPA với Kari và tôi, cùng tham gia (chúng tôi cũng mời cả Langlands, Maldacena, và Deligne, nhưng họ đang đi công tác nên không thể tham dự).

Cuộc gặp gỡ được bố trí bắt đầu lúc 11 giờ sáng ở phòng hội thảo bên cạnh quán ăn tự phục vụ của viện. Ben, Kari và tôi đến sớm, khoảng 15 phút trước khi bắt đầu. Chưa có ai ở đó cả. Vừa lo lắng đi đi lại lại trong phòng, tôi vừa nghĩ: “Liệu Witten có tới không nhỉ?” Ông ấy là khách mời duy nhất không xác nhận sự tham gia của mình.

Năm phút trước khi diễn ra cuộc gặp, cánh cửa chọt mở ra. Chính là Witten! Đó là thời khắc tôi biết rằng mọi điều tốt đẹp sẽ đến. Một vài phút sau, những người khác cũng đến. Chúng tôi ngồi quanh một chiếc bàn lớn. Sau những lời chào hỏi và trao đổi ngắn thông thường, là sự im lặng; tất cả mọi con mắt đều hướng vào tôi.

“Cảm ơn mọi người đã đến tham dự,” tôi bắt đầu. “Chúng ta đôi khi biết rằng Chương trình Langlands và đối ngẫu điện từ có một số điểm chung. Nhưng chúng ta lại chưa có hiểu biết chính xác về những gì đang diễn ra. Tôi nghĩ rằng đã đến lúc vén lên bức màn bí mật này. Bây giờ chúng ta đã có đủ nguồn lực cần thiết bởi chúng ta đã nhận được nguồn tài trợ hào phóng từ DARPA để hỗ trợ những nghiên cứu trong lĩnh vực này.”

Mọi người quanh bàn gật đầu. Peter Goddard hỏi, “Cậu thử đề xuất xem chúng ta nên tiếp cận vấn đề như thế nào?”

Trước buổi gặp mặt, Kari, Ben và tôi đã thử một vài kịch bản khác nhau, do vậy tôi chuẩn bị khá tốt.

“Tôi đề nghị chúng ta sẽ tổ chức một cuộc hội thảo tại đây, ở viện. Tôi sẽ mời các nhà vật lý làm việc trong những lĩnh vực liên quan và chúng ta sẽ sắp xếp để các nhà toán học trình bày những hiểu biết hiện thời liên quan tới Chương trình Langlands. Sau đó chúng ta sẽ cùng thảo luận về những mối liên kết có thể có với vật lý lượng tử.”

Bây giờ mọi ánh mắt đều đổ dồn vào Witten, cánh chim đầu đàn trong lĩnh vực vật lý lượng tử. Phản ứng của ông là tối quan trọng. Cao lớn và bệ vệ, ở Witten toát ra một sức mạnh trí tuệ vĩ đại, tới mức mà đứng trước ông, một số người trở nên rất rụt rè. Khi ông nói, những phát biểu của ông đều cực kỳ chính xác và rõ ràng: cứ như chúng là hệ quả của một thứ logic không thể bị phá vỡ vậy. Ông không bao giờ do dự ngừng lại giây lát, suy ngẫm về câu trả lời của mình. Những lúc như thế, ông thường nhắm mắt lại và nghiêng đầu về phía trước. Và đó chính là những gì ông đang làm lúc này.

Tất cả chúng tôi đều kiên nhẫn chờ đợi. Đã gần một phút trôi qua, nhưng với tôi thì nó như là vô tận vậy. Cuối cùng, Witten nói, “Nghe có vẻ như đây là một ý tưởng tốt. Thế các anh dự định tổ chức hội thảo vào thời gian nào?”

Ben, Kari và tôi không thể làm gì hơn là nhìn nhau. Witten đã đồng ý tham gia rồi, và đây là một thắng lợi to lớn với chúng tôi.

Sau khi thảo luận ngắn gọn, chúng tôi đã chọn được ngày tháng phù hợp với tất cả mọi người: từ ngày 8-10 tháng 3 năm 2004. Sau đó có người hỏi rằng thành phần tham dự sẽ gồm những ai và ai là người báo cáo. Chúng tôi nhắc tới một số cái tên và đồng ý sẽ thống nhất danh sách cuối cùng qua email và sẽ gửi ngay thư mời. Rồi buổi gặp mặt kết thúc. Nó kéo dài không tới 15 phút.

Khỏi phải nói, Ben, Kari và tôi rất hài lòng. Witten đã hứa sẽ giúp tổ chức hội thảo (đây rõ ràng là một điều hết sức hấp dẫn đối với các khách mời) và cũng sẽ tham gia tích cực. Chúng tôi cũng hy vọng rằng Langlands, cũng như những nhà vật lý hay toán học khác ở viện có hứng thú với chủ đề này sẽ tham gia. Mục tiêu đầu tiên của chúng tôi thế là đã hoàn thành.

Chỉ trong vài ngày, chúng tôi đã thống nhất danh sách những người tham dự, và một tuần sau thì các thư mời được gửi đi. Nội dung thư viết:

Chúng tôi viết thư này để mời ông/bà tham dự một hội thảo không chính thức về Chương trình Langlands và Vật lý được tổ chức tại viện Nghiên cứu cao cấp từ ngày mùng 8 đến mùng 10 tháng 3 năm 2004. Mục tiêu của hội thảo này là giới thiệu với các nhà vật lý những tiến bộ gần đây trong Chương trình Langlands hình học nhằm khám phá những mối liên kết tiềm ẩn giữa chủ đề này và lý thuyết trường lượng tử. Chúng tôi dự định sẽ bố trí một số bài giảng giới thiệu của các nhà toán học và sẽ dành nhiều thời gian cho thảo luận. Hội thảo này được tổ chức với sự tài trợ của DARPA.

Thường thì những hội thảo thế này sẽ có khoảng từ 50 tới 100 người tham dự. Những gì thường diễn ra đó là báo cáo viên sẽ trình bày bài giảng trong khi mọi người lịch sự ngồi lắng nghe. Một vài người tham gia có thể đặt câu hỏi vào cuối bài báo cáo, và một số khác có thể trao đổi riêng với báo cáo viên sau đó. Chúng tôi thì mừng tượng cuộc hội thảo này sẽ hoàn toàn khác: một sự kiện sôi động như thế này, ắt hẳn sẽ có những tranh luận gay gắt hơn một hội nghị thông thường. Bởi vậy chúng tôi muốn có một hội nghị chuyên đề nhỏ, khoảng 20 người thôi. Chúng tôi hy vọng như thế sẽ khuyến khích các trao đổi mang nhiều tính tương tác và chuyện trò thoải mái hơn giữa những người tham gia.

Chúng tôi cũng tham dự một hội thảo kiểu thế này lần đầu vào tháng 11 năm 2003, ở Đại học Chicago. Có một số ít các nhà toán học được mời, trong đó có cả Drinfeld và Beilinson (cả hai người đều được phong giáo sư tại Đại học Chicago vài năm trước đó). Hội thảo đó đã thành công và nó chứng tỏ rằng hình mẫu như thế có thể triển khai được.

Chúng tôi quyết định những người thuyết trình sẽ là Kari, Mark Goresky và tôi, và cả một cựu nghiên cứu sinh của tôi là David Ben-Zvi, người sau này đã trở thành giáo sư tại Đại học Texas ở Austin. Chúng tôi chia nội dung trình bày thành bốn phần, bốn người chúng tôi mỗi người sẽ chịu trách nhiệm thuyết trình một phần. Trong đó, chúng tôi đặt mục tiêu sẽ phải chuyển tải được những ý tưởng chính của

Chương trình Langlands cho các nhà vật lý, những người chưa quen thuộc với chủ đề này. Đó không phải là một nhiệm vụ dễ dàng.

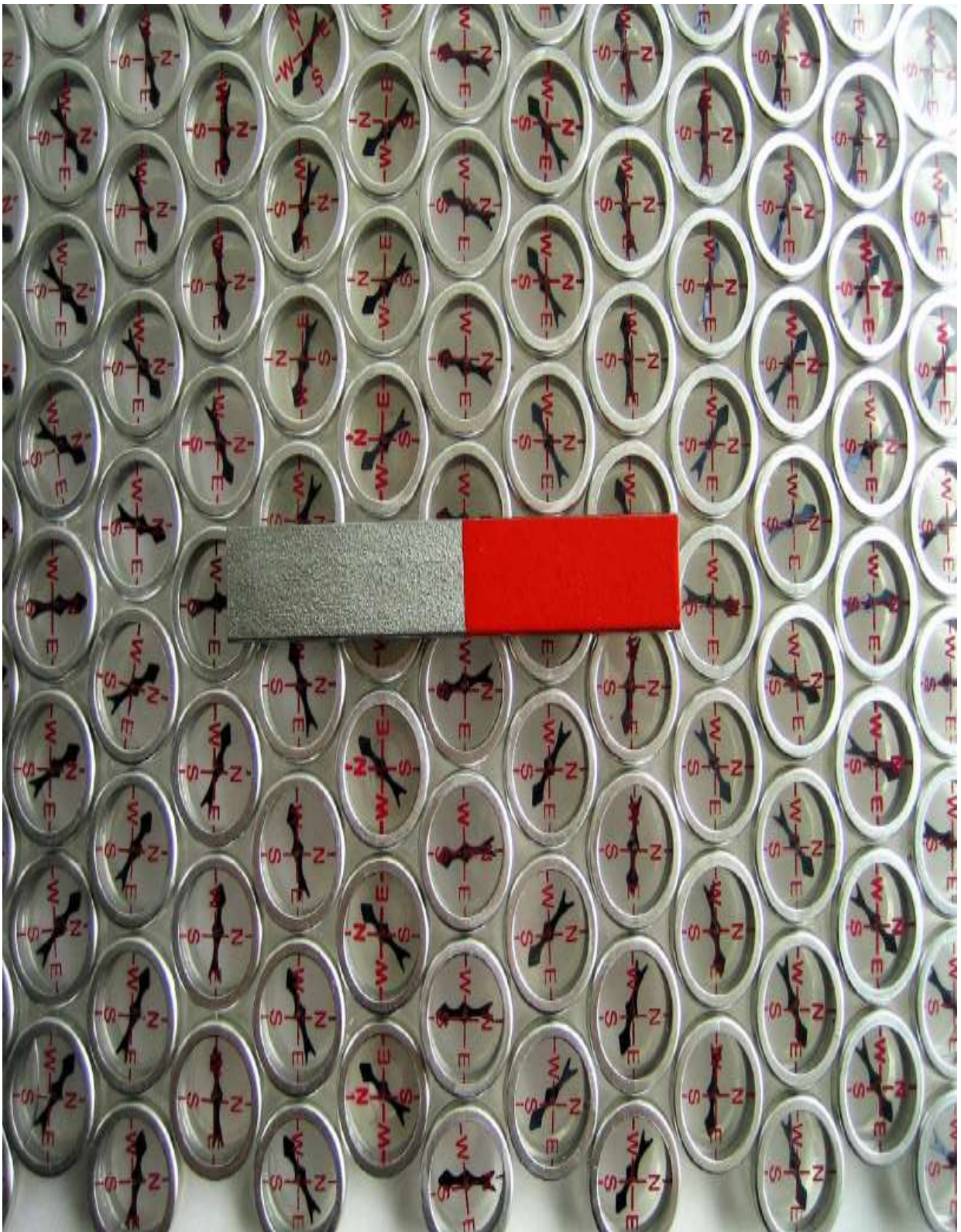
Để chuẩn bị cho hội thảo, tôi muốn học thêm về đối ngẫu điện từ. Tất cả chúng ta đều quen thuộc với lực điện và lực từ. Lực điện là lực làm cho các vật mang điện hút hoặc đẩy lẫn nhau, tùy thuộc điện tích của chúng là trái dấu hay cùng dấu. Chẳng hạn, một electron có điện tích âm và một proton có điện tích dương (có giá trị đối nhau). Lực hút giữa chúng là lực khiến cho electron quay quanh hạt nhân nguyên tử. Các lực điện tạo ra cái gọi là điện trường. Tất cả chúng ta đều từng nhìn thấy điện trường hoạt động khi có sét, đó là hiện tượng xảy ra do sự chuyển động của luồng khí ẩm nóng qua một điện trường.



Ảnh chụp bởi Shane Lear, thư viện ảnh NOAA.

Lực từ thì lại có một nguồn gốc khác. Nó là lực được tạo ra bởi nam châm hoặc các hạt mang điện chuyển động. Một nam châm có hai cực: bắc và nam. Khi chúng ta đặt hai nam châm với các cực đối nhau đối diện nhau, chúng sẽ hút nhau, trong khi với các cực giống nhau thì chúng sẽ đẩy nhau. Trái Đất là một nam châm khổng lồ, và khi chúng ta sử dụng la bàn là chúng ta đã lợi dụng lực từ mà nó tác dụng. Bất cứ nam châm nào cũng tạo ra một từ trường, như chúng ta có thể thấy một cách rõ ràng ở bức ảnh dưới đây.

Năm 1860, nhà vật lý người Anh James Clerk Maxwell đã phát triển một lý thuyết toán học cực kỳ đẹp đẽ về điện trường và từ trường. Ông đã mô tả chúng bằng một hệ các phương trình vi phân mà ngày nay mang tên ông. Bạn có lẽ nghĩ rằng các phương trình này sẽ rất dài dòng và phức tạp, nhưng thực tế chúng lại khá đơn giản: cả thảy chỉ có bốn phương trình, và trông chúng đối xứng một cách đáng ngạc nhiên. Hóa nếu chúng ta xét lý thuyết này trong chân không (tức là, không có sự hiện diện của bất kỳ vật chất nào) và hoán đổi điện trường và từ trường cho nhau thì hệ phương trình trên không hề thay đổi.^[138] Nói cách khác, việc đổi chỗ hai trường này là một đối xứng của hệ phương trình. Và điều đó được gọi là đối ngẫu điện từ. Điều này có nghĩa là mối liên hệ giữa điện trường và từ trường là đối xứng: mỗi trường ảnh hưởng tới trường còn lại theo chính xác cùng một cách.



Ảnh chụp bởi Dayna Mason

Ngày nay, những phương trình đẹp đẽ của Maxwell mô tả lý thuyết điện từ *cổ điển*, theo nghĩa là lý thuyết này vận hành tốt ở những thang kích thước lớn và năng lượng thấp. Nhưng ở những thang kích thước nhỏ và năng lượng cao, hai trường này lại được mô tả bởi lý thuyết điện từ *lượng tử*. Trong lý thuyết lượng tử, các trường này sinh ra bởi các hạt cơ bản, tức các photon, tương tác với những hạt khác. Lý thuyết này còn được gọi là lý thuyết trường lượng tử.

Để tránh hiểu nhầm, tôi muốn nhấn mạnh rằng thuật ngữ “lý thuyết trường lượng tử” có hai nghĩa khác nhau: theo nghĩa rộng thì nó nghĩa là ngôn ngữ toán học tổng quát được sử dụng để mô tả hành vi và tương tác của các hạt cơ bản; nhưng nó cũng có thể chỉ một mô hình cụ thể của những hành vi như vậy chẳng hạn, lý thuyết điện từ lượng tử là một lý thuyết trường lượng tử theo nghĩa đó. Tôi phần lớn sẽ sử dụng thuật ngữ này theo nghĩa thứ hai.

Trong bất kỳ lý thuyết (hay mô hình) nào, một số hạt cơ bản (như electron và quark) là các viên gạch cấu thành nên vật chất, và một vài hạt khác (như photon) là các hạt truyền tương tác. Mỗi hạt đều có nhiều đặc tính khác nhau: một vài đặc tính quen thuộc, như khối lượng và điện tích, số khác ít quen thuộc hơn, như “spin”. Khi đó một lý thuyết trường lượng tử cụ thể là một “công thức” tổ hợp chúng với nhau.

Thực tế thì từ “công thức” hướng chúng ta tới một sự tương tự hữu ích: hãy nghĩ về một lý thuyết trường lượng tử như một công thức nấu ăn. Khi đó các thành phần của món mà chúng ta nấu là những tương tự của các hạt cơ bản, và cách mà chúng ta hòa trộn chúng với nhau cũng giống như tương tác của các hạt cơ bản vậy.

Chẳng hạn, hãy nhìn công thức chế biến món xúp *borscht* của Nga, một món ăn ưa thích hằng ngày của tôi ở quê nhà. Mẹ tôi luôn làm món đó ngon nhất (dĩ nhiên rồi!).

Dưới đây là ảnh của món ăn (do bố tôi chụp):



Dĩ nhiên, tôi phải giữ bí mật công thức của mẹ tôi. Nhưng đây là một công thức mà tôi tìm thấy trên mạng:

8 cốc nước xuýt (bò hoặc rau)

450 gam bắp xương bò cắt lát

1 củ hành to

4 củ cải đường to, gọt vỏ

4 củ cà rốt, gọt vỏ

1 cà chua to nâu đỏ, gọt vỏ

2 chén cải bắp cắt nhỏ

3/4 cốc thì là tươi băm nhỏ

45 ml rượu vang đỏ

1 cốc kem chua

Muối

Tiêu

Hãy tưởng tượng đây như là “thành phần các hạt” trong lý thuyết trường lượng tử của chúng ta. Vậy đối ngẫu sẽ mang ý nghĩa nào trong bối cảnh này? Nó đơn giản đồng nghĩa với hoán đổi một vài trong số các thành phần (“các hạt”) với các thành phần khác, mà vẫn giữ nguyên được dung lượng toàn thể.

Dưới đây là cách mà một đối ngẫu như thế có thể vận hành:

Củ cải đường → cà rốt

Cà rốt → củ cải đường

Hành tây → cà chua

Cà chua → hành tây

Muối → tiêu

Tiêu → muối

Tất cả các thành phần còn lại vẫn giữ nguyên dưới tác động của đối ngẫu; tức là

Nước xuýt → nước xuýt

Bắp xương bò → bắp xương bò

và v.v.

Do lượng các thành phần mà chúng ta hoán đổi là như nhau, nên kết quả sẽ vẫn là cùng một công thức! Đây chính là ý nghĩa của đối ngẫu. Trái lại, nếu chúng ta hoán đổi củ cải đường với cà chua, chúng ta sẽ thu được một công thức khác: trong đó chúng ta có tới bốn quả cà chua và chỉ có một củ cải đường. Tôi chưa thử nó bao giờ, nhưng tôi đoán là vị của nó chắc kinh khủng lắm.

Từ ví dụ này có thể thấy rõ ràng rằng, một đối xứng của công thức là một tính chất rất hiếm hoi, từ đó chúng ta có thể học hỏi được điều gì đó từ món ăn này. Thực tế chúng ta có thể hoán đổi củ cải đường với cà rốt mà không ảnh hưởng tới kết quả, giữa là món *borscht* rất cân bằng giữa hai thứ này.

Hãy cùng quay lại với lý thuyết điện từ lượng tử. Nói rằng có một đối ngẫu trong lý thuyết này nghĩa là có một cách hoán đổi các hạt để chúng ta vẫn thu lại được cùng một lý thuyết. Nói đối ngẫu điện từ ở đây là chúng tôi muốn nói rằng tất cả những thứ “có tính điện” đều trở thành “có tính từ” và ngược lại. Do vậy, chẳng hạn, ‘một electron (một tương tự của củ cải đường trong công thức làm món xúp) mang điện tích nguyên tố, do vậy nó cần được hoán đổi với một hạt cơ bản mang từ tích nguyên tố (một tương tự của cà rốt).

Sự tồn tại của một hạt như vậy trái ngược với kinh nghiệm hằng ngày của chúng ta: một nam châm luôn có hai cực, và chúng không thể bị tách ra khỏi nhau được! Nếu chúng ta bẻ một thanh nam châm thành hai mảnh, thì mỗi một mảnh cũng vẫn sẽ có hai cực.

Tuy nhiên, sự tồn tại của một hạt cơ bản mang từ tích, gọi là đơn cực từ, đã được tiên đoán bằng lý thuyết bởi các nhà vật lý; chính Paul Dirac - cha đẻ của vật lý lượng tử - đã đưa ra tiên đoán đầu tiên năm 1931. Ông đã chỉ ra rằng nếu chúng ta cho phép một điều gì đó kỳ quặc xảy ra với từ trường ở vị trí của đơn cực từ (đây là cái mà các nhà toán học gọi là một “kỳ dị” của từ trường), thì nó sẽ mang từ tích.

Tiếc thay, các đơn cực từ vẫn chưa được thực nghiệm phát hiện, do vậy chúng ta vẫn chưa biết liệu nó có tồn tại trong tự nhiên hay không. Nếu chúng không tồn tại, thì một đối ngẫu điện từ cũng không tồn tại trong tự nhiên ở thang lượng tử.

Vậy là vẫn chưa thể biết chắc chắn điều đó có đúng hay không. Tuy nhiên, chúng ta cứ thử xây dựng một lý thuyết trường lượng tử gần sát với tự nhiên và thể hiện đối ngẫu điện từ xem sao. Quay trở lại với căn bếp lúc trước, chúng ta có thể thử “nấu” những lý thuyết mới có sở hữu những đối ngẫu. Chúng ta có thể thay đổi các thành phần và số lượng của chúng trong công thức mà chúng ta biết, bỏ đi vài thứ trong đó, thêm vào vài thứ khác, v.v. Kiểu “nấu nướng thử nghiệm” này có thể làm biến đổi những kết quả. Có thể chúng ta không nhất thiết muốn “ăn” những món ăn tưởng tượng ấy. Nhưng dù có ăn được hay không, thì cũng đáng để nghiên cứu những tính chất của chúng trong căn bếp sáng tạo của chúng ta - chúng có thể mang lại cho chúng ta một số manh mối về các món ăn khả dĩ (chẳng hạn như các mô hình có thể mô tả được vũ trụ của chúng ta).

Kiểu “xây dựng mô hình” thử-sai này chính là con đường dẫn tới những tiến bộ của vật lý lượng tử qua nhiều thập kỷ (cũng như trong nghệ thuật ẩm thực vậy). Và đối xứng là một nguyên lý dẫn đường đầy sức mạnh được dùng để sáng tạo ra những mô hình này. Một mô hình càng đối xứng thì càng dễ phân tích.

Lúc này, điều quan trọng cần phải chú ý là có hai loại hạt cơ bản: fermion và boson. Loại hạt thứ nhất là các hạt cấu thành nên vật chất (như electron, quark, v.v.) và loại thứ hai là các hạt mang tương tác (như là photon). Hạt Higg khó nắm bắt mới được khám phá gần đây trong máy va chạm Hadron lớn ở Geneva, cũng là một boson.

Có một sự khác biệt cơ bản giữa hai loại hạt này: hai fermion không thể đồng thời ở cùng một “trạng thái”, trong khi bất kỳ hạt boson nào cũng đều có thể. Bởi vì hành vi của chúng là khác nhau căn bản như vậy, nên trong một khoảng thời gian dài các nhà vật lý cho rằng bất

kỳ đối xứng nào của một lý thuyết trường lượng tử cũng phải bảo toàn được sự khác biệt đó giữa các nhóm boson và fermion - mà tự nhiên đã cấm chúng trộn lẫn với nhau. Nhưng vào khoảng giữa những năm 1970, vài nhà vật lý đã đề xuất một ý tưởng nghe có vẻ thật điên rồ: đó là một kiểu đối xứng mới có thể hoán đổi các boson với các fermion. Nó được đặt tên thánh là *siêu đối xứng*.

Như Niels Bohr, một trong những cha đẻ của cơ học lượng tử, đã nói một câu nổi tiếng với Wolfgang Pauli, “Tất cả chúng tôi đều nhất trí rằng lý thuyết của anh thật điên rồ. Vấn đề chia rẽ chúng tôi đó là liệu nó có điên rồ tới mức có cơ may trở nên đúng đắn hay không.”

Trong trường hợp siêu đối xứng, chúng ta vẫn chưa biết liệu nó có thực trong tự nhiên hay không, nhưng ý tưởng này đã trở nên phổ biến. Nguyên nhân là rất nhiều vấn đề gây phiền phức cho các lý thuyết trường lượng tử thông thường đều bị loại bỏ khi siêu đối xứng xuất hiện. Nhìn chung các lý thuyết siêu đối xứng đều đẹp đẽ và dễ phân tích.

Lý thuyết điện từ lượng tử thì không có tính siêu đối xứng, nhưng nó có những mở rộng siêu đối xứng. Chúng ta thêm vào một số hạt, cả boson lẫn fermion, và nhờ đó lý thuyết thu được sẽ biểu lộ là siêu đối xứng.

Đặc biệt, các nhà vật lý đã nghiên cứu phần mở rộng của lý thuyết điện từ với mức siêu đối xứng tối đa có thể. Và họ đã chỉ ra rằng, trong lý thuyết mở rộng này, đối ngẫu điện từ thực sự tồn tại.

Tóm lại, chúng ta vẫn chưa biết có tồn tại một dạng đối ngẫu điện từ lượng tử trong thế giới thực hay không. Nhưng chúng ta biết rằng trong một mở rộng của lý thuyết siêu đối xứng lý tưởng hóa thì đối ngẫu điện từ đã được bộc lộ.

Có một khía cạnh quan trọng của đối ngẫu này mà chúng ta vẫn chưa thảo luận. Lý thuyết trường lượng tử của điện từ có một tham số: đó là điện tích, của electron. Nó là một số âm, do vậy chúng ta ký hiệu $-e$, với $e = 1,602 \cdot 10^{-9}$ C. Nó rất nhỏ. Phần mở rộng siêu đối xứng cực đại

của lý thuyết điện từ có một tham số tương tự, mà chúng ta cũng ký hiệu là e . Nếu chúng ta thực hiện đối ngẫu điện từ và hoán đổi mọi thứ mang điện tính với mọi thứ mang từ tính, chúng ta sẽ thu được một lý thuyết mà trong đó điện tích của electron sẽ không phải là e , mà là $1/e$.

Nếu e rất nhỏ thì $1/e$ lại rất lớn. Do vậy, nếu chúng ta bắt đầu với một thuyết có điện tích electron nhỏ (như trong thế giới vật lý của chúng ta), thì lý thuyết đối ngẫu sẽ có điện tích của electron là rất lớn.

Quả là, điều cực kỳ đáng ngạc nhiên! Theo cách hiểu của món xúp ban đầu, thì e là nhiệt độ của món xúp. Khi ấy đối ngẫu có nghĩa là việc hoán đổi các thành phần như là cà rốt và củ cải đường sẽ chuyển một món *borscht* lạnh thành một món *borscht* nóng.

Sự nghịch đảo này của e thực tế là một khía cạnh then chốt của đối ngẫu điện từ, nó có những hệ quả rất sâu rộng. Theo cách lý thuyết trường lượng tử được thiết lập, chúng ta chỉ có thể nghiên cứu nó tốt nhất với những giá trị nhỏ của tham số, như là e . Chúng ta thậm chí cũng không *biết trước* rằng lý thuyết này lại có nghĩa đối với cả những giá trị lớn của tham số đó. Đối ngẫu điện từ không chỉ cho chúng ta thấy nó có ý nghĩa, mà nó còn tương đương với lý thuyết có giá trị tham số nhỏ. Có nghĩa là chúng ta có cơ may mô tả lý thuyết này với tất cả các giá trị của tham số. Điều này giải thích tại sao kiểu đối ngẫu như thế lại được coi là Chén Thánh của vật lý lượng tử.

Câu hỏi tiếp theo là đối ngẫu điện từ có tồn tại trong các lý thuyết trường lượng tử khác ngoài lý thuyết điện từ và các mở rộng siêu đối xứng của nó hay không?

Bên cạnh lực điện và lực từ, người ta còn biết đến ba lực khác trong tự nhiên: lực hấp dẫn - chúng ta đều biết và hiểu rõ, và hai lực hạt nhân khác với cái tên khá trần tục là lực mạnh và lực yếu. Lực hạt nhân mạnh là lực giữ các quark lại với nhau trong các hạt cơ bản như là các proton và neutron. Lực hạt nhân yếu là lực gây ra nhiều quá trình biến đổi của nguyên tử và các hạt cơ bản, như phân rã beta của nguyên tử

(phát ra electron và các neutrino) và phản ứng tổng hợp hydro tạo ra năng lượng của các ngôi sao.

Các lực này dường như khá khác biệt. Tuy nhiên, các lý thuyết của lực điện từ, lực yếu và lực mạnh hóa ra lại có điểm chung mà chúng ta gọi chung là các lý thuyết chuẩn (*gauge*), hay các lý thuyết Yang-Mills, để vinh danh hai nhà vật lý Chen Ning Yang và Robert Mills, những người đã viết một bài báo đột phá về chúng năm 1954. Như tôi đã nhắc đến ở đầu chương này, lý thuyết chuẩn có một nhóm đối xứng, gọi là *nhóm chuẩn*. Nó là một nhóm Lie, đối tượng mà chúng ta nhắc đến trong chương 10. Nhóm chuẩn của lý thuyết điện từ là nhóm được giới thiệu ở ngay phần đầu của cuốn sách này, nhóm đường tròn (còn được biết đến dưới cái tên $SO(2)$ hay $U(1)$). Nó là nhóm Lie đơn giản nhất và có tính giao hoán. Chúng ta biết rằng rất nhiều nhóm Lie không có tính giao hoán giống như nhóm $SO(3)$ các phép quay của mặt cầu. Ý tưởng của Yang và Mills là xây dựng lý thuyết điện từ tổng quát mà trong đó nhóm đường tròn sẽ được thay thế bởi một nhóm không giao hoán. Hóa ra các lý thuyết chuẩn với các nhóm chuẩn không giao hoán lại mô tả chính xác các lực hạt nhân mạnh và yếu.

Nhóm chuẩn của lý thuyết lực hạt nhân yếu là nhóm $SU(2)$. Nó là nhóm đối ngẫu Langlands đối với $SO(3)$ và lớn gấp 2 (chúng ta đã nói về nó trong chương 15). Nhóm chuẩn của lực hạt nhân mạnh được gọi là $SU(3)$.^[139]

Như vậy các lý thuyết chuẩn cung cấp một hình thức luận phổ quát, mô tả ba trong số bốn lực cơ bản của tự nhiên (chúng ta tính gộp lực điện và lực từ như là hai phần của một lực điện từ duy nhất). Tuy nhiên, nhiều năm sau này, người ta nhận ra rằng chúng không phải chỉ là ba lý thuyết riêng biệt mà thực ra là các bộ phận của một tổng thể: có một lý thuyết, thường được gọi là Mô hình chuẩn, nó bao gồm ba lực riêng rẽ nói trên. Bởi vậy chúng ta có thể gọi nó là một “lý thuyết thống nhất” - lý thuyết mà Einstein đã theo đuổi nhưng không thành công

trong suốt 30 năm cuối đời (mặc dù ở thời điểm đó mới chỉ có hai lực được biết đến: lực điện từ và lực hấp dẫn).

Chúng ta đã nói nhiều về tầm quan trọng của ý tưởng thống nhất trong toán học. Chẳng hạn như Chương trình Langlands là một lý thuyết thống nhất theo nghĩa là nó mô tả một phạm vi rộng lớn các hiện tượng trong những lĩnh vực toán học khác nhau bằng những ngôn ngữ giống nhau. Ý tưởng xây dựng một lý thuyết thống nhất từ một số các nguyên lý ban đầu ít nhất có thể là đặc biệt quyến rũ trong vật lý, và nguyên nhân của nó thật rõ ràng. Chúng ta mong muốn đạt được hiểu biết toàn diện nhất về cách vận hành nội tại của vũ trụ và hy vọng rằng lý thuyết tối hậu - nếu nó tồn tại - sẽ đơn giản và thanh nhã.

Đơn giản và thanh nhã không có nghĩa là dễ dàng. Chẳng hạn các phương trình của Maxwell rất sâu sắc và ta cần phải có những nỗ lực nhất định mới hiểu được chúng nói gì. Nhưng chúng lại đơn giản theo nghĩa là cách hiệu quả nhất để diễn tả chân lý về các lực điện và từ. Chúng cũng rất đẹp. Các phương trình của Einstein về hấp dẫn và các phương trình của lý thuyết chuẩn không giao hoán được Yang và Mills tìm ra cũng như vậy. Một lý thuyết thống nhất phải kết hợp được tất cả những lý thuyết ấy lại với nhau, giống như một bản giao hưởng đan kết các âm thanh của những nhạc cụ khác nhau lại vậy.

Mô hình chuẩn là một bước theo hướng này, và những xác nhận thực nghiệm của nó (bao gồm cả khám phá mới đây về boson Higg) là một thắng lợi. Tuy nhiên, nó chưa phải là lý thuyết tối hậu về vũ trụ: trước tiên, nó không bao hàm lực hấp dẫn, lực khó nắm bắt nhất. Lý thuyết tương đối rộng của Einstein giúp cho chúng ta hiểu rõ về lực hấp dẫn theo kiểu cổ điển, tức là ở thang kích thước lớn nhưng chúng ta vẫn chưa có một lý thuyết lượng tử có thể kiểm chứng bằng thực nghiệm có thể mô tả lực hấp dẫn ở thang kích thước nhỏ. Thậm chí nếu chúng ta tập trung vào ba lực khác của tự nhiên, thì Mô hình chuẩn vẫn còn để lại quá nhiều câu hỏi chưa trả lời được và không giải thích được câu đố hóc búa về thứ vật chất mà các nhà thiên văn đã quan sát thấy (cái gọi

là “vật chất tối”). Do vậy Mô hình chuẩn chỉ mới là một phác thảo chưa hoàn thiện của bản giao hưởng tối hậu.

Có một điểm rất rõ ràng: bản phối cuối cùng cho bản giao hưởng tối hậu kia sẽ được viết bằng ngôn ngữ toán học. Thực tế, sau khi Yang và Mills viết bài báo nổi tiếng giới thiệu về những lý thuyết chuẩn không giao hoán, các nhà vật lý sững sờ nhận ra rằng hình thức luận toán học cần thiết cho các lý thuyết này đã được các nhà toán học phát triển từ hàng thập kỷ trước, lại chẳng có liên hệ gì với vật lý cả. Yang, người sau này được nhận giải thưởng Nobel, kể lại nỗi kinh ngạc của mình qua những dòng sau:^[140]

Đây không chỉ đơn thuần là niềm vui. Mà còn là nhiều thứ khác, sâu sắc hơn: xét cho cùng, thử hỏi cái gì có thể bí ẩn hơn, cái gì có thể khiến ta kinh ngạc hơn ngoài phát hiện rằng cấu trúc của thế giới vật lý lại gắn liền với các khái niệm toán học sâu sắc, các khái niệm được phát triển từ những suy tính chỉ dựa trên nền tảng lý luận và vẻ đẹp của các dạng thức?

Chính Einstein cũng biểu lộ cảm giác kinh ngạc đó khi đặt câu hỏi^[141], “Làm thế nào mà toán học, xét cho cùng chỉ là sản phẩm của tư duy con người, độc lập với kinh nghiệm, lại phù hợp một cách tuyệt vời đến thế với những đối tượng của thực tại?”

Những khái niệm mà Yang và Mills sử dụng để mô tả các lực của tự nhiên xuất hiện trong toán học sớm hơn bởi vì chúng cũng là tự nhiên trong hình mẫu của hình học mà các nhà toán học phát triển tuân theo logic nội tại của nó. Đây là một ví dụ tuyệt vời về điều mà một người đoạt giải Nobel khác, nhà vật lý Eugene Wigner, gọi là “tính hiệu quả đến phi lý của toán học trong khoa học tự nhiên”.^[142] Mặc dù các nhà khoa học đã khai thác “tính hiệu quả” này trong nhiều thế kỷ, nhưng người ta vẫn chưa hiểu được là nguồn gốc của nó. Các chân lý toán học có vẻ như tồn tại khách quan độc lập với cả thế giới vật chất và bộ não con người. Không còn nghi ngờ rằng các mối liên kết tồn tại giữa thế giới ý niệm toán học, thực tại vật lý và ý thức là vô cùng sâu

sắc nên cần phải được khám phá sâu hơn nữa. (Chúng ta sẽ nói thêm về điều này trong chương 18.)

Chúng ta cũng cần những ý tưởng mới để tiến xa hơn với Mô hình chuẩn. Một trong những ý tưởng như vậy là siêu đối xứng. Việc nó có hiện diện trong vũ trụ của chúng ta hay không là một chủ đề còn gây nhiều tranh cãi. Cho đến giờ, vẫn chưa có dấu vết nào của nó được tìm thấy. Thực nghiệm là quan tòa tối hậu của một lý thuyết, do vậy chừng nào còn chưa được chứng minh bằng thực nghiệm, thì siêu đối xứng vẫn chỉ là một cấu trúc lý thuyết, mặc cho nó có đẹp đẽ và quyến rũ nhường nào đi nữa. Nhưng ngay cả khi siêu đối xứng không hiện hữu trong thế giới thực, nó vẫn là một công cụ toán học tiện lợi mà chúng ta có thể sử dụng để xây dựng những mô hình mới của vật lý lượng tử. Những mô hình này không quá xa với mô hình chi phối thế giới vật lý thực tại của chúng ta nhưng lại thường dễ phân tích hơn bởi vì chúng bộc lộ bậc đối xứng cao hơn. Chúng ta hy vọng rằng những điều mà chúng ta học được từ các lý thuyết này sẽ có liên quan đến các lý thuyết thực hơn về vũ trụ của chúng ta, bất chấp siêu đối xứng có tồn tại trong nó hay không.

Cũng giống như lý thuyết điện từ có một mở rộng siêu đối xứng tối đa, các lý thuyết chuẩn không giao hoán cũng vậy. Người ta thu được các lý thuyết siêu đối xứng này nhờ tung thêm nhiều hạt nữa vào cái hỗn hợp cũ, gồm cả boson và fermion để đạt được sự cân bằng hoàn hảo khả dĩ nhất giữa chúng. Khi đó sẽ là tự nhiên khi ta đặt ra câu hỏi: các lý thuyết này liệu có sở hữu một đối ngẫu tương tự như đối ngẫu điện từ hay không?

Hai nhà vật lý Claus Montonen và David Olive đã đương đầu với câu hỏi này vào cuối những năm 1970.^[143] Xây dựng dựa trên một công trình trước đó^[144] của Peter Goddard (giám đốc tương lai của viện Nghiên cứu cao cấp), Jean Nuyts và David Olive, họ đã đi tới một kết luận gây sửng sốt: đúng thế, có một đối ngẫu điện từ trong các lý thuyết chuẩn siêu đối xứng không giao hoán, nhưng những lý thuyết này nói

chung là không tự đối ngẫu, theo như cách của lý thuyết điện từ. Như đã thảo luận ở trên, nếu chúng ta thay thế tất cả những gì mang điện tích bởi những gì mang từ tính và ngược lại trong lý thuyết điện từ, ta vẫn sẽ thu được một lý thuyết y như vậy, chỉ có dấu điện tích của electron sẽ bị nghịch đảo.

Nhưng hóa ra nếu chúng ta cũng làm thế trong lý thuyết chuẩn siêu đối xứng tổng quát với nhóm chuẩn G , ta sẽ thu được một lý thuyết *khác*. Nó vẫn sẽ là một lý thuyết chuẩn, nhưng với một nhóm chuẩn khác (và cũng có tham số bị nghịch đảo, tương tự như điện tích của electron). Vậy nhóm chuẩn của lý thuyết đối ngẫu kia là gì? Hóa ra nó lại là ${}^L G$, nhóm đối ngẫu Langlands của nhóm G .

Goddard, Nuy ts và Olive khám phá ra điều này bằng cách phân tích chi tiết các điện tích và từ tích trong lý thuyết chuẩn với nhóm chuẩn G . Trong lý thuyết điện từ, lý thuyết chuẩn với nhóm chuẩn là nhóm đường tròn, cả điện tích lẫn từ tích đều có giá trị nguyên. Khi ta hoán đổi chúng, một tập các số nguyên sẽ được hoán đổi với một tập các số nguyên khác. Do vậy, lý thuyết này vẫn giữ nguyên như cũ. Nhưng họ cũng chỉ ra rằng, trong một lý thuyết chuẩn tổng quát, các điện tích và từ tích lấy giá trị ở hai tập khác nhau. Ta hãy gọi chúng là S_e và S_m . Chúng có thể được biểu diễn bằng toán học qua nhóm chuẩn G (hiện tại thì việc mô tả chúng thế nào không quan trọng lắm).^[145]

Hóa ra dưới tác động của đối ngẫu điện từ, S_e trở thành S_m và S_m trở thành S_e . Do vậy câu hỏi đặt ra là có hay không một nhóm G' khác, mà trong đó thì S_e trở thành cái là S_m trong G , còn S_m thì trở thành cái là S_e trong G (điều này phải tương thích với một số dữ liệu phụ được xác định bởi G và G'). Việc nhóm G' như vậy có tồn tại hay không là không hề hiển nhiên, nhưng họ đã chứng minh được rằng nó tồn tại và đưa ra một cách xây dựng nhóm đó. Ở thời điểm ấy, họ không biết rằng nhóm G' đã được Langlands xây dựng một thập kỷ trước theo gần như cùng một cách, mặc dù động lực thúc đẩy Langlands là hoàn toàn khác. Nhóm G' này chính là nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$.

Tại sao đối ngẫu điện từ lại dẫn tới cùng một nhóm đối ngẫu Langlands mà các nhà toán học đã khám phá ra trong một bối cảnh hoàn toàn khác là một câu hỏi lớn mà chúng tôi chuẩn bị giải đáp trong cuộc hội thảo ở Princeton.

Chương 17

PHÁT HIỆN NHỮNG KẾT NỐI ẨN GIẤU

Cách thành phố New York khoảng một giờ tàu hỏa, Princeton trông giống như một thị trấn ngoại ô vùng Đông-Bắc điển hình. Viện Nghiên cứu cao cấp, được cộng đồng nghiên cứu biết đến dưới tên gọi đơn giản “Viện”, nằm trong rừng theo đúng nghĩa đen của nó ở ngoại vi của Princeton. Khu vực xung quanh viện thật yên tĩnh và đẹp như tranh vẽ: từng đàn vịt bơi quanh những hồ nhỏ, các hàng cây in bóng xuống làn nước phẳng lặng. Viện gồm một cụm các tòa nhà hai hoặc ba tầng, mang phong cách điển hình của thập niên 1950, nó tỏa ra một không khí đậm chất trí tuệ. Mọi người không thể không tán thưởng lịch sử phong phú của nó khi dạo quanh những hành lang thanh lặng và thư viện chính, nơi Einstein và những nhân vật kiệt xuất khác từng sử dụng.

Đây là nơi chúng tôi đã tổ chức hội thảo vào tháng 3 năm 2004. Mặc dù thông cáo rất ngắn ngủi, nhưng mọi người hưởng ứng lời mời mà chúng tôi gửi đi vào tháng 12 quá tích cực. Có khoảng 20 người tham dự - do vậy khi bắt đầu hội thảo, tôi đề nghị những người có mặt lần lượt giới thiệu về mình. Thật là vượt quá sự mong đợi của tôi: cả Witten và Langlands đều đang ở đó, ngồi sát nhau, cả Peter Goddard và vài đồng nghiệp từ viện Toán và viện Khoa học tự nhiên nữa. David Olive, tác giả của bài toán Montonen-Olive và Goddard-Nuyts-Olive, cũng có mặt. Và dĩ nhiên là Ben Mann cũng tới tham gia với chúng tôi.

Mọi thứ đều diễn ra theo kế hoạch. Chúng tôi đã thuật lại những nét cơ bản của câu chuyện mà bạn đọc trong cuốn sách này: nguồn gốc

của Chương trình Langlands trong lý thuyết số và giải tích điều hòa, việc chuyển qua những đường cong trên các trường hữu hạn, và rồi sau đó qua các diện Riemann. Chúng tôi cũng dành một ít thời gian để giải thích cách xây dựng của Beilinson-Drinfeld và công trình của tôi với Feigin về các đại số Kac-Moody cũng như những liên kết của nó với các lý thuyết trường lượng tử hai chiều.

Không giống như những cuộc hội thảo thông thường, ở đây có rất nhiều ý kiến trao đổi qua lại giữa người trình bày và thính giả. Đó là một cuộc hội thảo hết sức sôi nổi, với những cuộc thảo luận vẫn tiếp tục diễn ra từ trong phòng seminar cho tới quán cà phê và cả lúc quay trở lại.

Trong suốt thời gian ấy, Witten luôn hoạt động với công suất cao nhất. Ông ngồi ở hàng đầu tiên, chăm chú lắng nghe, đặt nhiều câu hỏi và thường thu hút được sự chú ý của các báo cáo viên. Vào buổi sáng ngày thứ ba, ông nói với tôi: “Tôi muốn trình bày vào buổi chiều; tôi nghĩ mình có một ý tưởng về những gì đang diễn ra.”

Sau bữa trưa, ông đưa ra một phác thảo về những mối liên kết có thể giữa hai chủ đề. Đó là sự khởi đầu cho một lý thuyết mới bắc cầu giữa toán học và vật lý, thứ ông và các đồng nghiệp, sau đó là nhiều người khác nữa, đã theo đuổi kể từ đó.

Như chúng ta đã thảo luận, trong cột thứ ba trên phiên đá Rosetta, phiên bản hình học của Chương trình Langlands xoay quanh các diện Riemann. Tất cả những diện này là hai chiều. Chẳng hạn như trong chương 10, mặt cầu - diện Riemann đơn giản nhất - có hai tọa độ: kinh độ và vĩ độ. Điều đó giải thích tại sao nó lại có hai chiều. Tất cả các diện Riemann khác cũng có hai chiều bởi vì một lân cận nhỏ tại mỗi điểm trông cũng giống như một phần của mặt phẳng hai chiều, do vậy nó có thể được biểu diễn bởi hai tọa độ độc lập.

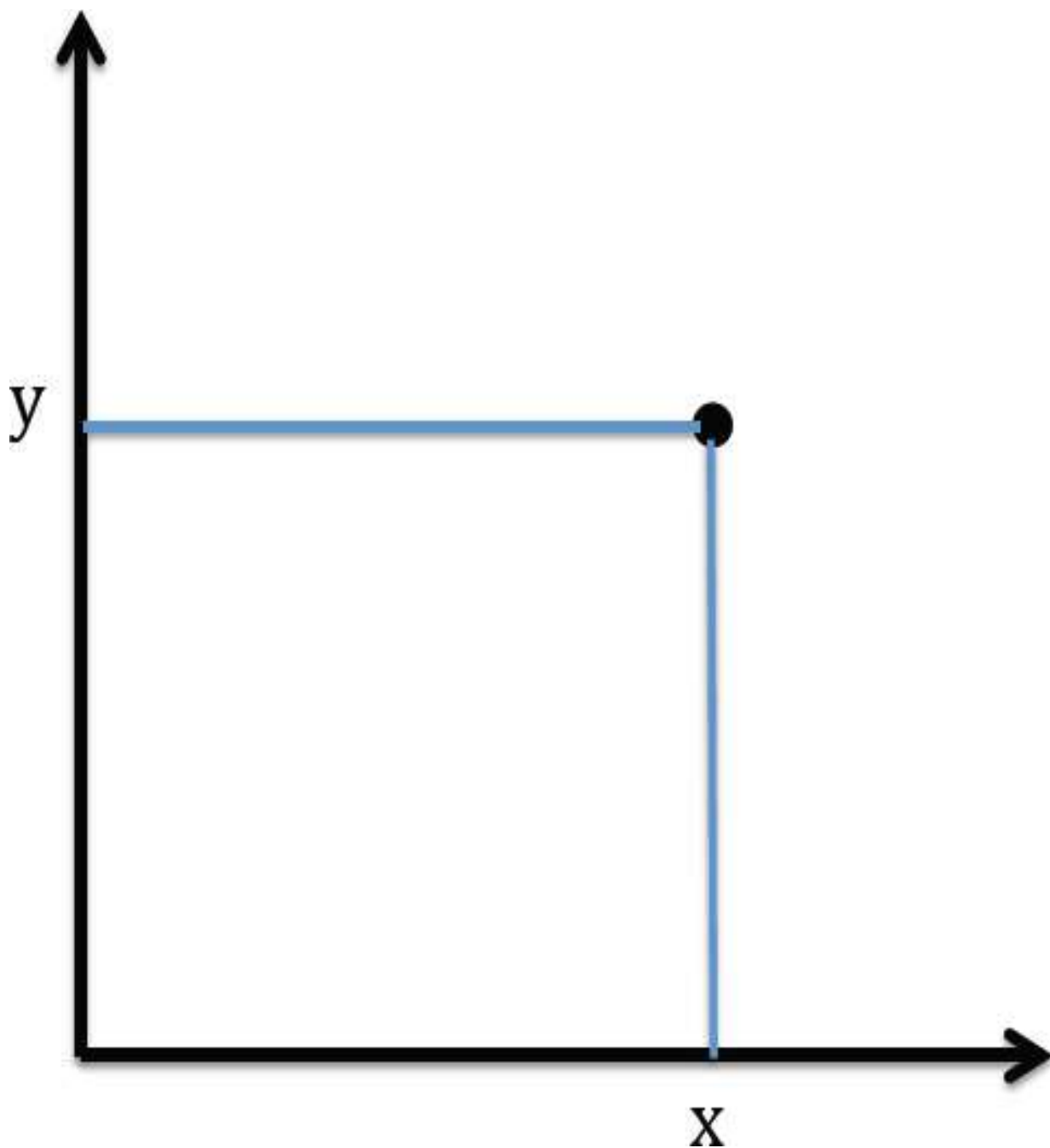
Mặt khác, các lý thuyết chuẩn, nơi quan sát được đối ngẫu điện từ, được xác định trong không-thời gian bốn chiều. Để bắc cầu nối giữa hai loại đối tượng này, Witten bắt đầu bằng cách áp dụng phép “rút gọn số

chiều” của một lý thuyết chuẩn bốn chiều từ bốn xuống thành hai chiều.

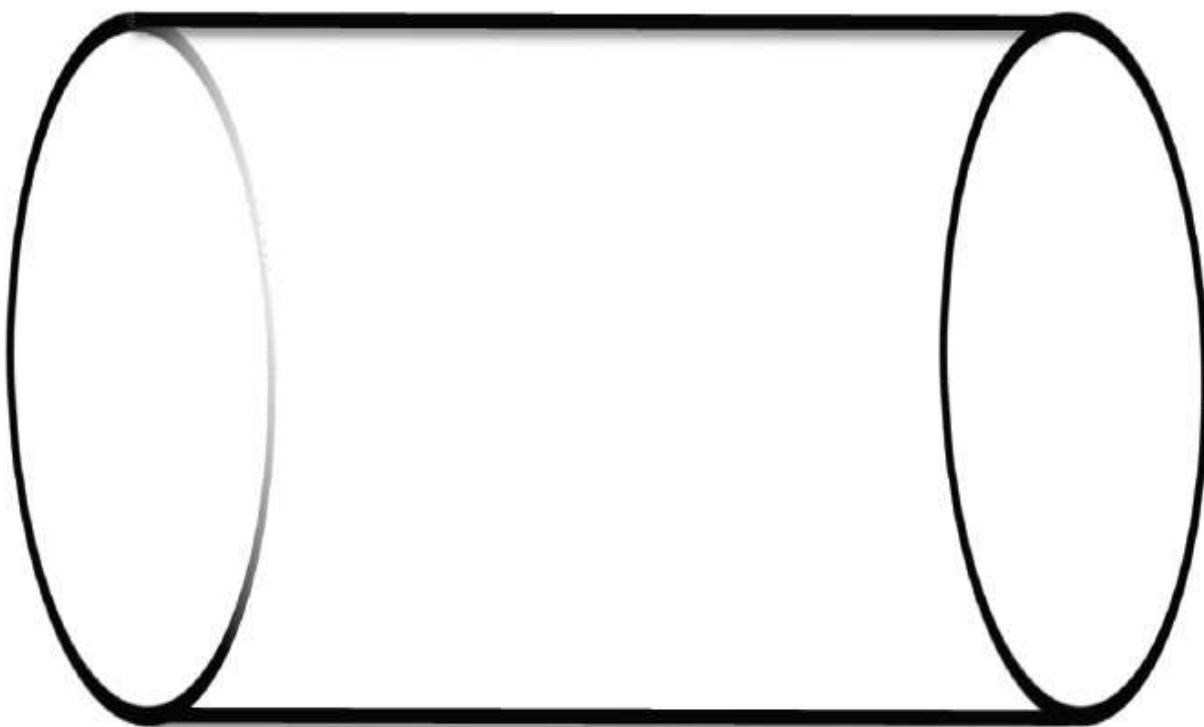
Phép rút gọn số chiều thực sự là một công cụ tiêu chuẩn trong vật lý: chúng ta lấy xấp xỉ một mô hình vật lý bằng cách tập trung vào một số bậc tự do trong khi bỏ đi những bậc tự do khác. Chẳng hạn, giả sử bạn đang bay trên một chiếc máy bay, và một hành khách, đứng ở lối đi giữa các hàng ghế đưa cho bạn một cốc nước. Để đơn giản, giả sử rằng chuyển động của bàn tay vị hành khách đó vuông góc với chuyển động của máy bay. Vận tốc của chiếc cốc khi ấy sẽ bao gồm hai thành phần: thành phần thứ nhất là vận tốc của máy bay, còn thành phần thứ hai là vận tốc của bàn tay hành khách đưa cho bạn cốc nước. Nhưng thành phần thứ nhất thì lớn hơn thành phần thứ hai rất nhiều, do vậy nếu chúng ta mô tả chuyển động của cốc nước trong không khí từ góc nhìn của một người quan sát đứng yên dưới mặt đất thì chúng ta hoàn toàn có thể loại bỏ thành phần vận tốc thứ hai và nói đơn giản rằng chiếc cốc chuyển động với cùng vận tốc như máy bay. Bởi vậy chúng ta có thể quy giản một bài toán hai chiều bao gồm hai thành phần vận tốc xuống còn là bài toán một chiều ứng với thành phần vận tốc trội hơn.

Trong toán học, phép rút gọn số chiều được hiểu như sau: chúng ta xét một dạng hình học (hay một đa tạp), là tích của hai diện Riemann. Ở đây “tích” có nghĩa là chúng ta xét một dạng hình học có các tọa độ là hợp thành từ các tọa độ của hai dạng hình học kia.

Một ví dụ đơn giản hơn, ta hãy xét tích của hai đường thẳng. Mỗi đường thẳng có một tọa độ, do vậy tích sẽ có hai tọa độ độc lập. Do đó nó là một mặt phẳng: mỗi điểm trên mặt phẳng được biểu diễn bởi một cặp tọa độ. Các tọa độ này là tọa độ trên hai đường thẳng, hợp lại với nhau.



Cũng giống như thế, tích của một đường thẳng và một đường tròn là một hình trụ. Nó cũng có hai tọa độ, một tọa độ tròn và một tọa độ thẳng.



Khi chúng ta lấy tích, số chiều sẽ được cộng lại. Trong các ví dụ trên, mỗi đối tượng ban đầu là một chiều, và tích của chúng là hai chiều. Đây là một ví dụ khác: tích của một đường thẳng và một mặt phẳng là không gian ba chiều. Số chiều của nó là $3 = 2 + 1$.

Tương tự như vậy, số chiều của tích hai diện Riemann là tổng số chiều của chúng, tức là $2 + 2$ hay bằng 4. Chúng ta có thể vẽ hình ảnh của một diện Riemann (chúng ta đã từng thấy vài bức trước đó), nhưng chúng ta không thể vẽ một đa tạp bốn chiều, do vậy ta chỉ có thể nghiên cứu chúng về mặt toán học, bằng cách sử dụng chính các phương pháp chúng ta dùng cho các dạng hình học ít chiều hơn, mà ta có thể dễ dàng tưởng tượng hơn. Khả năng làm được như thế của chúng ta là một minh họa tuyệt vời cho sức mạnh của sự trừu tượng toán học, như ta đã thảo luận trong chương 10.

Bây giờ, giả sử rằng kích thước của một trong hai diện Riemann - mà ta gọi nó là X - là cực kỳ nhỏ so với kích thước của diện còn lại, mà ta sẽ gọi là Σ . Khi đó các bậc tự do hiệu dụng sẽ tập trung ở Σ , và chúng ta có thể mô tả một cách gần đúng lý thuyết bốn chiều trên tích

của hai diện này bằng một lý thuyết trên Σ , mà các nhà vật lý gọi là một “lý thuyết hiệu dụng”. Khi đó lý thuyết này sẽ là hai chiều. Phép gần đúng này sẽ trở nên ngày một chính xác hơn nếu chúng ta thu kích thước của X mỗi lúc một nhỏ dần, trong khi vẫn bảo toàn hình dạng của nó (chú ý rằng lý thuyết hiệu dụng này còn phụ thuộc vào hình dạng của X). Do vậy, chúng ta có thể chuyển từ lý thuyết chuẩn siêu đối xứng bốn chiều trên tích của X và Σ xuống còn lý thuyết hai chiều xác định trên Σ .

Trước khi thảo luận chi tiết bản chất của lý thuyết này, chúng ta sẽ giải thích ý nghĩa của lý thuyết trường lượng tử nói chung. Chẳng hạn, trong lý thuyết điện từ, chúng ta nghiên cứu điện trường và từ trường trong không gian ba chiều. Các nhà toán học gọi mỗi trường đó là một trường vector. Một tương tự hữu ích đó là trường vector mô tả bức tranh về gió: tại mỗi điểm trong không gian, gió thổi theo một hướng cụ thể và có cường độ cụ thể - và nó được thể hiện bằng một đoạn thẳng có hướng gắn với điểm đó, các nhà toán học gọi đó là một vector. Tập hợp các vector gắn với tất cả các điểm trong không gian gọi là một trường vector. Tất cả chúng ta đều đã thấy gió được biểu diễn như một trường vector trên bản đồ thời tiết.

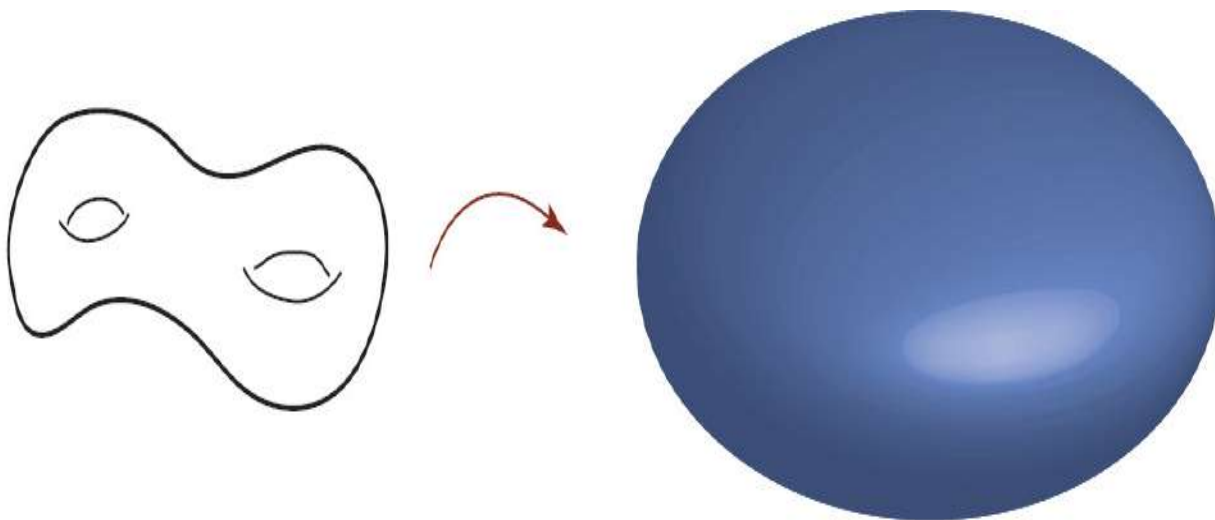
Tương tự như vậy, một từ trường cũng có một hướng và cường độ ở mỗi điểm trong không gian, như bạn có thể thấy trên hình ở trang 261. Do đó nó cũng là một trường vector. Nói cách khác, chúng ta có một quy tắc gán một vector cho mỗi điểm trong không gian ba chiều của chúng ta. Vì vậy, không có gì đáng ngạc nhiên khi các nhà toán học gọi một quy tắc như thế là một “ánh xạ” từ không gian ba chiều của chúng ta tới không gian vector ba chiều. Và nếu chúng ta theo dõi một từ trường đã cho thay đổi như thế nào theo thời gian, ta sẽ thu được một ánh xạ từ không-thời gian bốn chiều tới không gian vector ba chiều. (Điều này cũng giống như xem bản đồ thời tiết thay đổi thế nào theo thời gian trên ti vi.) Tương tự như vậy, mỗi điện trường cho trước, thay đổi theo thời gian, cũng có thể được mô tả như một ánh xạ từ không-

thời gian bốn chiều tới không gian vector ba chiều. Lý thuyết điện từ là một lý thuyết toán học mô tả hai ánh xạ này.

Trong lý thuyết điện từ cổ điển, các ánh xạ duy nhất mà chúng ta quan tâm là những ánh xạ tương ứng với các nghiệm của hệ phương trình Maxwell. Trái lại, trong lý thuyết lượng tử, chúng ta nghiên cứu *tất cả* các ánh xạ. Thực tế, bất kỳ tính toán nào trong lý thuyết trường lượng tử cũng bao gồm việc lấy tổng tất cả các ánh xạ khả dĩ, nhưng mỗi ánh xạ lại có một trọng số, tức là được nhân với một thừa số đã được quy định. Tất cả những thừa số này được xác định theo một cách sao cho tất cả những ánh xạ tương ứng với các nghiệm của các phương trình Maxwell sẽ có đóng góp trội hơn, nhưng các ánh xạ khác cũng có đóng góp.

Các ánh xạ từ không-thời gian vào các không gian vector khác nhau xuất hiện trong nhiều lý thuyết trường lượng tử (chẳng hạn như trong lý thuyết chuẩn không giao hoán). Tuy nhiên, không phải tất cả các lý thuyết trường lượng tử đều dựa trên các vector. Có một lớp các lý thuyết trường lượng tử, gọi là các *mô hình sigma*, trong đó chúng ta xét các ánh xạ từ không-thời gian tới một dạng hình học hay đa tạp cong. Đa tạp này gọi là đa tạp đích. Chẳng hạn, nó có thể là một mặt cầu. Mặc dù các mô hình sigma được nghiên cứu trước tiên trong trường hợp không-thời gian bốn chiều, nhưng một mô hình như vậy cũng sẽ có ý nghĩa nếu chúng ta coi không-thời gian là một đa tạp với số chiều bất kỳ. Do vậy, luôn có một mô hình sigma cho bất kỳ sự lựa chọn đa tạp đích nào hay đa tạp không-thời gian nào. Chẳng hạn, chúng ta có thể chọn một diện Riemann hai chiều cho không-thời gian của chúng ta, và nhóm Lie $SO(3)$ là đa tạp đích. Khi đó mô hình sigma tương ứng sẽ mô tả các ánh xạ từ diện Riemann này tới $SO(3)$.

Hình vẽ dưới đây mô tả một ánh xạ như vậy: ở vế trái chúng ta có một diện Riemann, ở vế phải ta có một đa tạp đích và mũi tên biểu diễn một ánh xạ giữa chúng; tức là có một quy tắc gán mỗi điểm trên đa tạp đích với mỗi điểm trên diện Riemann.



Trong mô hình sigma cổ điển, chúng ta xét các ánh xạ từ không-thời gian tới đa tạp đích là nghiệm của các phương trình chuyển động (tương tự các phương trình Maxwell của trường điện từ); những ánh xạ như vậy được gọi là ánh xạ điều hòa. Trong mô hình sigma lượng tử, tất cả các đại lượng được quan tâm, như các hàm tương quan, được tính toán bằng cách cộng tất cả các ánh xạ khả dĩ lại, với mỗi ánh xạ có một trọng số, tức là được nhân với một thừa số đã được quy định.

Hãy quay trở lại với câu hỏi của chúng ta: lý thuyết trường lượng tử hai chiều nào mô tả sự rút gọn số chiều của một lý thuyết chuẩn siêu đối xứng bốn chiều với nhóm chuẩn G trên $\Sigma \times X$ khi ta thu kích thước của X làm cho nó trở nên nhỏ? Hóa ra lý thuyết này lại là một mở rộng siêu đối xứng của mô hình sigma các ánh xạ từ Z tới một đa tạp đích cụ thể M , được xác định bởi diện Riemann X và nhóm chuẩn G của lý thuyết chuẩn ban đầu. Ký hiệu dành cho nó cần phản ánh được điều này, do vậy ta ký hiệu nó là $M(X, G)$.^[146]

Hóa ra cũng giống như trường hợp với lý thuyết nhóm trước đây (xem chương 2) khi các nhà vật lý vướng phải những đa tạp này, họ đều phát hiện ra rằng các nhà toán học đã đến trước họ. Thực tế, những đa tạp này được gọi là *không gian moduli Hitchin*, đặt theo tên nhà toán

học người Anh Nigel Hitchin, giáo sư của Đại học Oxford, người đã giới thiệu và nghiên cứu những không gian này vào khoảng giữa thập niên 1980. Mặc dù lý do để một nhà vật lý quan tâm tới những không gian này là khá rõ ràng - chúng xuất hiện khi chúng ta thực hiện phép rút gọn số chiều của một lý thuyết chuẩn bốn chiều - nhưng hiển nhiên có rất ít lý do để một nhà toán học quan tâm tới các không gian này.

Thật may mắn, Nigel Hitchin đã lý giải chi tiết về lịch sử khám phá của ông,^[147] và nó thực sự là một ví dụ tuyệt vời cho mối tương tác qua lại đầy tinh tế giữa toán học và vật lý. Vào cuối thập niên 1970, Hitchin, Drinfeld cùng hai nhà toán học khác là Micheal Atiyah và Yuri Manin, đã nghiên cứu các phương trình *instanton*, thứ các nhà vật lý cũng vấp phải khi nghiên cứu những lý thuyết chuẩn. Các phương trình này được xác định trong một không-thời gian bốn chiều phẳng. Hitchin sau đó đã nghiên cứu các phương trình vi phân trong không-thời gian ba chiều phẳng, gọi là các phương trình đơn cực, thu được bằng phép rút gọn số chiều của các phương trình *instanton*, từ bốn xuống ba chiều. Từ quan điểm vật lý thì những phương trình này rất thú vị, và chúng hóa ra lại có một cấu trúc toán học rất hấp dẫn.

Do vậy sẽ là hoàn toàn tự nhiên khi ta xem xét các phương trình vi phân thu được nhờ rút gọn những phương trình *instanton* từ bốn xuống còn hai chiều. Tiếc thay, các nhà vật lý nhận thấy rằng những phương trình này lại không hề có nghiệm không tầm thường trong không gian hai chiều phẳng (tức là trên mặt phẳng), do vậy họ không theo đuổi chúng xa hơn nữa. Tuy nhiên, cái nhìn sâu sắc của Hitchin là ở chỗ các phương trình này có thể được viết trên bất kỳ diện Riemann *cong* nào, chẳng hạn như là bề mặt của một chiếc bánh donut. Các nhà vật lý đã không tính đến điều này, bởi vì ở thời điểm đó (tức vào đầu những năm 1980) họ không đặc biệt hứng thú với các lý thuyết trường lượng tử trên những mặt cong như vậy. Nhưng Hitchin thấy rằng, về mặt toán học các nghiệm trên những mặt này lại rất phong phú. Ông đưa vào không gian moduli $M(X, G)$ như là không gian nghiệm của những phương trình này trên một diện Riemann X (trong trường hợp nhóm

chuẩn G)⁽²⁾. Ông thấy rằng nó là một đa tạp đáng chú ý; cụ thể là nó sở hữu một “metric siêu Kahler”, một metric mà vào lúc đó người ta biết rất ít ví dụ về nó. Và những nhà toán học khác đã tiếp bước ông.

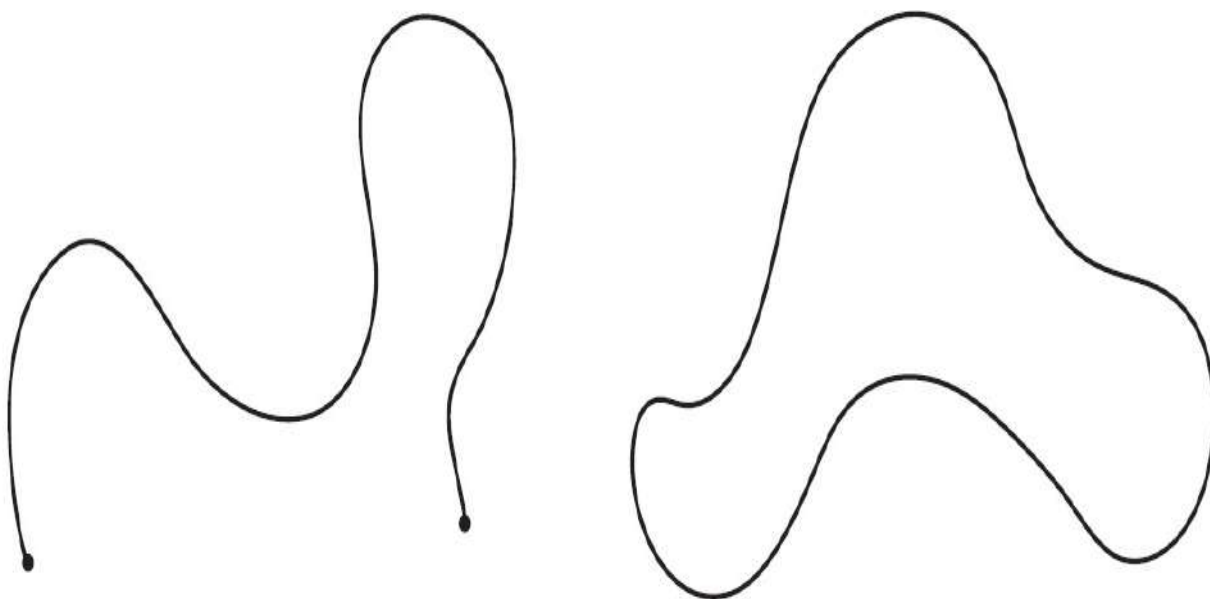
Khoảng mười năm sau, các nhà vật lý bắt đầu hiểu được tầm quan trọng của những đa tạp này trong vật lý lượng tử, nhưng mối quan tâm đó không thực sự phổ biến cho tới khi xuất hiện công trình của Witten và cộng sự mà tôi vừa mô tả. (Cũng thật thú vị khi ta nhận thấy các không gian moduli Hitchin, ban đầu xuất hiện trong cột bên phải trên phiến đá Rosetta của André Weil, gần đây lại được ứng dụng vào Chương trình Langlands ở cột giữa, trong đó đóng vai trò của các diện Riemann là những đường cong trên các trường hữu hạn^[148]).

Sự tương tác giữa toán học và vật lý là một quá trình hai chiều, trong đó mỗi một lĩnh vực lại lấy ý tưởng và truyền cảm hứng cho lĩnh vực kia. Ở những thời điểm khác nhau, một trong hai lĩnh vực đó có thể dẫn đầu trong việc phát triển một ý tưởng cụ thể và chỉ nhường chỗ cho lĩnh vực kia khi tiêu điểm đã thay đổi. Nhưng xét tổng thể thì hai lĩnh vực này tương tác theo một vòng tròn ảnh hưởng qua lại tuần hoàn.

Bây giờ, sau khi đã được trang bị những nhận thức sâu sắc từ cả các nhà toán học lẫn vật lý, ta hãy thử áp dụng đối ngẫu điện từ vào lý thuyết chuẩn bốn chiều với nhóm chuẩn G . Chúng ta sẽ thu được lý thuyết chuẩn với nhóm chuẩn ${}^L G$, tức nhóm đối ngẫu Langlands của G . (Tôi xin nhắc lại rằng nếu chúng ta áp dụng đối ngẫu này hai lần, chúng ta sẽ thu lại được chính nhóm G . Nói cách khác, nhóm đối ngẫu Langlands của ${}^L G$ chính là G .) Mô hình sigma hiệu dụng hai chiều trên Σ , gắn với G và ${}^L G$, khi đó sẽ là tương đương, hoặc đối ngẫu với nhau. Đối với mô hình sigma, đối ngẫu loại này được gọi là *đối xứng gương*. Trong một mô hình sigma, ta xét các ánh xạ từ Σ tới không gian moduli Hitchin $M(X, G)$ tương ứng với G ; trong mô hình sigma khác chúng ta xét các ánh xạ từ Σ tới không gian moduli Hitchin $M(X, {}^L G)$ tương ứng với ${}^L G$. Xét về mặt tiên nghiệm, hai không gian moduli Hitchin này và

các mô hình sigma của chúng, không có gì liên quan đến nhau cả, do vậy, đối xứng gương giữa chúng cũng đáng ngạc nhiên như là đối ngẫu điện từ giữa các lý thuyết chuẩn bốn chiều ban đầu vậy.

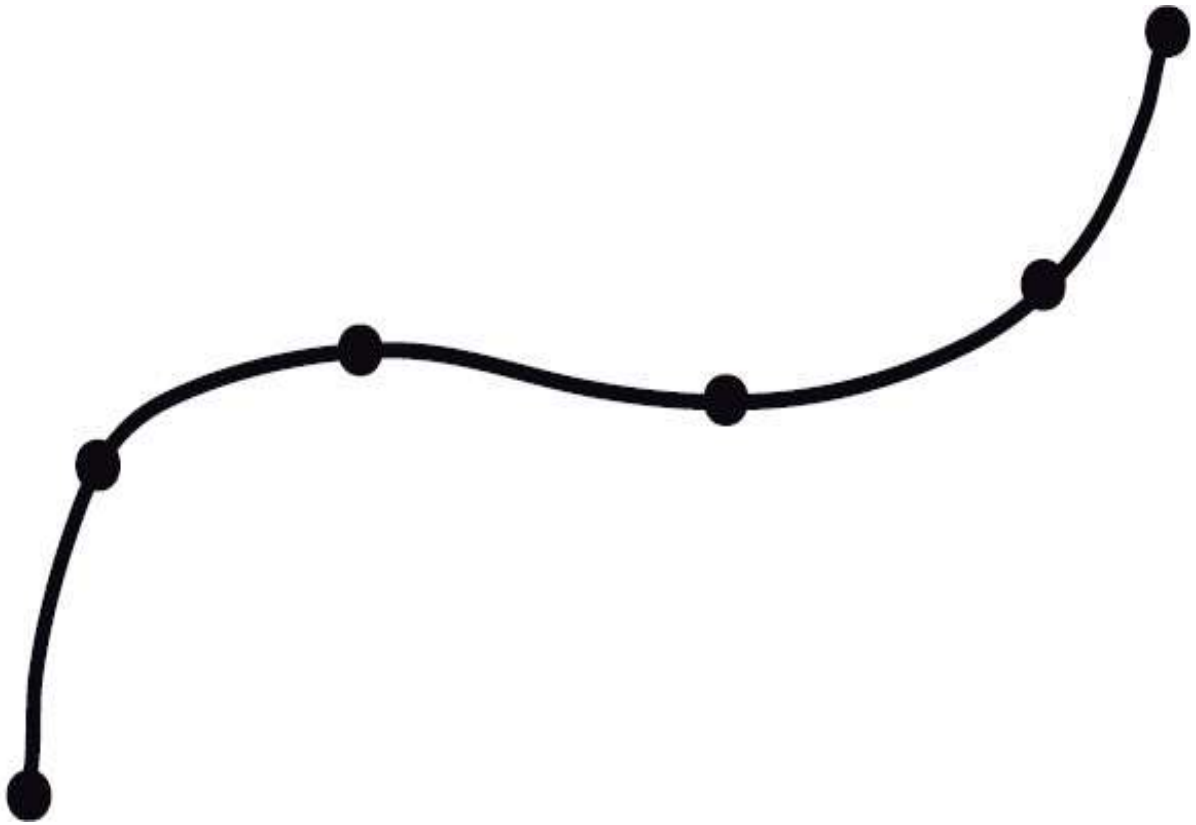
Mối quan tâm của các nhà vật lý đối với những mô hình sigma hai chiều kiểu này được thúc đẩy một phần bởi vai trò quan trọng của chúng trong lý thuyết dây. Như tôi đã nhắc đến trong chương 10, lý thuyết dây thừa nhận tiên đề nói rằng các viên gạch cơ bản của tự nhiên không phải là các hạt điểm (tức là không có hình học nội tại và do vậy có số chiều bằng 0), mà là các đối tượng quảng tính một chiều gọi là dây, có thể hở (mở) hoặc đóng (khép kín). Dây hở thì có hai đầu mút còn dây đóng thì như một vòng nhỏ, rất giống với các vòng mà ta đã gặp trong chương 10.



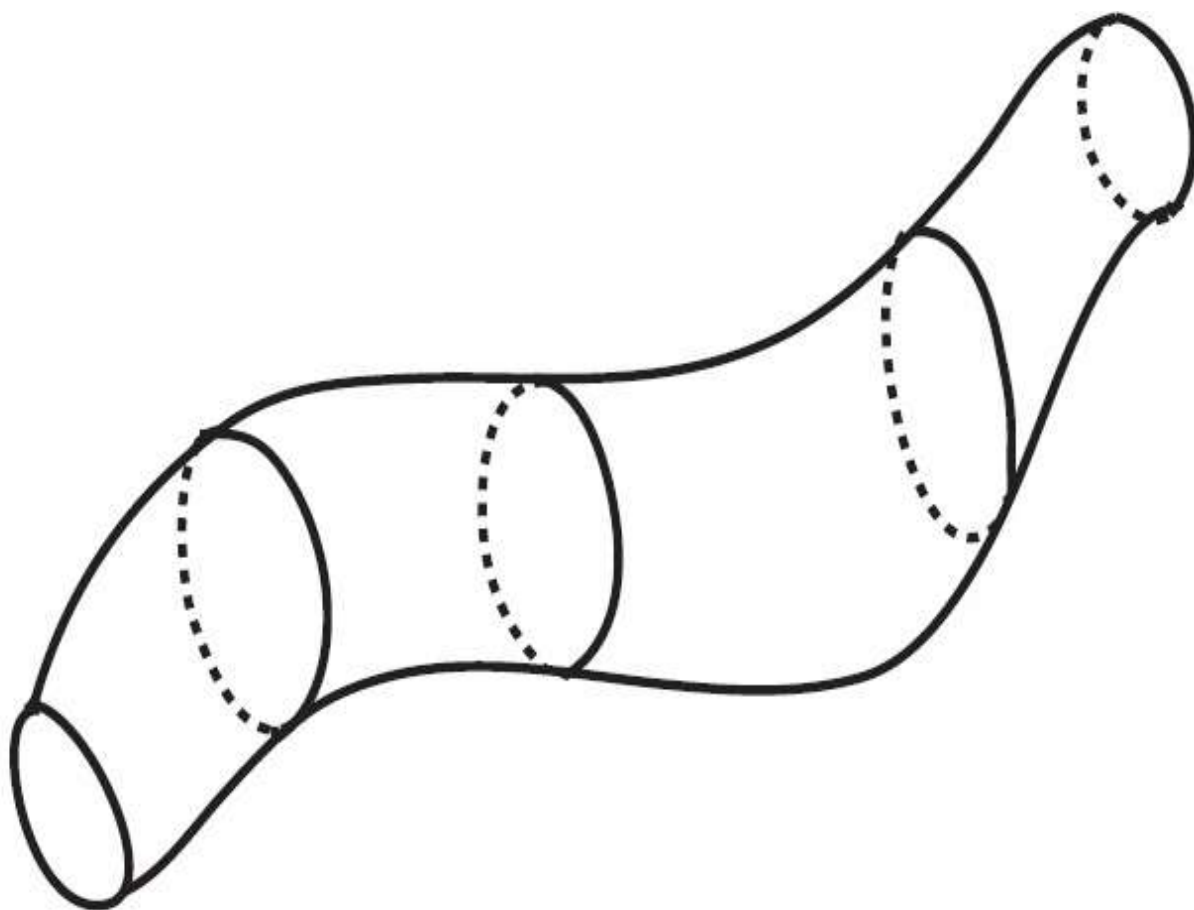
Ý tưởng của lý thuyết dây là ở chỗ: dao động của các sợi dây cực kỳ bé nhỏ này khi chuyển động trong không gian sẽ tạo thành các hạt cơ bản và lực giữa chúng.

Các mô hình sigma bước vào lý thuyết dây ngay khi chúng ta bắt đầu xem xét các dây chuyển động thế nào. Trong vật lý cơ bản, khi một hạt điểm di chuyển trong không gian, quỹ đạo của nó là một đường một

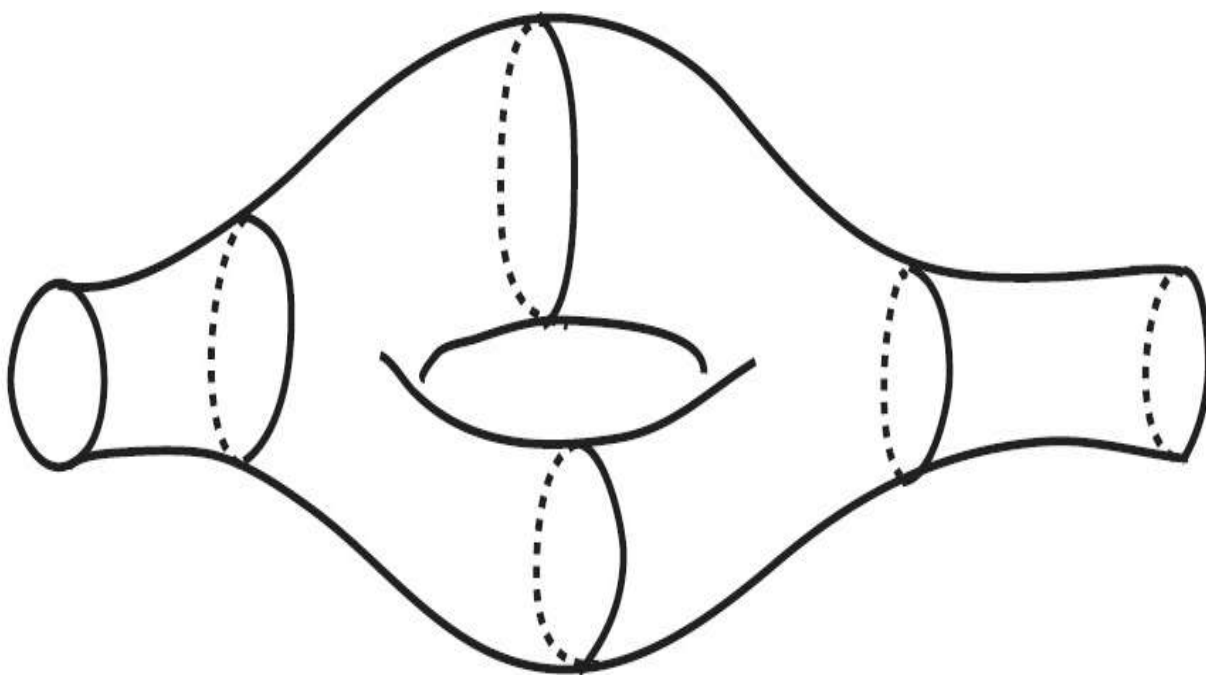
chiều. Vị trí của hạt ở các thời điểm khác nhau được biểu diễn bằng các điểm trên đường này.



Tuy nhiên, nếu một dây đóng chuyển động, thì chuyển động của nó sẽ quét thành một mặt hai chiều. Bây giờ vị trí của dây ở mỗi thời điểm cụ thể là một vòng trên mặt này.



Các dây cũng có thể tương tác với nhau: một dây có thể “tách” thành hai hoặc nhiều hơn, và các phần được tách ra này cũng có thể hợp lại với nhau, như được chỉ ra ở hình dưới đây. Điều này cho chúng ta một diện Riemann tổng quát hơn với số “lỗ” bất kỳ (và với những đường tròn biên). Nó được gọi là mặt vũ trụ của dây đó (tương tự như đường vũ trụ của hạt điểm - ND).



Một quỹ đạo như vậy có thể được biểu diễn bởi một diện Riemann Σ nhúng trong không-thời gian S và do vậy cũng được biểu diễn bởi một ánh xạ từ Σ tới S . Đó chính xác là loại ánh xạ xuất hiện trong mô hình sigma trên Σ với đa tạp đích là S . Tuy nhiên, bây giờ mọi thứ bị đảo lộn: không-thời gian S bây giờ là đa tạp đích của mô hình sigma này - tức là tập đích của các ánh xạ - chứ không phải tập nguồn của chúng, ngược với các lý thuyết trường lượng tử thông thường, như lý thuyết điện từ, chẳng hạn.

Ý tưởng của thuyết dây là bằng cách thực hiện các tính toán trên những mô hình sigma này và cộng tất cả các kết quả theo những diện Riemann Σ khả dĩ (tức là theo tất cả những đường truyền khả dĩ của các dây trong một không-thời gian cố định S)^[149] chúng ta có thể tái tạo lại vật lý mà chúng ta quan sát được trong không-thời gian S .

Thật không may, lý thuyết thu được lại vấp phải một số vấn đề nghiêm trọng (đặc biệt, nó cho phép sự tồn tại của các “tachyon”, tức các hạt cơ bản chuyển động nhanh hơn ánh sáng, vốn không được thuyết tương đối của Einstein thừa nhận là có tồn tại). Tình thế được cải thiện hơn hẳn nếu chúng ta xét một mở rộng siêu đối xứng của lý

thuyết dây. Khi đó, chúng ta thu được *lý thuyết siêu dây*. Nhưng một lần nữa, lại nảy sinh vấn đề: hóa ra lý thuyết siêu dây chỉ nhất quán về mặt toán học nếu không-thời gian Σ của chúng ta có mười chiều, điều thật kỳ quặc với thế giới mà chúng ta quan sát được là chỉ có bốn chiều (ba chiều không gian và một chiều thời gian).

Tuy nhiên, có thể thế giới của chúng ta thực sự là một tích, theo nghĩa đã giải thích ở trên, của không-thời gian bốn chiều quan sát được và một đa tạp sáu chiều M rất nhỏ, nhỏ tới mức không thể nhìn thấy được qua những công cụ hiện có. Nếu vậy, chúng ta sẽ rơi vào một tình thế tương tự với sự rút gọn số chiều (từ bốn xuống hai) như đã thảo luận ở trên: lý thuyết mười chiều sẽ làm nảy sinh một lý thuyết bốn chiều hiệu dụng. Hy vọng rằng lý thuyết hiệu dụng này sẽ mô tả được vũ trụ của chúng ta, và đặc biệt hơn, nó bao gồm được cả Mô hình chuẩn cũng như lý thuyết hấp dẫn lượng tử. Hứa hẹn về sự thống nhất tiềm tàng của tất cả các lực đã biết trong tự nhiên là nguyên nhân chính để lý thuyết siêu dây được nghiên cứu rộng rãi đến thế trong những năm gần đây.^[150]

Nhưng chúng ta có một trở ngại nhỏ: M là đa tạp sáu chiều nào?

Để đánh giá vấn đề này đã gây nản lòng đến thế nào, và để làm căn cứ thảo luận, ta hãy giả sử rằng lý thuyết siêu dây nhất quán về mặt toán học chỉ với sáu thay vì mười chiều. Khi đó sẽ có hai chiều dư, và chúng ta sẽ phải tìm một đa tạp hai chiều M . Trong trường hợp này, sẽ không có nhiều lựa chọn: M phải là một diện Riemann, mà như ta biết, được đặc trưng bởi giống của nó, tức là số các “lỗ”. Hơn nữa, hóa ra để lý thuyết này vận hành được, đa tạp M phải thỏa mãn thêm vài tính chất; chẳng hạn như nó phải là đa tạp Calabi-Yau, tên gọi này là để vinh danh hai nhà toán học, Eugenio Calabi và Shing-Tung Yau, những người đầu tiên nghiên cứu các không gian như vậy về mặt toán học (nhiều năm trước khi các nhà vật lý quan tâm tới chủ đề này, tôi cũng phải nói thêm như vậy).^[151] Diện Riemann duy nhất có tính chất như thế là hình xuyến. Do vậy, nếu M có hai chiều, ta có thể xác định được nó -

nó phải là một mặt hình xuyên.^[152] Tuy nhiên, khi số chiều của M tăng lên, thì số khả năng khả dĩ cũng tăng lên theo. Nếu M có sáu chiều, thì theo một số đánh giá, có tới 10^{500} lựa chọn - một con số lớn không thể tưởng tượng nổi. Cái nào trong số những đa tạp sáu chiều này được thực hiện trong vũ trụ của chúng ta và làm thế nào để kiểm chứng được điều này bằng thực nghiệm? Đây là một trong những câu hỏi cốt lõi của lý thuyết dây vẫn chưa có câu trả lời.^[153]

Trong mọi trường hợp, từ thảo luận này ta nhận thấy rõ rằng các mô hình sigma đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết siêu dây, và thực tế đối xứng gương của các mô hình ấy có thể truy nguyên đến một đối ngẫu trong lý thuyết siêu dây.^[154] Các mô hình sigma cũng có nhiều ứng dụng ngoài lý thuyết dây. Các nhà vật lý đã nghiên cứu tất cả chúng cực kỳ chi tiết, ngoài mô hình sigma chứa đa tạp đích M sáu chiều.^[155]

Vậy nên, khi Witten phát biểu tại hội thảo của chúng tôi năm 2004, ban đầu ông áp dụng kỹ thuật rút gọn số chiều (từ bốn xuống còn hai), để rút gọn đối ngẫu điện từ của hai lý thuyết chuẩn (với các nhóm chuẩn là G và ${}^L G$) về đối xứng gương của hai mô hình sigma (với đích là các không gian moduli Hitchin gắn với hai nhóm đối ngẫu Langlands G và ${}^L G$). Sau đó, ông đặt câu hỏi: liệu chúng ta có thể kết nối đối xứng gương này với chương trình Langlands hay không?

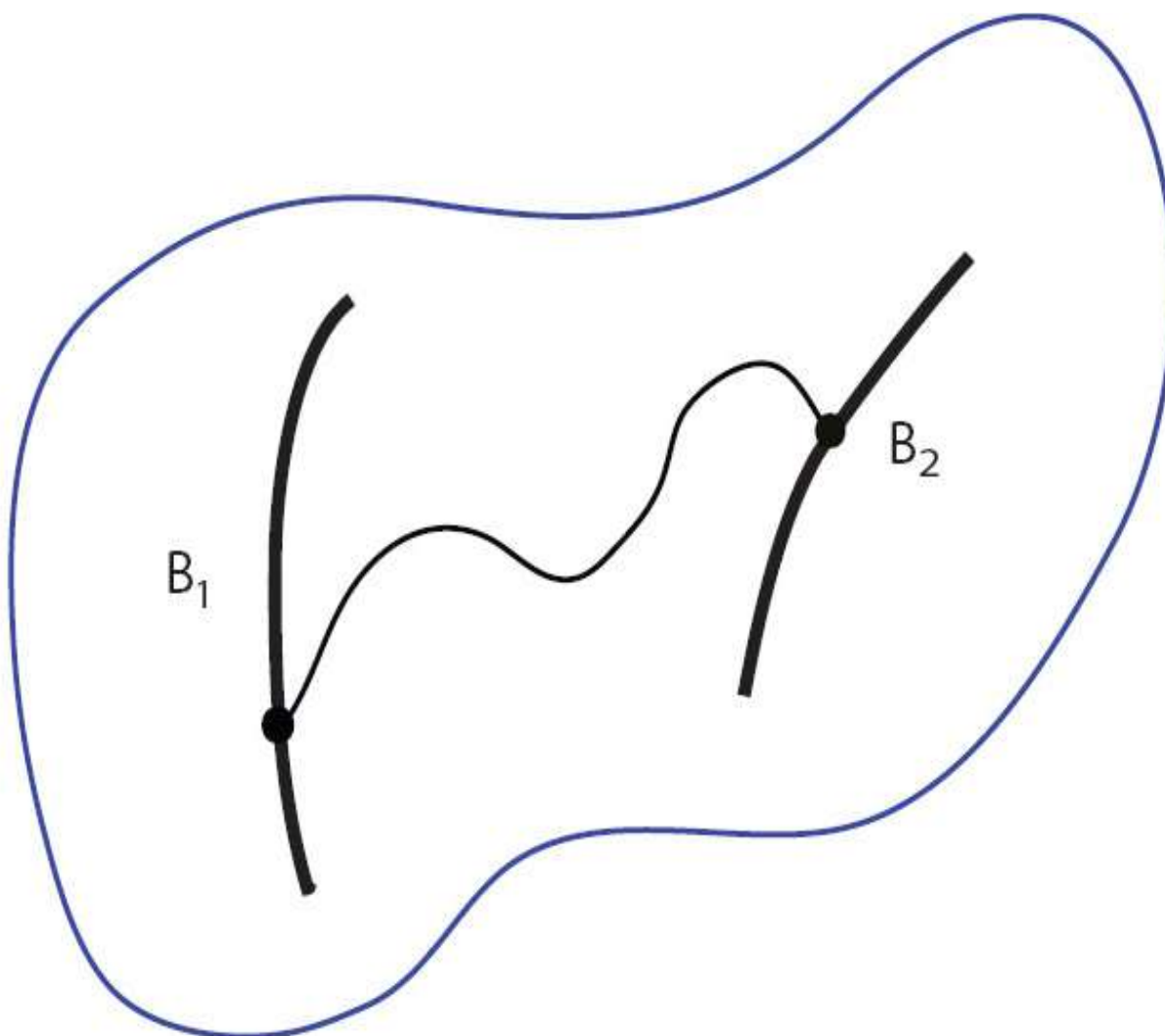
Câu trả lời mà ông đề nghị rất quyến rũ. Thường thì, trong các lý thuyết trường lượng tử, chúng ta nghiên cứu các hàm tương quan mô tả tương tác giữa các hạt; chẳng hạn, một hàm như thế có thể được sử dụng để mô tả xác suất một hạt nào đó xuất hiện từ va chạm của hai hạt khác. Nhưng hóa ra hình thức luận của lý thuyết trường lượng tử lại linh hoạt hơn rất nhiều: ngoài các hàm này ra còn có nhiều đối tượng khác tinh tế hơn hiện diện trong lý thuyết, chúng tương tự như “các bó” mà chúng ta đã thảo luận ở chương 14 trong mối liên hệ với từ điển

Grothendieck. Những đối tượng này có tên là “D-màng” hay đơn giản là “màng”.

Các màng - *brane* - có nguồn gốc từ lý thuyết siêu dây và tên gọi của nó rút gọn từ “*membrane*”, tiếng Anh có nghĩa màng. Những màng này nảy sinh một cách tự nhiên khi chúng ta xét chuyển động của các dây mở trong một đa tạp đích M . Cách đơn giản nhất để mô tả vị trí hai đầu mút của một dây mở là quy định một đầu của dây phải thuộc một tập con cụ thể (B_1) của M và đầu còn lại thuộc vào một tập con khác (B_2). Điều này được minh họa trên hình dưới đây, trong đó đường cong mảnh biểu diễn dây mở với hai đầu mút, một nằm trong B_1 và một nằm trong B_2 .

Theo cách này, các tập con (hay chính xác hơn, là các đa tạp con) B_1 và B_2 trở thành hai đối tượng chính trong lý thuyết siêu dây, và trong mô hình sigma tương ứng. Những tập con này là nguyên mẫu của các màng tổng quát xuất hiện trong các lý thuyết trên.^[156]

Đối xứng gương giữa hai mô hình sigma làm nảy sinh một mối liên hệ giữa các màng trong hai mô hình sigma này. Sự tồn tại của mối liên hệ đó đã được nhà toán học Maxim Kontsevich đề xuất vào giữa thập niên 1990 dưới tên gọi “đối xứng gương đồng điều”. Nó đã được nghiên cứu rộng rãi bởi cả các nhà vật lý và các nhà toán học, đặc biệt là trong thập niên trước.



Ý tưởng chính trong báo cáo của Witten tại Princeton là đối xứng gương đồng điều này phải tương đương với quan hệ Langlands.

Lúc này, điều quan trọng cần lưu ý là những mô hình sigma xuất hiện dưới hai dạng, gọi là “A-mô hình” và “B-mô hình”. Hai loại mô hình sigma mà chúng ta đang xem xét thực ra lại khác nhau: nếu mô hình với đa tạp đích là không gian moduli Hitchin $M(X, G)$ thì nó là loại A, còn mô hình với đa tạp đích là không gian moduli Hitchin $M(X, {}^L G)$ thuộc loại B. Tương ứng như vậy, các màng trong hai lý thuyết lần lượt được gọi là “A-màng” và “B-màng”. Dưới tác động của đối xứng gương, với mỗi A-màng trên $M(X, G)$ sẽ có một B-màng trên $M(X, {}^L G)$ và ngược lại. ^[157]

Để thiết lập mối quan hệ Langlands hình học, chúng ta cần gán một bó tự đẳng cấu với mỗi biểu diễn của nhóm cơ bản của X trong ${}^L G$. Dưới đây là phác thảo sơ lược đề xuất của Witten để xây dựng mối quan hệ đó bằng cách sử dụng đối xứng gương:

Một biểu diễn của nhóm cơ bản của X trong ${}^L G$

→ Một B-màng trên $M(X, {}^L G)$

→ Đối xứng gương

→ Một A-màng trên $M(X, G)$

→ Một bó tự đẳng cấu trên không gian moduli của các G -phân thớ trên X

Mặc dù vẫn còn nhiều chi tiết phải sửa đổi cho trơn tru, báo cáo của Witten vẫn là một bước đột phá; nó chỉ ra một con đường rõ ràng để thiết lập mối liên kết giữa đối ngẫu điện từ và Chương trình Langlands. Một mặt, nó mang tới địa hạt của toán học hiện đại một loạt những ý tưởng mới mà các nhà toán học chưa nghĩ đến (rõ ràng là không liên quan với Chương trình Langlands hình học) như: phạm trù các màng, vai trò đặc biệt của không gian moduli Hitchin trong Chương trình Langlands, và mối liên kết giữa A-màng và các bó tự đẳng cấu. Mặt khác, mối liên kết này cũng cho phép các nhà vật lý sử dụng kiến thức và các ý tưởng toán học để có hiểu biết tiến bộ về vật lý lượng tử.

Trong hai năm kế tiếp, Witten, cộng tác với Anton Kapustin, một nhà vật lý gốc Nga làm việc ở Caltech, đã công bố những chi tiết trong đề xuất của ông. Bài báo của họ^[158] về chủ đề này (dài 230 trang) xuất hiện vào tháng 4 năm 2006 trở thành tin giật gân cả trong cộng đồng toán học lẫn vật lý. Đoạn mở đầu bài báo nhắc đến rất nhiều khái niệm mà ta đã thảo luận trong cuốn sách này.

Chương trình Langlands cho các trường số thống nhất rất nhiều kết quả cổ điển và đương thời trong lý thuyết số đồng thời cũng là một địa hạt nghiên cứu rộng lớn. Nó có một tương tự đối với các đường cong trên trường hữu hạn, đó cũng là chủ đề cho rất nhiều công trình nổi tiếng. Ngoài ra, phiên bản hình học của chương trình Langlands cho các đường cong cũng được phát triển rất mạnh, cả cho đường cong trên một trường đặc số p và các diện Riemann phức thông thường... Mỗi quan tâm chính của chúng tôi trong bài báo này là về chương trình Langlands hình học cho các diện Riemann phức. Mục đích của chúng tôi là chỉ ra xem chương trình này có thể được hiểu như một chương trong lý thuyết trường lượng tử như thế nào. Không đòi hỏi bạn cần phải quen thuộc với Chương trình Langlands hình học; thay vào đó chúng tôi giả định rằng bạn có hiểu biết về các chủ đề như các lý thuyết chuẩn siêu đối xứng, đối ngẫu điện-từ, những mô hình sigma, đối xứng gương, màng và lý thuyết trường topo. Chủ đề của bài báo này nhằm chỉ ra rằng khi những thành phần vật lý quen thuộc kia được áp dụng vào đúng vấn đề, Chương trình Langlands hình học sẽ nảy sinh một cách tự nhiên.

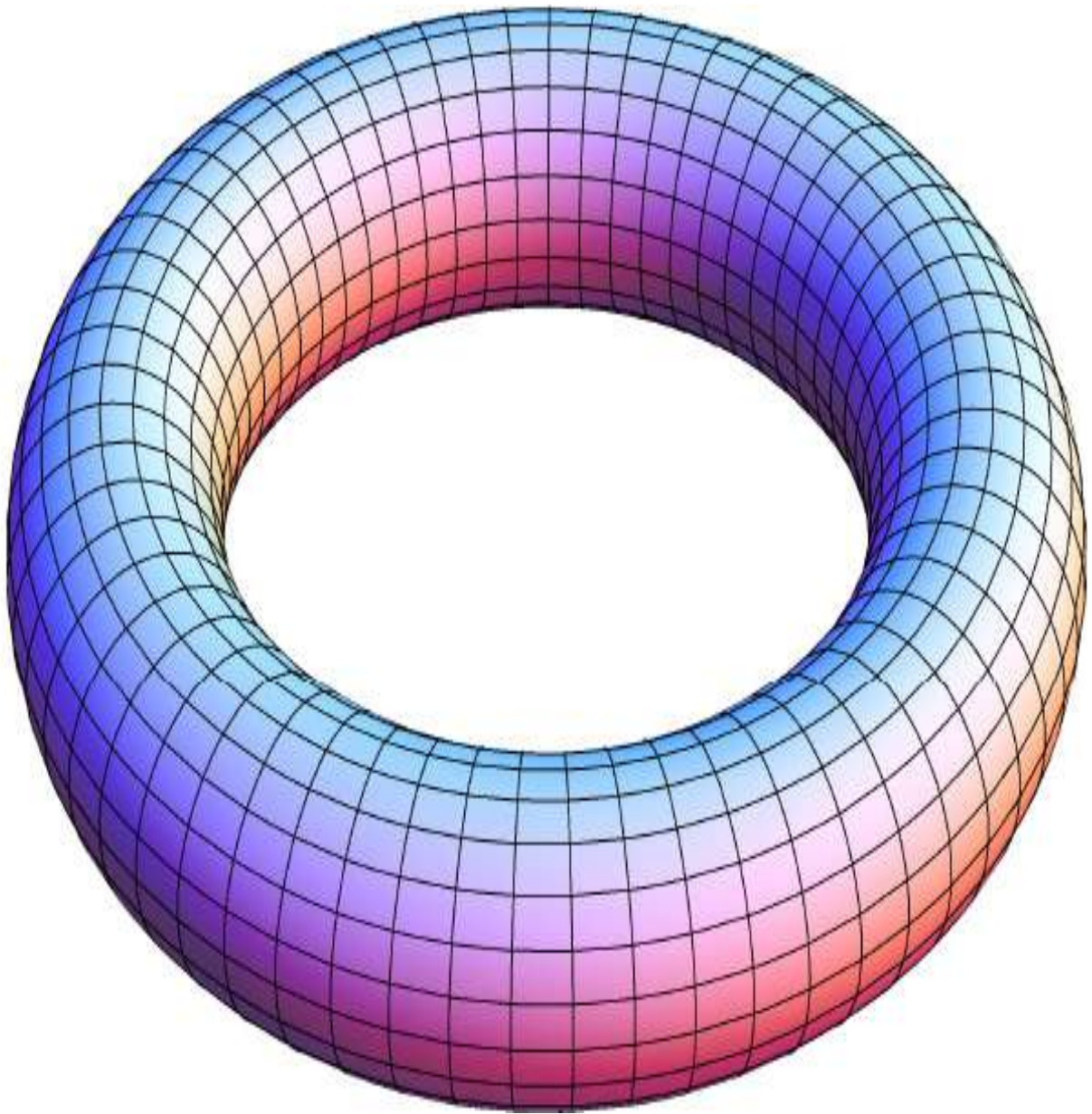
Sau đó, trong phần nhập môn, Kapustin và Witten đã ghi nhận cuộc hội thảo của chúng tôi ở viện Nghiên cứu cao cấp (cụ thể là bài báo cáo của David Ben-Zvi, học trò cũ của tôi) là điểm khởi đầu cho nghiên cứu của họ.

Trong phần chính của bài báo, Kapustin và Witten đã phát triển xa hơn những ý tưởng mà Witten từng phát biểu trong buổi hội thảo ở Princeton của chúng tôi. Đặc biệt, họ đã làm sáng tỏ cấu trúc của các A-màng và B-màng nảy sinh trong bức tranh đó, đối xứng gương giữa chúng và mối liên kết giữa những A-màng với các bó tự đẳng cấu.

Để giải thích kết quả của họ, chúng ta hãy bắt đầu với một ví dụ đơn giản hơn của đối xứng gương. Trong công trình của Kapustin và Witten, đối xứng gương là đối xứng giữa hai không gian moduli Hitchin và các mô hình sigma tương ứng. Nhưng bây giờ chúng ta hãy thay thế một trong những không gian moduli đó bằng một mặt xuyên hai chiều.

Một mặt xuyên như vậy có thể được coi là tích của hai đường tròn. Thật vậy, mạng lưới ở bức tranh dưới đây đã giải thích rõ ràng tại sao

xuyến lại trông như một chuỗi hạt cườm.



Đóng vai trò các hạt cườm là các vòng tròn thẳng đứng trong lưới, còn vai trò của sợi dây xuyên sâu các hạt cườm là đường tròn nằm ngang, mà ta có thể tưởng tượng nó đi qua giữa hình xuyến. Một nhà toán học sẽ nói rằng một chuỗi hạt là một “sự phân thớ”, mà các “thớ” là các hạt cườm còn “nền” là sợi dây xuyên chuỗi. Vì lẽ ấy, một xuyến là

một sự phân thớ, mà thớ là các đường tròn, còn nền cũng là một đường tròn.

Ta gọi bán kính của đường tròn nền (sợi dây xâu chuỗi) là R_1 và bán kính của đường tròn thớ (hạt cườm) là R_2 . Hóa ra đa tạp đối ngẫu gương cũng sẽ là một hình xuyên. Nhưng nó là tích của hai đường tròn với bán kính lần lượt là $1/R_1$ và R_2 . Sự nghịch đảo này của bán kính cũng tương tự với sự nghịch đảo của điện tích electron xảy ra dưới tác động của đối ngẫu điện từ.

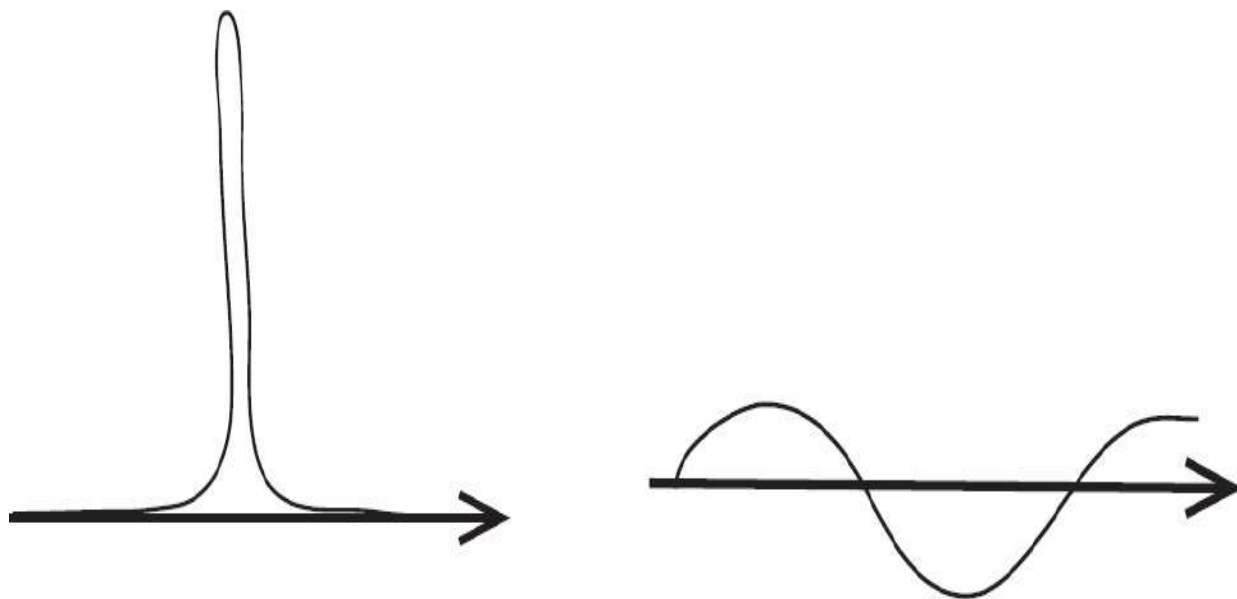
Như vậy bây giờ chúng ta có hai xuyên đối ngẫu gương với nhau - một cái gọi là T , với các bán kính R_2 và R_1 , còn cái kia gọi là $T^\vee$, với các bán kính là $1/R_1$ và R_2 . Chú ý rằng nếu bán kính của đường tròn nền trong T là lớn (tức là R_1 là lớn) thì bán kính đường tròn nền của $T^\vee$ là nhỏ (bởi vì $1/R_2$ nhỏ), và ngược lại. Kiểu hoán đổi giữa “lớn” và “nhỏ” này là một điển hình của tất cả các đối ngẫu trong vật lý lượng tử.

Hãy cùng nghiên cứu các B-màng trên T và A-màng trên $T^\vee$. Chúng được ghép cặp qua đối xứng gương, và quan hệ này đã được hiểu rõ (đôi khi nó được nhắc đến dưới cái tên “T-đối ngẫu”, T là viết tắt cho torus - xuyên).^[159]

B-màng trên xuyên $T \leftrightarrow$ A-màng trên xuyên $T^\vee$

Một ví dụ điển hình về một B-màng trên xuyên T là 0-màng, được tập trung ở một điểm p thuộc T . Hóa ra A-màng đối ngẫu trên $T^\vee$, trái lại, lại “lan nhòe” trên khắp xuyên $T^\vee$. Cần phải giải thích thêm chúng ta có ý gì khi nói là “lan nhòe”. Tôi không đi quá sâu vào chi tiết, vì điều đó sẽ dẫn chúng ta đi quá xa, chỉ cần nói rằng A-màng này trên $T^\vee$ chính là xuyên $T^\vee$ được trang bị thêm một cấu trúc: một biểu diễn của nhóm cơ bản của xuyên trong nhóm đường tròn (tương tự với những biểu diễn mà ta đã thảo luận trong chương 15). Biểu diễn này được xác định bởi vị trí của điểm p ban đầu trên xuyên T , sao cho, thực tế có một tương ứng 1-1 giữa 0-màng trên T và các A-màng “lan nhòe” trên $T^\vee$.

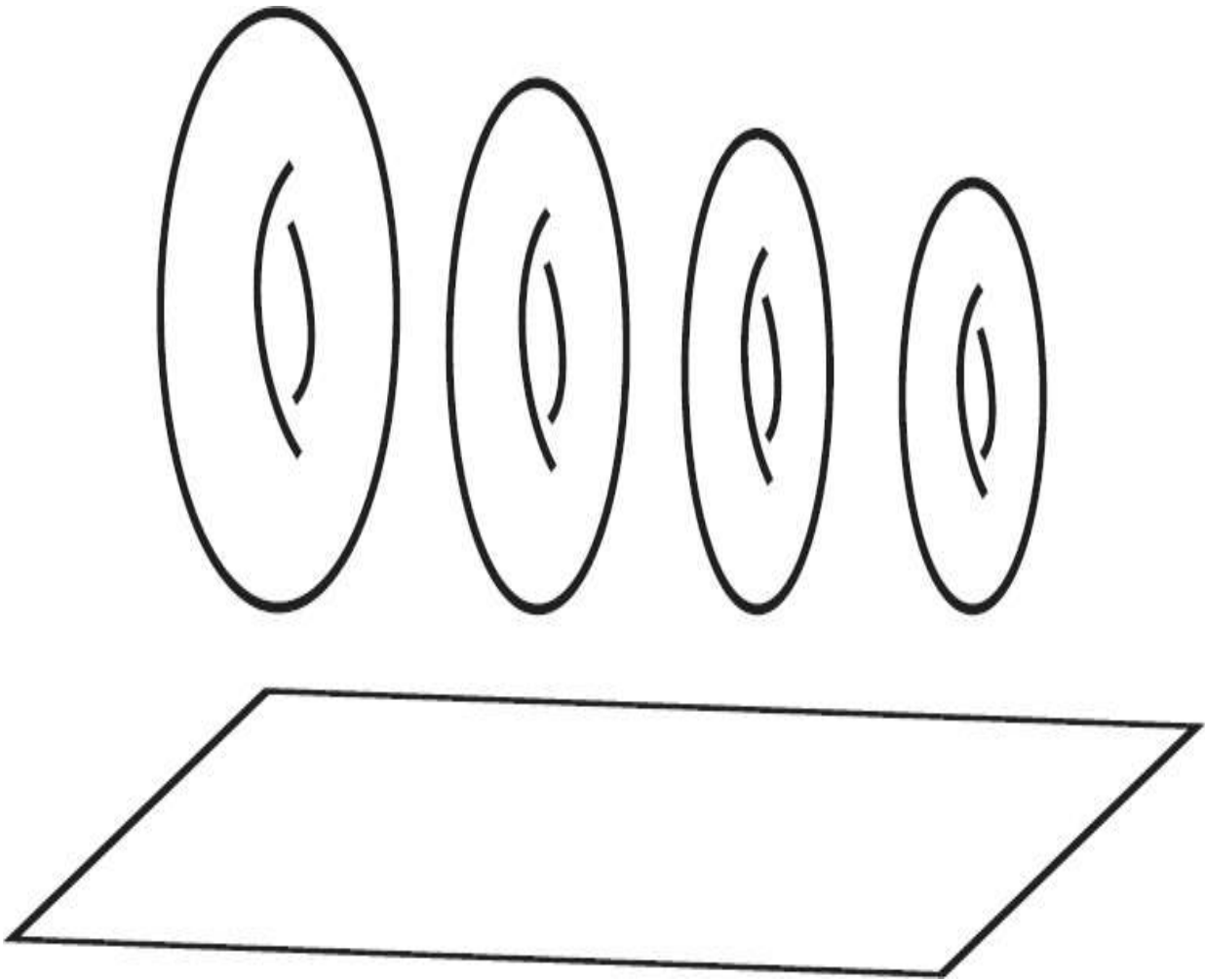
Hiện tượng này tương tự với những gì xảy ra trong phép biến đổi Fourier được sử dụng rộng rãi trong xử lý tín hiệu. Nếu chúng ta áp dụng phép biến đổi Fourier cho một tín hiệu tập trung gần một thời điểm cụ thể theo thời gian, ta sẽ thu được một tín hiệu trông giống như sóng. Tín hiệu ấy “bị nhòe ra” trên trục biểu diễn thời gian, như được chỉ ra ở hình dưới đây.



Phép biến đổi Fourier cũng có thể được áp dụng cho rất nhiều kiểu tín hiệu khác, và có cả phép biến đổi ngược, cho phép chúng ta tái tạo lại tín hiệu ban đầu. Thường thì, các tín hiệu phức tạp được biến đổi thành những tín hiệu đơn giản, và điều đó giải thích tại sao phép biến đổi Fourier lại có các ứng dụng rất hữu ích. Tương tự như vậy, qua phép đối xứng gương, các màng phức tạp trên một xuyên tương ứng với các màng đơn giản trên xuyên khác, và ngược lại.

Hóa ra chúng ta có thể sử dụng đối xứng gương kiểu xuyên này để mô tả đối xứng gương giữa các màng trên hai không gian moduli Hitchin. Ở đây, chúng ta phải sử dụng một tính chất quan trọng của các không gian moduli Hitchin này, do chính Hitchin đã mô tả. Đại ý, không gian moduli Hitchin là một phân thớ. Nền của phân thớ này là một không gian vector, còn thớ là các xuyên. Tức là, toàn bộ không

gian là một tập hợp các xuyên, mỗi xuyên cho một điểm của không gian nền. Trong trường hợp đơn giản nhất, cả nền và các thớ xuyên đều là hai chiều, và sự phân thớ trông giống như hình dưới đây (chú ý rằng các thớ ở những điểm khác nhau có thể có kích thước khác nhau):



Hãy nghĩ về phân thớ Hitchin như một hộp bánh donut, ngoại trừ việc có những chiếc bánh không chỉ gắn vào lưới các điểm ở đáy hộp các tông, mà là gắn với *tất cả* các điểm trên nền. Do vậy ta sẽ có vô hạn chiếc bánh - Homer Simpson chắc chắn là sẽ thích điều này!

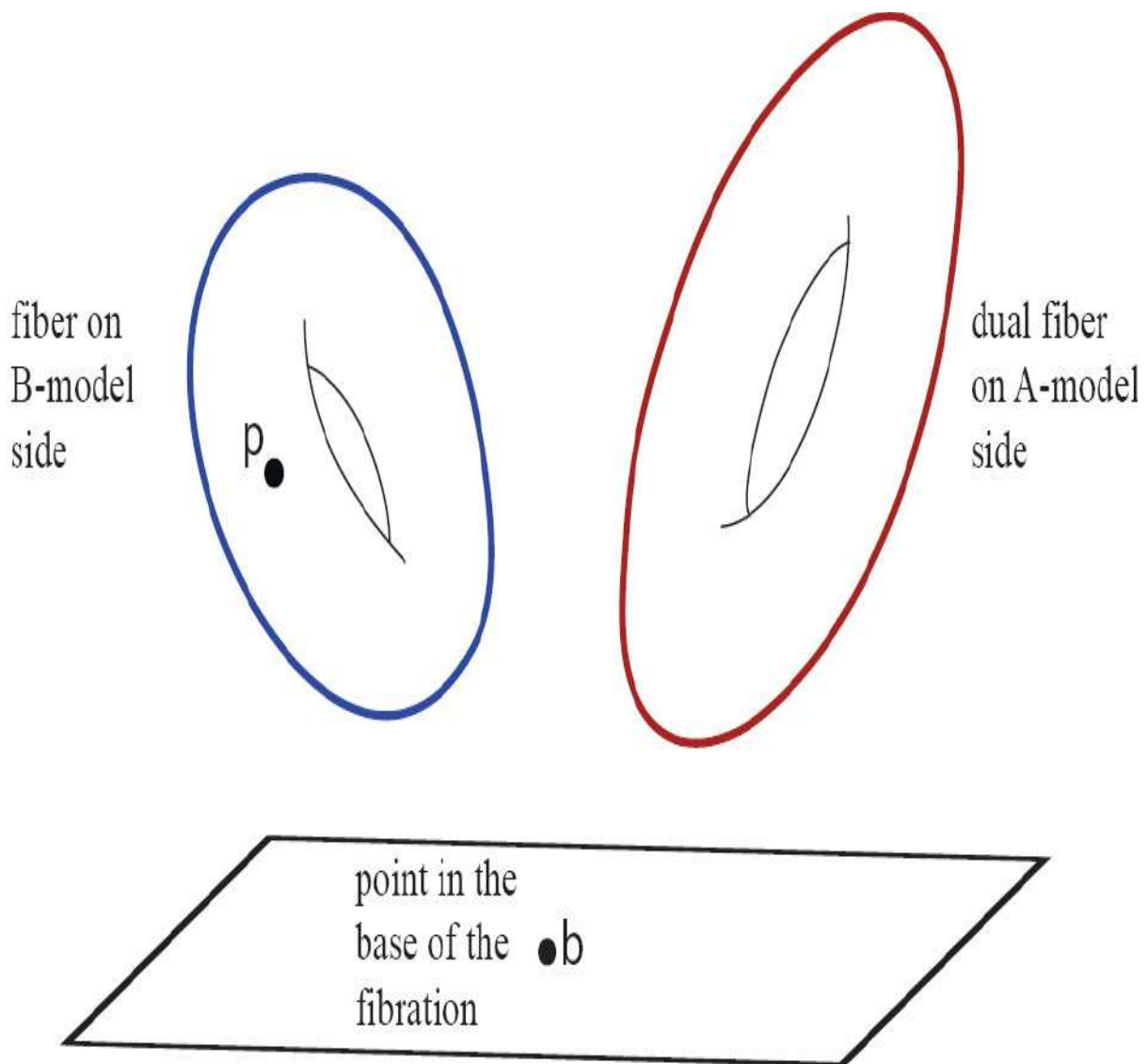
Hóa ra đối ngẫu gương của không gian moduli Hitchin gắn với nhóm đối ngẫu Langlands, cũng là một phân thớ kiểu donut hay xuyên trên cùng một nền. Điều đó có nghĩa là với mỗi điểm trong nền này,

chúng ta có hai thớ kiểu xuyên: một trong không gian moduli Hitchin về phía A-mô hình và một trong không gian moduli Hitchin về phía B-mô hình. Hơn nữa, hai xuyên này là đối ngẫu gương với nhau, theo nghĩa được mô tả ở trên (nếu một trong số chúng có bán kính R_1 và R_2 thì cái còn lại sẽ có bán kính là $1/K_1$ và R_2).

Nhận xét này cho chúng ta cơ hội để nghiên cứu đối xứng gương giữa hai không gian moduli Hitchin dạng thớ, bằng cách sử dụng đối xứng gương giữa hai thớ kiểu xuyên đối ngẫu.

Chẳng hạn, lấy p là một điểm trong không gian moduli Hitchin $M(X, {}^L G)$. Ta hãy lấy 0-màng tập trung tại điểm này. Cái gì sẽ là đối ngẫu gương A-màng trên $M(X, G)$?

Điểm p thuộc một xuyên, tức là một thớ của $M(X, {}^L G)$ trên một điểm b nào đó trong nền (xuyên bên trái trên hình dưới đây, ở phía B-mô hình). Xét xuyên đối ngẫu, tức là thớ của $M(X, G)$ trên cùng một điểm b (xuyên bên phải trên hình, ở phía A-mô hình). A-màng đối ngẫu trên $M(X, G)$ mà chúng ta đang tìm kiếm sẽ là A-màng “lan nhòe” ra trên xuyên đối ngẫu này. Nó cũng chính là màng đối ngẫu thu được qua đối xứng gương giữa hai xuyên đối ngẫu.



Thớ trên phía B-mô hình / Thớ đối ngẫu ở phía A-mô hình
/ Điểm trong nền của sự phân thớ $\bullet b$

Kiểu mô tả dạng thớ này của đối xứng gương - sử dụng phân thớ kiểu xuyên đối ngẫu - được Andrew Strominger, Shing-Tung Yau và Eric Zaslow đề xuất trước đó trong một bối cảnh tổng quát hơn. Bây giờ nó được gọi là giả thuyết SYZ, hay cơ chế SYZ.^[160] Đây là một ý tưởng rất mạnh mẽ: trong khi đối xứng gương đối với các xuyên đối ngẫu đã được hiểu rất rõ, thì đối xứng gương đối với những đa tạp tổng quát (như các không gian moduli Hitchin) vẫn còn khá bí ẩn. Bởi vậy, chúng ta có thể hưởng lợi từ đó bằng cách rút gọn nó về trường hợp

hình xuyên. Dĩ nhiên, để có thể thực hiện được, ta cần phải biểu diễn hai đa tạp đối ngẫu gương như các thớ dạng xuyên đối ngẫu trên cùng một nền (các phân thớ này cũng phải thỏa mãn một số điều kiện nhất định). Thật may, chúng ta đã có một số phân thớ như vậy trong trường hợp các không gian moduli Hitchin, do đó chúng ta có thể đưa cơ chế SYZ vào vận hành được. (Nói chung, số chiều của các thớ dạng xuyên là lớn hơn 2, nhưng bức tranh chung thì cũng tương tự vậy thôi.)^[161]

Bây giờ chúng ta sử dụng đối xứng gương này để xây dựng quan hệ Langlands. Đầu tiên, hóa ra các điểm trong không gian moduli Hitchin $M(X, {}^L G)$ chính xác là những biểu diễn của nhóm cơ bản của diện Riemann X trong ${}^L G$ (xem chú thích 1 của chương này). Xét 0-màng tập trung ở điểm này. Theo cơ chế SYZ, A-màng đối ngẫu sẽ “lan nhòe” ra khắp xuyên đối ngẫu (thớ trong không gian moduli Hitchin đối ngẫu trên cùng một điểm của nền).

Kapustin và Witten không những mô tả chi tiết những A-màng này mà họ còn giải thích cách chuyển đổi chúng thành các bó tự đẳng cấu thuộc quan hệ Langlands hình học. Bởi vậy, quan hệ Langlands thu được qua lược đồ sau:

Một biểu diễn của nhóm cơ bản của X trong ${}^L G$

→ Một zero-màng ở điểm p của $M(X, {}^L G)$

→ Đối xứng gương

→ Một A-màng “lan nhòe” khắp xuyên đối ngẫu trong $M(X, G)$

→ Một bó tự đẳng cấu trên không gian moduli của các G -phân thớ trên X

Một yếu tố cơ bản trong cách xây dựng này đó là sự xuất hiện các đối tượng trung gian là các A-màng. Kapustin và Witten đã đề xuất rằng quan hệ Langlands có thể được xây dựng thông qua hai bước: bước thứ nhất, xây dựng một A-màng bằng cách sử dụng đối xứng gương. Rồi sau đó họ xây dựng một bó tự đẳng cấu từ A-màng này.^[162]

Tính đến giờ, chúng ta mới chỉ thảo luận bước thứ nhất, đối xứng gương. Nhưng bước thứ hai cũng rất thú vị. Thực tế, mối liên kết giữa A-màng và các bó tự đẳng cấu là một bước đột phá của Kapustin và Witten: trước công trình của họ, chưa ai biết rằng có một mối liên kết như thế cả. Hơn nữa, Kapustin và Witten còn đề xuất rằng một liên kết tương tự có tồn tại trong một bối cảnh tổng quát hơn rất nhiều. Ý tưởng nổi bật này đã tạo động lực cho rất nhiều nghiên cứu toán học.

Tất cả những thứ này, như bố tôi từng nói, là khá nặng nề: chúng ta có không gian moduli Hitchin, đối xứng gương, A-màng, B-màng, các bó tự đẳng cấu... Bạn có thể sẽ nhức hết cả đầu nếu muốn nắm bắt tất cả những thứ đó. Tin tôi đi, thậm chí là giữa các chuyên gia với nhau, cũng rất ít người biết những điều cơ bản tất cả những yếu tố trong cách xây dựng này. Nhưng ý định của tôi không phải là bắt bạn học tất cả những thứ này. Đúng hơn là tôi muốn chỉ ra những kết nối logic giữa các đối tượng này, và chỉ ra quá trình sáng tạo của những nhà khoa học nghiên cứu chúng: điều gì đã thôi thúc họ, họ học từ nhau như thế nào, và kiến thức mà họ đạt được đã được sử dụng để nâng cao hiểu biết của chúng ta về những câu hỏi then chốt như thế nào.

Nhưng để phần nào làm nhẹ bớt những khó khăn của chúng ta, thì đây là một lược đồ minh họa những tương tự giữa các đối tượng mà ta đã thảo luận qua các cột trên phiến đá Rosetta của Weil, có cộng thêm một cột tương ứng với vật lý lượng tử. Nó chẳng qua chỉ là mở rộng giản đồ của ta ở trang 219 (tôi đã hợp nhất cột bên trái và cột giữa trên phiến đá Rosetta của Weil bởi vì các đối tượng trên đó là tương, tự nhau).

***Lý thuyết số và những đường
cong trên các trường hữu hạn***

Quan hệ Langlands

Diện Riemann X

Quan hệ Langlands
hình học

Vật lý lượng tử

Đối ngẫu điện từ
Đối xứng gương

Nhóm Galois

Nhóm cơ bản của X Nhóm cơ bản của X

Biểu diễn của nhóm Galois trong ${}^L G$ Biểu diễn của nhóm 0-màng trên $M({}^L G, X)$ cơ bản trong ${}^L G$ X)

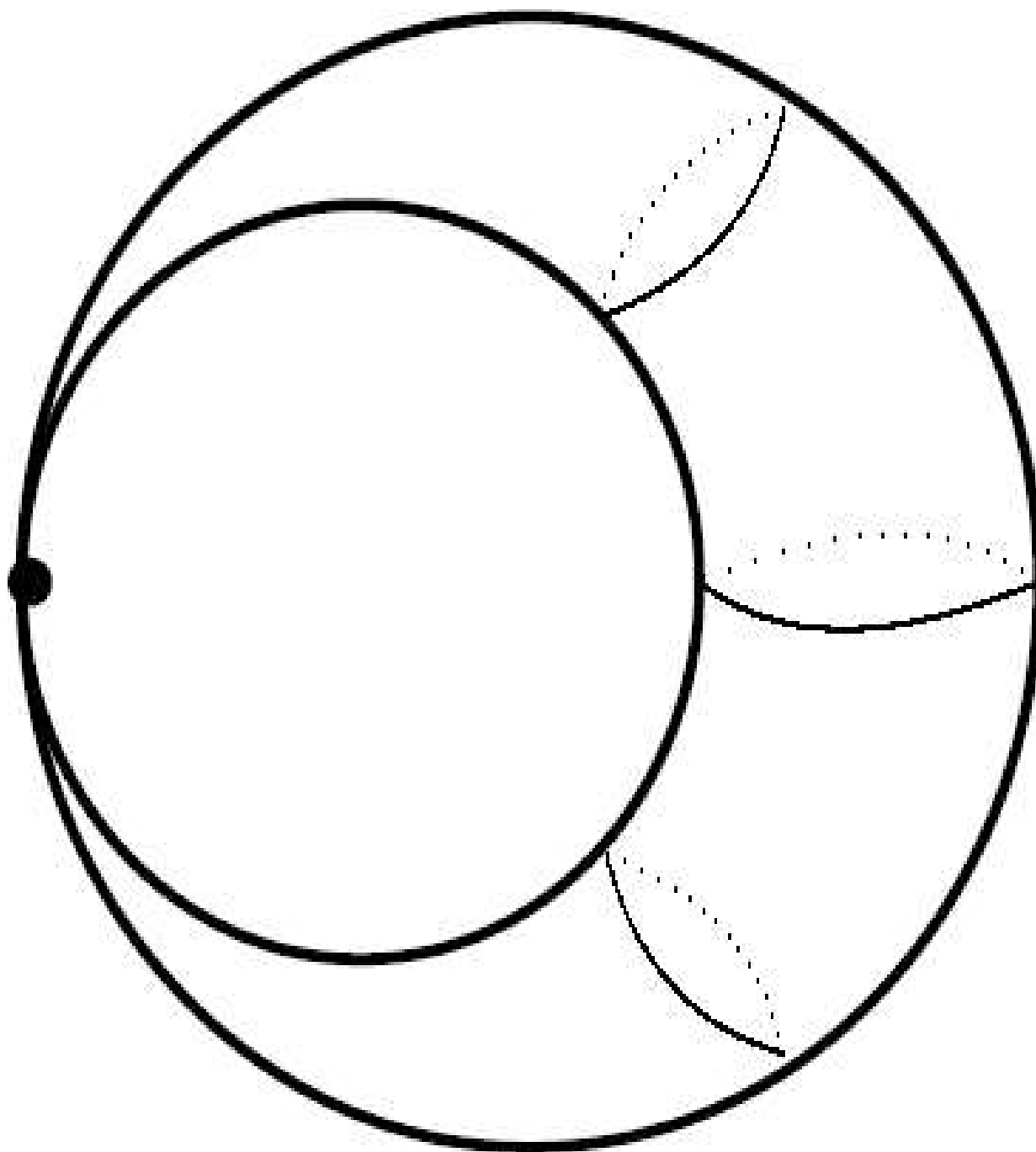
Hàm tự đẳng cấu Bó tự đẳng cấu A-màng trên $M(X, G)$

Sau khi nhìn qua lược đồ này, cha tôi hỏi: Kapustin và Witten làm thế nào để thúc đẩy những tiến bộ trong Chương trình Langlands? Đây dĩ nhiên là câu hỏi quan trọng. Trước tiên, liên kết Chương trình Langlands với đối xứng gương và đối ngẫu điện từ cho phép chúng ta sử dụng một kho vũ khí hùng mạnh của những địa hạt đó trong vật lý lượng tử để tạo ra những tiến bộ trong Chương trình Langlands. Đổi lại, những ý tưởng của Chương trình Langlands, được cấy ngược vào vật lý, và thúc đẩy các nhà vật lý đặt thêm các câu hỏi về đối ngẫu điện từ mà họ chưa bao giờ đặt ra trước đó. Việc này rõ ràng đã dẫn tới một số khám phá rất hấp dẫn. Thứ hai, ngôn ngữ của các A-màng hóa ra lại thích hợp với Chương trình Langlands. Rất nhiều các A-màng này có cấu trúc đơn giản hơn các bó tự đẳng cấu, những thứ hiển nhiên là khá phức tạp. Bởi vậy, sử dụng ngôn ngữ của các A-màng, chúng ta có thể hé lộ những bí ẩn của Chương trình Langlands.

Tôi muốn chỉ cho các bạn một ví dụ cụ thể về cách áp dụng ngôn ngữ mới này. Hãy để tôi kể cho các bạn nghe về công trình sau đó của tôi với Witten^[163] được hoàn tất vào năm 2007. Để giải thích những gì chúng tôi thực hiện, tôi phải nói với các bạn về vấn đề mà cho tới bây giờ tôi vẫn giấu nhem đi. Ở cuộc thảo luận đề cập ở trên, tôi coi tất cả các thớ xuất hiện trong hai không gian moduli Hitchin là các xuyên trơn mà chúng ta thường thấy (giống như cái được vẽ trong hình trên - có dạng chiếc bánh donut hoàn hảo, nếu bạn muốn nghĩ thế). Thực ra, điều này chỉ đúng với hầu hết, chứ không phải tất cả các thớ. Có một số

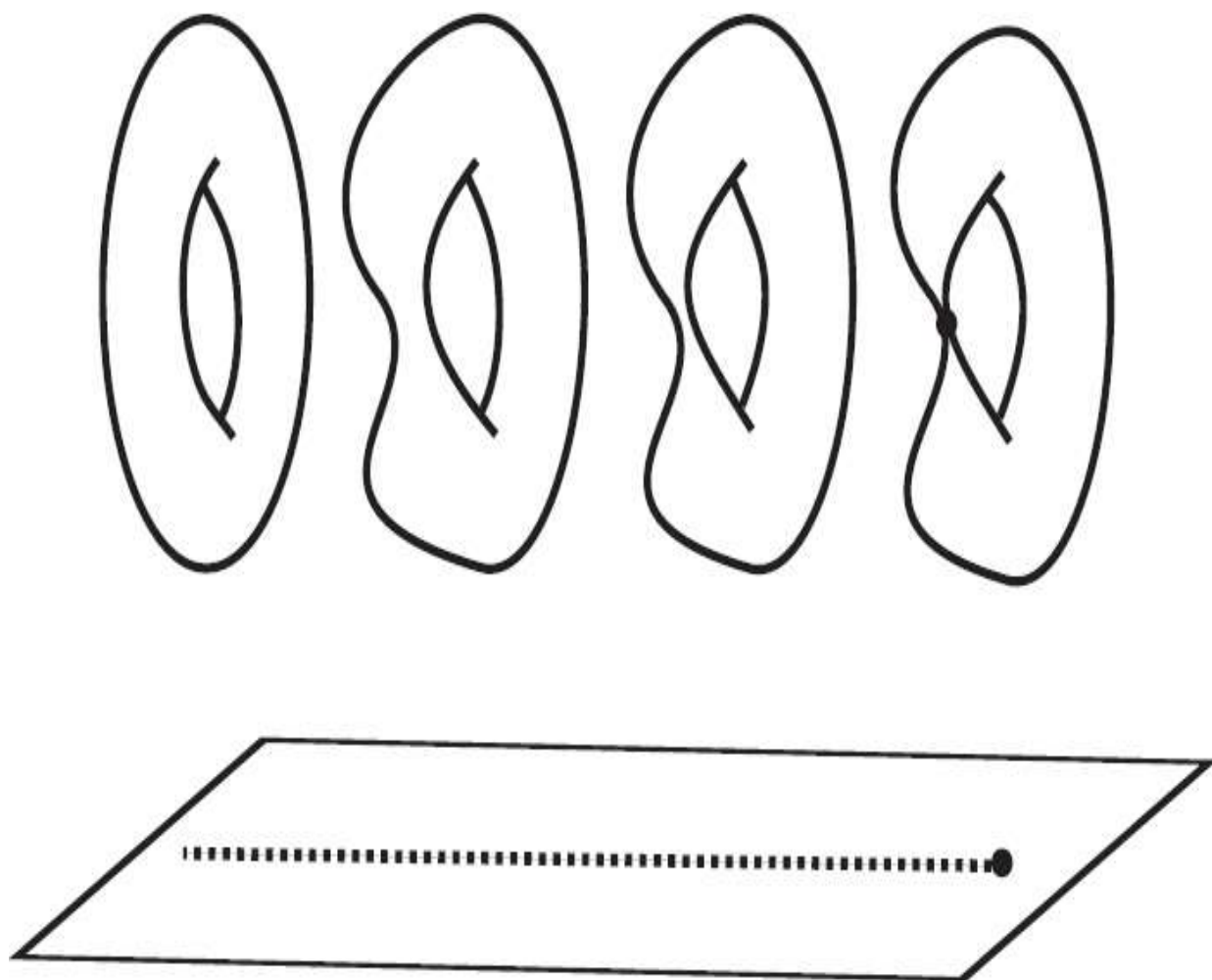
thứ đặc biệt lại có sự khác biệt: chúng là các suy biến của những xuyên trơn. Nếu không có các suy biến, thì cơ chế SYZ sẽ cho chúng ta một mô tả đầy đủ về đối xứng gương giữa các màng trên hai không gian moduli Hitchin. Nhưng sự hiện diện của những xuyên suy biến đã làm cho đối xứng gương này trở nên cực kỳ phức tạp. Thực tế, phần thú vị và phức tạp nhất của đối xứng gương là, điều gì xảy ra với những màng “sống” trên những xuyên suy biến đó?

Trong bài báo của mình, Kapustin và Witten chỉ xét đến đối xứng gương hạn chế trên các xuyên trơn, và bỏ ngỏ câu hỏi về những xuyên suy biến. Trong bài báo của chúng tôi, Witten và tôi đã giải thích điều gì sẽ xảy ra đối với các xuyên suy biến đơn giản nhất, những xuyên có các “kỳ dị *orbifold*”, như là xuyên bị thắt dưới đây:



Thực ra đây chính là hình ảnh của một xuyên suy biến nảy sinh trong trường hợp mà diện Riemann của chúng ta chính là một xuyên, và nhóm ${}^L G$ là $SO(3)$ (nó được lấy trực tiếp từ bài báo của tôi với Witten). Nền của phân thớ Hitchin trong trường hợp này là một mặt phẳng. Với mỗi điểm trên mặt phẳng này, trừ ba điểm đặc biệt, các thớ đều là những xuyên trơn thông thường. Do vậy ngoài ba điểm này phân

thớ Hitchin chỉ là một họ các xuyên trơn. Nhưng tại lân cận của mỗi điểm đặc biệt vừa nói, “chỗ bị thắt” của thớ dạng xuyên bị suy sụp, như chỉ ra ở hình kế tiếp, trên đó chúng ta theo dấu các thớ trên những điểm: thuộc một đường đã cho trong nền.



Điều này như thể Homer Simpson cảm thấy phần khích khi tình cờ giẫm phải chiếc hộp đựng vô số chiếc bánh donut và làm vỡ một vài chiếc (nhưng đừng lo lắng cho Homer; bởi trong hộp vẫn còn lại vô vàn chiếc bánh nguyên vẹn).

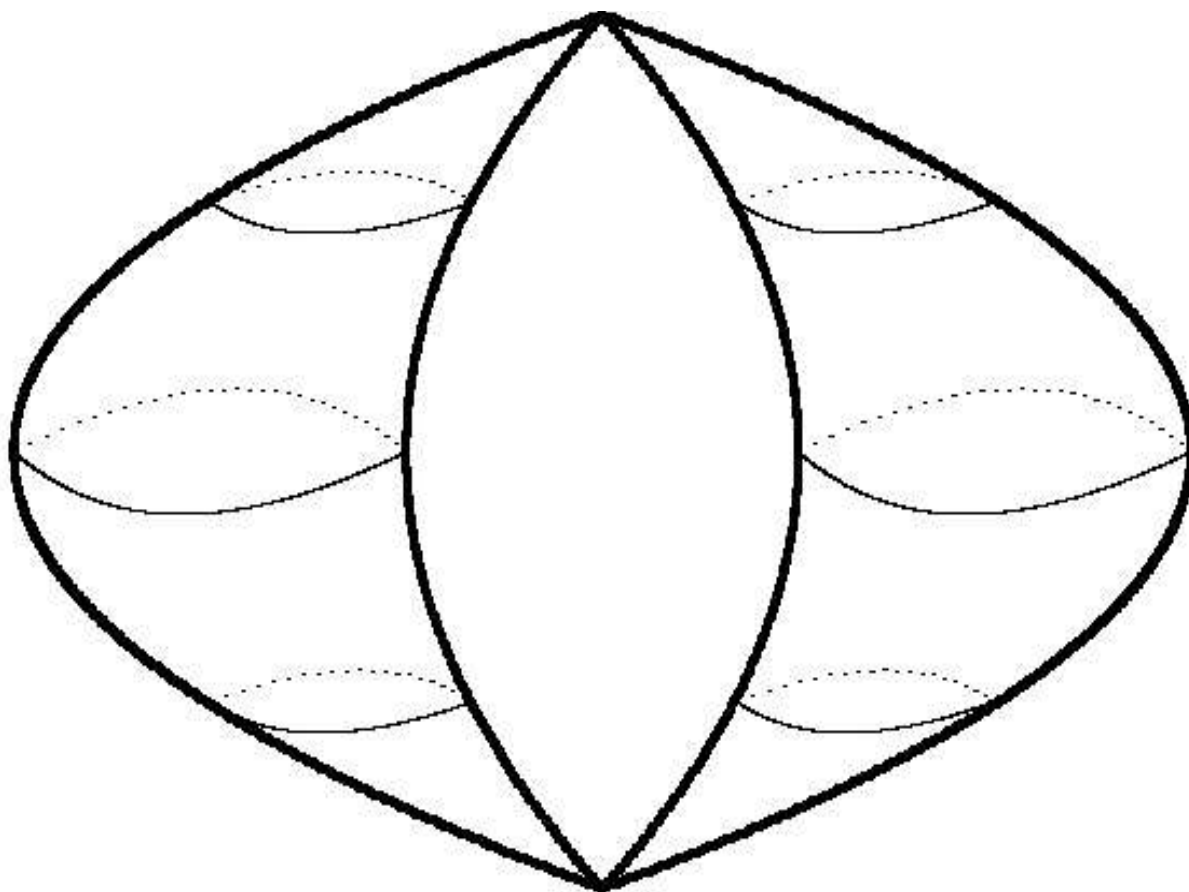
Khi chúng ta tới gần điểm đánh dấu trong nền (tức là một trong ba điểm đặc biệt nói ở trên), chỗ bị thắt lại của xuyên trong thớ trở nên càng mỏng hơn, cho tới khi nó sập lại ở điểm đánh dấu đó. Thớ ở điểm

đánh dấu này được chỉ ra dưới một góc khác ở hình trên. Nó không còn là một xuyên thông thường nữa; nó là cái mà chúng ta gọi là xuyên “suy biến”.

Câu hỏi mà chúng ta cần trả lời đó là điều gì sẽ xảy ra khi 0-màng trên không gian moduli Hitchin tập trung ở điểm đặc biệt của xuyên suy biến giống như điểm đánh dấu ở hình bên trên, điểm mà tại đó chỗ bị thắt co sập lại. Các nhà toán học gọi đó là một kỳ dị *orbifold*.

Hóa ra, điểm này lại có thêm một nhóm đối xứng. Trong ví dụ đã chỉ ra ở trên, nó cũng giống như nhóm đối xứng của một con bướm. Nói cách khác, nó bao gồm phần tử đơn vị, và một phần tử khác, tương ứng với việc lật các cánh của con bướm. Điều này có nghĩa là không chỉ có một mà là hai 0-màng tập trung ở điểm đó. Do vậy vấn đề là: cái nào sẽ tương ứng với hai A-màng trên không gian moduli Hitchin đối ngẫu? (Chú ý rằng, trong trường hợp này, G sẽ là nhóm $SU(2)$ - nhóm đối ngẫu Langlands của nhóm $SO(3)$.)

Như Witten và tôi giải thích trong bài báo của mình, tại mỗi ba điểm đặc biệt trong nền của phân thớ Hitchin, xuyên suy biến bên phía đối ngẫu gương sẽ trông giống thế này (hình được lấy từ bài báo của chúng tôi):



Nó xuất hiện trong phân thớ Hitchin theo kiểu tương tự như đã chỉ ra ở hình trước, ngoại trừ rằng bây giờ, khi ta đến gần điểm đặc biệt trong nền, chỗ thắt lại của xuyên trong thớ trở nên mỗi lúc một mỏng hơn ở hai điểm, và chỗ thắt ấy co sập lại ở cả hai chỗ khi ta tiến tới gần điểm đặc biệt trong nền.

Thớ suy biến tương ứng cũng khá khác biệt với thớ trước, bởi vì bây giờ xuyên suy sập ở hai điểm thay vì một. Do vậy, xuyên suy biến này có hai phần. Các nhà toán học gọi đó là các thành phần. Bây giờ chúng ta đã có thể trả lời câu hỏi của mình: hai A-màng mà chúng ta đang tìm kiếm (đối ngẫu gương với hai 0-màng tập trung ở điểm đặc biệt của xuyên suy biến đầu tiên) sẽ là các A-màng “nhòe ra” trên mỗi một trong hai thành phần của xuyên suy biến đối ngẫu.

Đây là nguyên mẫu cho những gì xảy ra trong trường hợp tổng quát. Khi chúng ta nhìn hai không gian moduli Hitchin như là các phân

thứ trên cùng một nền, sẽ có những thứ suy biến ở cả hai bên. Nhưng cơ chế của sự suy biến thì lại khác nhau: nếu ở phía B-mô hình có một kỳ dị orbifold với một nhóm đối xứng nội tại (giống như nhóm đối xứng của con bướm ở ví dụ trên), thì thứ ở bên phía A-mô hình sẽ bao gồm vài thành phần, giống như hai thành phần ở hình bên trên. Hóa ra số các thành phần này đúng bằng số phần tử của nhóm đối xứng bên phía B-mô hình. Điều này đảm bảo rằng các 0-màng tập trung ở các điểm kỳ dị sẽ tương ứng với các A-màng “nhòe ra” trên những thành phần khác nhau đó.

Trong bài báo viết chung với Witten, chúng tôi đã phân tích chi tiết hiện tượng này. Hơi ngạc nhiên một chút là việc này mang tới cho chúng tôi những cái nhìn sâu sắc không chỉ trong Chương trình Langlands hình học đối với các diện Riemann, mà còn cả trong cột ở giữa trên phiến đá Rosetta của Weil, cột của những đường cong trên các trường hữu hạn. Đây là một ví dụ điển hình về cách mà các ý tưởng và hiểu biết trong một lĩnh vực (vật lý lượng tử) có thể lan truyền ngược lại theo tất cả mọi cách trở về các cột rẽ của Chương trình Langlands.

Và sức mạnh của những liên kết này nằm ở đó. Bây giờ chúng ta không chỉ có ba mà bốn cột trên phiến đá Rosetta của Weil: cột thứ tư dành cho vật lý lượng tử. Khi chúng ta khám phá ra cái gì mới trong cột thứ tư, ta có thể nhìn vào những kết quả tương tự cần phải có trong ba cột còn lại, và đó có thể là nơi khơi nguồn những ý tưởng và nhận thức mới.

Witten và tôi bắt đầu thực hiện đề tài này vào tháng 4 năm 2007 khi tôi tới Princeton thăm viện, và bài báo được hoàn thành vào ngày Halloween, 31 tháng 10 (tôi nhớ rõ ngày tháng, bởi vì sau khi đưa nó lên mạng, tôi đi dự lễ Halloween). Trong suốt bảy tháng trời đó, tôi tới viện ba lần, mỗi lần khoảng một tuần. Mỗi ngày chúng tôi làm việc cùng nhau ở văn phòng rất tiện nghi của Witten. Thời gian còn lại chúng tôi ở những địa điểm khác nhau. Những ngày đó, tôi chia sẻ thời

gian của mình ở Berkeley và Paris, đồng thời tôi cũng dành vài tuần để thăm một viện Toán ở Rio de Janeiro. Nhưng việc tôi ở đâu chẳng thành vấn đề. Chừng nào tôi còn có kết nối Internet, chúng tôi còn có thể cộng tác hiệu quả với nhau. Trong suốt những thời kỳ sôi nổi đó, chúng tôi thường trao đổi tới cả tá email mỗi ngày, suy tư về các câu hỏi, gửi cho nhau bản nháp của bài báo, v.v. Vì chúng tôi trùng tên, nên có một dạng đối xứng gương giữa các email của chúng tôi: mỗi đối xứng sẽ bắt đầu với “Edward thân mến,” và kết thúc với “Thân, Edward.”

Sự cộng tác này cho tôi cơ hội được quan sát Witten gần hơn. Tôi thật kinh ngạc trước sức mạnh trí tuệ lẫn đạo đức nghề nghiệp của ông, và cảm nhận được rằng ông suy tư rất nhiều mỗi khi chọn một vấn đề nghiên cứu. Tôi đã nói về điều này trước đây trong cuốn sách: có những bài toán phải mất tới 350 năm mới giải nổi, do vậy việc đánh giá tương quan giữa tầm quan trọng của vấn đề và xác suất thành công trong một thời gian hợp lý là rất quan trọng. Tôi nghĩ Witten rất có gu và có một trực giác tuyệt vời đối với việc này. Và khi ông đã chọn một đề tài, ông sẽ theo đuổi nó không ngơi nghỉ, cũng như nhân vật của Tom Cruise trong bộ phim *Collateral*. Cách tiếp cận của ông rất tỉ mỉ, có phương pháp, xem xét mọi góc cạnh. Giống như mọi người khác, thi thoảng ông cũng lúng túng và bối rối. Nhưng ông luôn tìm được hướng đi. Làm việc với ông thật như được truyền cảm hứng và làm phong phú thêm kiến thức ở nhiều tầng bậc.

Nghiên cứu về những điểm chung giữa Chương trình Langlands và đối ngẫu điện từ nhanh chóng trở thành một chủ đề nóng, được phát triển thành một lĩnh vực nghiên cứu sôi nổi. Một nhân tố đóng vai trò quan trọng trong quá trình này là hội thảo do chúng tôi tổ chức hằng năm tại viện Vật lý lý thuyết Kavli ở Santa Barbara. David Gross, giám đốc của viện, và là người đoạt giải Nobel về vật lý đã ủng hộ chúng tôi rất nhiệt thành.

Tháng 6 năm 2009, tôi được mời trình bày về những phát triển mới đó tại *Séminaire Bourbaki*. Đây là một trong những seminar toán học kéo dài nhất trên thế giới, và được cả cộng đồng toán học rất tôn sùng. Các cuộc hội thảo của seminar này được tổ chức tại viện Henri Poincaré ở Paris, diễn ra trong những ngày cuối tuần, ba lần một năm, thu hút khoảng vài chục nhà toán học tới dự. Seminar này được lập ra không lâu sau Chiến tranh Thế giới lần thứ hai bởi một nhóm những nhà toán học trẻ và đầy hoài bão, họ tự xưng - bằng một cái tên giả - là Hội của những người cộng tác với Nicolas Bourbaki (*Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*). Ý tưởng của họ là viết lại những cơ sở của toán học nhờ sử dụng một tiêu chuẩn mới, chặt chẽ dựa trên lý thuyết tập hợp, một lý thuyết được Georg Cantor khởi xướng vào cuối thế kỷ 19. Họ mới chỉ thành công một phần, nhưng ảnh hưởng của họ đối với toán học quả là rất to lớn. André Weil là một trong những thành viên sáng lập, còn Alexander Grothendieck đã đóng một vai trò quan trọng sau này.

Mục đích của *Séminaire Bourbaki* là báo cáo những phát triển lý thú nhất trong toán học. Một hội đồng bí mật chịu trách nhiệm chọn chủ đề và người báo cáo, và ngay từ đầu, hội đồng đó đã tuân theo nguyên tắc là các thành viên của seminar phải dưới năm mươi tuổi. Những người sáng lập nhóm Bourbaki rõ ràng tin rằng nhóm cần phải được thay máu mới thường xuyên, và điều này rất có lợi cho nhóm. Hội đồng mời báo cáo viên và đảm bảo rằng họ sẽ viết các bài giảng trước khi báo cáo. Những bản sao các bài giảng đó sẽ được phân phát cho thính giả ở seminar. Được báo cáo ở seminar như thế này là một vinh dự, nên người trình bày sẵn sàng làm theo yêu cầu.

Tên seminar của tôi là “Lý thuyết chuẩn và đối ngẫu Langlands”.
^[164] Mặc dù bản báo cáo của tôi mang tính kỹ thuật hơn và bao hàm nhiều công thức cũng như những thuật ngữ toán học hơn, nhưng về cơ bản tôi thì vẫn đi theo câu chuyện mà tôi kể lại trong cuốn sách này. Tôi bắt đầu với phiên đá Rosetta của André Weil, giới thiệu ngắn về ba cột trên đó, cũng như tôi đã làm ở đây. Bởi vì Weil là một trong số

những người sáng lập ra Bourbaki, nên tôi nghĩ rằng sẽ đặc biệt thích hợp nếu nói về những ý tưởng của ông ở seminar này. Sau đó tôi tập trung vào những tiến bộ mới nhất, liên kết Chương trình Langlands và đối ngẫu điện từ.

Bài báo cáo được đón nhận nồng nhiệt. Tôi rất hân hoan khi nhìn thấy ngồi ở hàng ghế đầu là một nhân vật quan trọng khác của nhóm Bourbaki, Jean Pierre Serre, nhà toán học huyền thoại. Khi tôi kết thúc báo cáo, ông đến gặp tôi. Sau khi đặt mấy câu hỏi có tính chất chuyên môn, ông đưa ra nhận xét.

“Tôi thấy thật thú vị khi anh nghĩ về vật lý lượng tử như cột thứ tư trên phiến đá Rosetta của Weil,” ông nói. “Anh biết đấy, André Weil không đặc biệt thích vật lý. Nhưng tôi nghĩ rằng nếu hôm nay ông ấy có mặt ở đây, ông ấy sẽ đồng ý rằng vật lý lượng tử cũng đóng một vai trò quan trọng trong câu chuyện này.”

Đây là lời khen tuyệt nhất mà một người có thể nhận được.

Trong vài năm gần đây, rất nhiều tiến bộ đã đạt được trong Chương trình Langlands, qua các cột trên phiến đá Rosetta của Weil. Chúng ta vẫn còn khuya mới đạt tới hiểu biết đầy đủ về những bí ẩn sâu sắc nhất của Chương trình này, nhưng có một điều rõ ràng: nó đã vượt qua được sự thử thách của thời gian. Lúc này, chúng ta thấy được rõ hơn rằng nó đã dẫn chúng ta tới một số câu hỏi căn bản nhất trong toán học và vật lý.

Ngày nay, những ý tưởng này cũng quan trọng như khi Langlands viết lá thư gửi cho André Weil, gần 50 năm trước. Tôi không biết liệu chúng ta có thể tìm được tất cả các câu trả lời trong 50 năm tới hay không, nhưng chắc chắn rằng 50 năm tới cũng sẽ là những năm tháng đầy phấn khích như 50 năm vừa qua. Và có lẽ một số độc giả của cuốn sách sẽ có cơ hội đóng góp cho đề tài thật quyến rũ này.

Chương trình Langlands là tiêu điểm của cuốn sách này. Tôi nghĩ nó sẽ cung cấp một cái nhìn toàn cảnh về toán học hiện đại: cấu trúc khái niệm sâu sắc của nó, những nhận thức sâu sắc mang tính đột phá, những giả thuyết như trên người, và cả những mối liên kết không thể ngờ tới giữa những lĩnh vực khác nhau. Nó cũng minh họa cho các mối liên hệ phức tạp giữa toán học và vật lý, cũng như những đối thoại làm phong phú lẫn nhau giữa hai lĩnh vực này. Do vậy, Chương trình Langlands chính là ví dụ minh họa cho bốn đặc tính của các lý thuyết toán học mà ta đã thảo luận trong chương 2: tính phổ quát, tính khách quan, tính bền vững và tính tương thích với thế giới vật lý.

Dĩ nhiên, còn có rất nhiều lĩnh vực toán học lý thú khác. Một số đã được giới thiệu trong sách báo tham khảo cho giới không chuyên, còn một số thì vẫn chưa. Như Henry David Thoreau viết, ^[165] “Chúng ta từng được nghe về chất thơ của toán học, nhưng có rất ít phần của nó được xướng lên.” Than ôi, ngày nay, hơn 150 năm sau khi ông viết những dòng trên, những lời của ông vẫn gọi đúng sự thật, ý là chúng ta, các nhà toán học cần phải làm tốt hơn công việc mở khóa sức mạnh và vẻ đẹp toán học cho nhiều độc giả hơn. Đồng thời, tôi cũng hy vọng rằng câu chuyện về Chương trình Langlands sẽ truyền cảm hứng, gọi trí tò mò về toán học và thúc đẩy khát vọng học hỏi hơn nữa ở độc giả.

^[16] Về điều này, Hitchin đã trích dẫn lời của nhà thơ Đức, Goethe: “Các nhà toán học cũng giống như đàn ông Pháp vậy: mặc cho anh có nói gì với họ, họ sẽ dịch lại theo ngôn ngữ riêng của mình, và tức thì, nó trở thành thứ gì đó hoàn toàn khác.”

Chương 18

ĐI TÌM CÔNG THỨC CỦA TÌNH YÊU

Vào năm 2008, tôi được mời đến nghiên cứu và giảng dạy về công trình của mình tại Paris với tư cách là người được nhận giải thưởng *Chaire d'Excellence*, một giải thưởng mới được thành lập, do Quỹ *Fondation Sciences Mathématiques de Paris* trao tặng.

Paris là một trong số những trung tâm toán học của thế giới; nó cũng được mệnh danh là kinh đô của điện ảnh. Ở đó, tôi thấy như được truyền cảm hứng để thực hiện một bộ phim về toán học. Trong những bộ phim phổ biến, các nhà toán học thường được khắc họa giống như những người kỳ quặc và lạc lõng với xã hội, mấp mé bên bờ vực của bệnh tâm thần, và điều này củng cố thêm cho ấn tượng muôn thuở về toán học như một lĩnh vực nhàm chán và lạnh lùng, xa rời thực tế. Ai lại muốn bản thân họ có một cuộc đời như thế, làm một công việc mà chẳng liên quan với bất kỳ thứ gì cả?

Khi trở lại Berkeley vào tháng 12 năm 2008, tôi cảm thấy niềm thôi thúc phải chuyển hướng sang năng lực nghệ thuật của mình. Hàng xóm của tôi, Thomas Farber, là một tác giả tuyệt vời, anh dạy viết văn ở UC (University of California) Berkeley. Tôi hỏi anh, “Anh nghĩ sao về việc ta viết chung một kịch bản về một nhà văn và một nhà toán học?” Tom thích thú với ý tưởng này và đề nghị chúng tôi bắt đầu tại một bãi biển ở miền Nam nước Pháp. Chúng tôi quyết định rằng bộ phim sẽ bắt đầu như thế này: vào một ngày đẹp trời, một nhà văn và một nhà toán học, ngồi bên hai chiếc bàn cạnh nhau ở một quán cà phê ngoài trời trên bãi biển. Họ thưởng thức vẻ đẹp xung quanh, nhìn nhau, và bắt đầu nói chuyện. Và chuyện gì sẽ xảy ra tiếp theo?

Chúng tôi bắt đầu viết. Quá trình này cũng tương tự như cách tôi cộng tác với các nhà toán học hay vật lý. Nhưng nó cũng có những điểm khác biệt: tìm kiếm đúng từ để mô tả tình cảm và cảm xúc của các nhân vật, tìm ra những tình tiết cốt yếu của câu chuyện. Nhưng công việc này thoải mái hơn, và không vấp phải những hạn chế như tôi vẫn thường gặp. Và tôi lại đang trực tiếp bàn luận với một nhà văn tài giỏi, người mà tôi cực kỳ kính trọng và ngưỡng mộ. Thật may cho tôi, Tom không tìm cách áp đặt ý chí của mình mà đối xử với tôi một cách bình đẳng, và từ tốn để cho tôi phát huy hết những khả năng văn học của mình. Giống như những người thầy hướng dẫn tôi vào thế giới toán học, Tom cũng dìu dắt tôi bước vào thế giới văn chương, điều mà tôi luôn biết ơn.

Trong một đoạn đối thoại, nhà toán học nói với nhà văn về “bài toán hai vật”. Bài toán đó đề cập về hai đối tượng (hai vật) chỉ tương tác với nhau, ví dụ như một ngôi sao và một hành tinh (chúng ta lơ lửng tất cả những lực khác tác dụng lên chúng). Có một công thức toán học đơn giản dự đoán chính xác quỹ đạo của hai vật đó trong tương lai, một khi chúng ta biết được lực hấp dẫn giữa chúng. Tuy nhiên, tương tác giữa hai con người - hai người bạn, hai người yêu nhau - thì khác biệt biết bao! Trong trường hợp này, ngay cả khi bài toán hai vật có nghiệm, thì nó cũng không phải là duy nhất.

Kịch bản của chúng tôi nói về sự va chạm giữa thế giới thực và thế giới trừu tượng: với Richard, nhà văn, đó là thế giới của văn chương và nghệ thuật; còn với Phillip, nhà toán học, đó là thế giới của khoa học và toán học. Mỗi người đều thành thạo trong lĩnh vực trừu tượng tương ứng của mình, nhưng việc này có ảnh hưởng đến hành vi trong thế giới thực như thế nào? Phillip cố gắng sống hòa nhập với sự lưỡng phân giữa chân lý toán học, lĩnh vực mà anh là chuyên gia, và chân lý nhân văn, lĩnh vực mà anh không mấy quen thuộc. Anh học được rằng tiếp cận những vấn đề của cuộc sống theo y như cách tiếp cận các vấn đề toán học không phải lúc nào cũng mang lại thành công.

Tom và tôi cũng đặt câu hỏi: liệu thông qua đối thoại của hai nhân vật đó, chúng ta có thể thấy được những khác biệt và tương đồng giữa nghệ thuật và khoa học - hai “nền văn hóa”, như C.P. Snow đã gọi^[166] - hay không? Thực tế, ta có thể xem bộ phim như một ẩn dụ, về hai mặt của cùng một nhân vật, nửa trái của bộ não và nửa phải của nó, nếu bạn thích thế. Chúng luôn cạnh tranh với nhau, nhưng cũng hỗ trợ cho nhau - hai nền văn hóa song song tồn tại trong cùng một tâm trí.

Trong bộ phim của chúng tôi, hai nhân vật trao đổi những câu chuyện về các mối quan hệ trong quá khứ, về tình yêu họ đã tìm thấy và đánh mất, về con tim tan vỡ của họ. Và suốt cả ngày, họ gặp một số phụ nữ, do vậy ta có thể thấy hai người đàn ông đó sử dụng niềm đam mê nghề nghiệp của mình để quyến rũ phụ nữ. Họ có rất nhiều sở thích chung, nhưng đồng thời, cũng lại có những xung đột đang ngấm ngấm xuất hiện, và cuối cùng dẫn đến một kết cục thật bất ngờ.

Chúng tôi đặt tên cho kịch bản của mình là *Bài toán hai vật*, và công bố nó dưới dạng một cuốn sách.^[167] Phiên bản kịch của nó được công diễn ở nhà hát Berkeley, do đạo diễn lừng danh Barbara Oliver dàn dựng. Đó là lần đầu tiên tôi mạo hiểm bước vào thế giới nghệ thuật, và tôi cảm thấy ngạc nhiên xen lẫn vui sướng trước phản ứng của khán giả. Chẳng hạn, hầu hết mọi người đều cho rằng những gì xảy ra với nhà toán học trong vở kịch chính là tự truyện của tôi. Dĩ nhiên, có rất nhiều trải nghiệm trong đời thực của tôi đã góp phần viết nên kịch bản *Bài toán hai vật*. Chẳng hạn, tôi có bạn gái là người Nga ở Paris, và một vài đặc tính nổi bật của Natalia, bạn gái Phillip trong kịch bản, là được lấy cảm hứng từ cô ấy. Một vài cảnh trong kịch bản được rút ra từ trải nghiệm của tôi, và một số từ Tom. Nhưng là một nhà văn, bạn chủ yếu bị thôi thúc phải tạo ra được những nhân vật hấp dẫn và một câu chuyện có sức thuyết phục. Một khi tôi và Tom quyết định được mình muốn chuyển tải điều gì, chúng tôi phải định hình nhân vật theo một cách nhất định nào đó. Những trải nghiệm trong đời thực được thêm thắt và chuyển đổi đến mức chúng không còn là của chúng tôi nữa.

Những nhân vật chính trong *Bài toán hai vật* trở thành chính họ, và đây là nghệ thuật.

Khi chúng tôi bắt đầu tìm một nhà sản xuất để giúp chúng tôi dựng *Bài toán hai vật* thành một bộ phim, tôi nghĩ rằng bỏ công ra làm một dự án phim nhỏ cũng đáng đấy chứ. Khi tôi trở lại Paris để tiếp tục công việc với *Chaire d'Excellence* vào tháng 4 năm 2009, một người bạn của tôi, nhà toán học Pierre Schapria, đã giới thiệu tôi với Reine Graves, một đạo diễn phim trẻ đầy tài năng. Nguyên là một người mẫu, trước đây cô từng đạo diễn một vài phim tư nhân ngắn, khá táo bạo (một trong số đó đã giành giải thưởng Pasolini tại Liên hoan phim Festival Censored Film ở Paris). Trong một bữa trưa do Pierre sắp xếp, tôi và cô ấy ngay lập tức có cảm tình với nhau. Tôi đề nghị chúng tôi cùng làm một bộ phim ngắn về toán học, và Reine rất thích ý tưởng đó. Vài tháng sau, khi được hỏi về việc này, cô ấy nói rằng toán học là một trong những lĩnh vực ít ỏi cuối cùng còn sót lại mà ở đó vẫn tồn tại niềm đam mê chân thực. ^[168]

Khi chúng tôi bắt đầu tung ra các ý tưởng, tôi đưa Reine xem một vài bức ảnh tôi chụp trước đây, trong đó tôi có vẽ (bằng công nghệ số) các hình xăm là những công thức toán học trên cơ thể người. Reine rất thích, và chúng tôi quyết định sẽ làm một bộ phim có dính dáng đến hình xăm một công thức.

Xăm mình, như một hình thức nghệ thuật, có nguồn gốc từ Nhật Bản. Tôi đã đến Nhật Bản cả chục lần (để làm việc với Feigin, người thường sử dụng thời gian hè của mình ở Đại học Kyoto) và tôi bị văn hóa Nhật quyến rũ. Không có gì ngạc nhiên, Reine và tôi hướng tới điện ảnh Nhật Bản để tìm cảm hứng. Một bộ phim nhan đề *Nghi thức của Tình yên và Cái chết*, của nhà văn Nhật Bản nổi tiếng Yukio Mishima, dựa trên truyện ngắn của ông. Mishima tự đạo diễn và đóng vai chính trong đó.

Bộ phim đen trắng, và nó diễn ra trên một sân khấu cách điệu một mực vốn là đặc trưng của kịch Noh Nhật Bản. Bộ phim không có lời thoại, nhưng có nhạc nền lấy từ vở opera *Tristan và Isolde* của Wagner. Có hai nhân vật: một sĩ quan trẻ của Đội cận vệ Hoàng gia, Trung úy Takeyama, và Reiko vợ anh. Những người bạn của viên sĩ quan này đã dàn dựng một *vụ đảo chính*, nhưng bất thành (ở đây bộ phim ám chỉ những sự kiện có thật diễn ra vào tháng 2 năm 1936, điều Mishima nghĩ là có ảnh hưởng bi thảm tới lịch sử Nhật Bản). Viên trung úy được lệnh hành quyết các thủ phạm của *vụ đảo chính*, một việc mà anh không thể làm - vì họ là bạn thân của anh. Nhưng anh cũng không thể không tuân lệnh Hoàng đế. Cách duy nhất thoát khỏi chuyện này là thực hiện nghi lễ tự sát, *seppuku* (hay *harakiri* - *mổ bụng tự sát*).

Mặc dù chỉ kéo dài hai mươi phút, nhưng bộ phim khiến tôi xúc động sâu sắc. Tôi có thể cảm nhận được sự mãnh liệt và trong sáng trong nhãn quan của Mishima. Màn trình diễn của ông đầy sức thuyết phục, tươi mới, và không gì có thể biện giải. Bạn có thể không đồng ý với những ý tưởng của ông (và thực tế nhãn quan của ông về mối liên hệ mật thiết giữa tình yêu và cái chết, cũng không hấp dẫn tôi), nhưng tôi cực kỳ kính trọng tác giả vì tính cách quá ư mạnh mẽ và không thỏa hiệp của ông.

Bộ phim của Mishima đi ngược lại với những quy định thường thấy trong điện ảnh: nó là phim câm, chỉ có dòng chữ viết ở những đoạn chuyển “phân cảnh” của bộ phún để giải thích những gì sắp xảy ra tiếp theo. Nó có tính kịch nhiều hơn; các cảnh được dàn dựng cẩn thận, với rất ít vận động. Nhưng tôi bị quyến rũ bởi những dòng chảy ngầm của cảm xúc. (Lúc đó tôi còn chưa biết tới sự giống nhau đến kỳ quái giữa cái chết của chính Mishima và những gì đã xảy ra trong bộ phim của ông.)

Có lẽ bộ phim cộng hưởng với tôi quá nhiều bởi vì Reine và tôi cũng định thử làm một bộ phim không theo thông lệ, để nói về toán học theo cách mà chưa ai từng nói. Tôi cảm thấy rằng Mishima tạo ra được

một khuôn khổ và ngôn ngữ thẩm mỹ mới mà chúng tôi đang tìm kiếm. Tôi bèn gọi điện cho Reine.

“Tôi vừa mới xem xong bộ phim của Mishima,” tôi nói, “thật tuyệt vời. Chúng ta nên làm một bộ phim giống như thế.”

“Được,” cô ấy đáp, “nhưng nó sẽ nói về cái gì?”

Đột nhiên, những từ ngữ bắt đầu tuôn ra từ miệng tôi. Mọi thứ cực kỳ rõ ràng.

“Một nhà toán học sáng tạo ra một công thức của tình yêu,” tôi nói, “nhưng sau đó anh ta khám phá ra mặt trái của công thức ấy: nó có thể được sử dụng cho cái ác cũng như cho cái thiện. Nhà toán học nhận ra rằng anh ta phải giấu công thức kia đi để nó khỏi rơi vào tay kẻ xấu. Và anh quyết định xăm nó lên mình của người phụ nữ mà anh yêu.”

“Nghe có vẻ hay đấy. Thế anh nghĩ chúng ta nên đặt tên nó là gì?”

“Hừm... *Những nghi thức của Tình yêu và Toán học* thì sao nhỉ?”

Và như thế, ý tưởng của bộ phim ra đời.

Chúng tôi hình dung về nó như một ẩn dụ, hàm ý rằng một công thức toán học có thể đẹp, như một bài thơ, hay một bản nhạc. Ý tưởng này cần viện tới không phải trí não mà là trực giác và phủ tạng. Hãy để người xem trước hết *cảm nhận* về nó chứ không phải *hiểu* nó. Chúng tôi nghĩ rằng việc nhấn mạnh những yếu tố nhân văn và tinh thần của toán học sẽ giúp khơi gợi trí tò mò của người xem.

Toán học và khoa học nói chung thường bị xem là những thứ khô khan và tẻ ngắt. Thực ra, quá trình sáng tạo ra những điều mới mẻ trong toán học là một cuộc theo đuổi đầy đam mê, một trải nghiệm cá nhân sâu sắc, chẳng kém gì sáng tạo nghệ thuật và âm nhạc vậy. Nó đòi hỏi tình yêu và sự cống hiến, một cuộc chiến đấu với cái chưa biết và với chính bản thân mình, khơi gợi những xúc cảm mạnh mẽ. Và những công thức mà bạn khám phá ra thực sự đeo đẳng tâm trí bạn, cũng giống như việc xăm mình trong bộ phim vậy.

Trong bộ phim của chúng tôi, có một nhà toán học khám phá ra “công thức của tình yêu”. Dĩ nhiên, đây là một ẩn dụ: chúng ta luôn cố gắng đạt tới sự hiểu biết đầy đủ và rõ ràng nhất, để biết về mọi thứ. Trong thế giới thực, chúng ta phải an bài với những tri thức và hiểu biết riêng phần, chưa đầy đủ. Nhưng điều gì sẽ xảy ra nếu có ai đó có thể tìm ra Chân lý tối hậu; và điều gì sẽ xảy ra nếu nó lại có thể được diễn tả bởi một công thức toán học? Đó hẳn phải là công thức của tình yêu.

Henry David Thoreau đã viết về nó rất đẹp:^{[\[169\]](#)}

Mệnh đề khác biệt và đẹp đẽ nhất của bất kỳ chân lý nào cuối cùng cũng phải có dạng một công thức toán học. Chúng ta có thể giản lược những quy tắc của triết lý đạo đức, cũng như của số học, sao cho chỉ một công thức thôi cũng có thể diễn tả được cả hai.

Thậm chí nếu một công thức đơn nhất không đủ quyền năng để giải thích được mọi thứ, thì công thức toán học cũng là cách diễn đạt tinh túy nhất, linh hoạt nhất, và tối ưu nhất các chân lý đã được nhân loại biết đến. Chúng chuyển tải vô vàn kiến thức quý giá, không chịu ảnh hưởng của những mốt thời thượng nhất thời, và chúng truyền đạt cùng một ý nghĩa cho bất kỳ ai liên hệ tới chúng. Những chân lý mà chúng biểu đạt là những chân lý tất yếu, những cột mốc vững chắc của thực tại dẫn đường cho nhân loại vượt thời gian và không gian.

Heinrich Hertz, người chứng minh được sự tồn tại của sóng điện từ và tên ông hiện nay được dùng để đặt tên cho đơn vị của tần số, đã biểu lộ sự bàng hoàng của ông theo cách sau:^{[\[170\]](#)} “Trực giác mách bảo bạn rằng các công thức toán học tồn tại khách quan và có một trí tuệ riêng của chúng, rằng chúng thông thái hơn chúng ta, thậm chí thông thái hơn cả những người đã khám phá ra chúng.”

Hertz không đơn độc trong cảm nhận của mình. Hầu hết những người làm toán đều tin rằng các công thức và ý tưởng toán học sống trong một thế giới tách biệt. Robert Langlands đã viết rằng toán học “thường đến dưới dạng ẩn ý, một tà gợi ý rằng toán học, và không chỉ

những khái niệm cơ bản của nó, tồn tại độc lập với chúng ta. Đó là một quan niệm khó chấp nhận, nhưng một nhà toán học chuyên nghiệp thật khó có thể làm việc mà không có nó.”^[171] Điều này được hưởng ứng bởi nhà toán học lỗi lạc khác, Yuri Manin (thầy hướng dẫn của Drinfeld), người nói về một “mộng cảnh của Lâu đài Toán học vĩ đại, nằm từng từng đâu đó trong Thế giới các Ý niệm của Platon, thứ được các nhà toán học cặm cụi và hết lòng làm việc để khám phá (chứ không phải sáng tạo ra)”.^[172]

Từ góc nhìn này, thì các nhóm Galois được *khám phá* ra bởi thần đồng toán học Pháp Galois chứ không phải được anh *sáng tạo* ra. Còn trước khi anh làm được điều đó, thì khái niệm này vẫn nằm đâu đó trong các khu vườn bị bỏ bùa mê ở thế giới ý niệm của toán học, chờ đợi được phát hiện ra. Thậm chí nếu các bài báo của Galois bị thất lạc, và anh không nhận được đánh giá xứng đáng cho khám phá của mình, thì chính những nhóm đó cũng sẽ được người khác khám phá ra.

Đối lập với điều này là những khám phá ở những lĩnh vực khác trong nỗ lực đi tìm cái mới của loài người: nếu Steve Jobs không quay trở lại Apple, thì chúng ta có thể không bao giờ biết đến iPod, iPhone, và iPad. Những cách tân trong công nghệ khác cũng có thể được tạo ra, nhưng không có lý do gì để kỳ vọng rằng chính những yếu tố kia sẽ tìm thấy bởi ai đó khác. Đối lại, các chân lý toán học là chắc chắn sẽ được phát hiện.

Thế giới mà trong đó các khái niệm và ý tưởng toán học cư ngụ thường được gọi là thế giới Platon của toán học, theo tên nhà triết học Hy Lạp Plato, người đầu tiên lập luận rằng các thực thể toán học là độc lập với những hoạt động của lý trí chúng ta.^[173] Trong cuốn sách *The Road to Reality* (Đường tới thực tại) của mình, nhà vật lý toán nổi tiếng Roger Penrose viết rằng những mệnh đề toán học thuộc về thế giới Platon của toán học “chính là những sự thực khách quan. Nói rằng một mệnh đề toán học nào đó tồn tại trong thế giới Platon, nghĩa là nó đúng

về mặt khách quan.” Tương tự như vậy, các khái niệm toán học “tồn tại trong thế giới Platon bởi vì chúng là những khái niệm khách quan”.^[174]

Giống như Penrose, tôi tin rằng thế giới Platon của toán học tồn tại tách biệt với thế giới vật chất và thế giới tinh thần.

Chẳng hạn, ta hãy xét Định lý cuối cùng của Fermat. Penrose đã đặt câu hỏi một cách hoa mỹ trong cuốn sách của ông rằng liệu “chúng ta chấp nhận quan điểm chó rằng mệnh đề của Fermat luôn đúng, từ đã lâu trước khi Fermat đặt ra nó, hay sự đúng đắn của nó là một vấn đề thuần túy văn hóa, phụ thuộc vào những tiêu chuẩn chủ quan của cộng đồng toán học?”^[175] Dựa vào truyền thống được tôn trọng lâu đời của lập luận bằng *phản chứng (reductio ad absurdum)*, Penrose chỉ ra rằng việc đi theo cách giải thích chủ quan nhanh chóng dẫn chúng ta tới những mệnh đề “hiển nhiên vô lý”, và điều này nhấn mạnh sự độc lập của tri thức toán học với bất kỳ hoạt động nào của con người.

Kurt Gödel, với nhiều công trình - đặc biệt là định lý bất toàn nổi tiếng - đã cách mạng hóa logic toán học, là người đề xướng quyết liệt quan điểm này. Ông viết rằng các khái niệm toán học “tạo thành một thực tại khách quan của riêng chúng, chúng ta không thể sáng tạo hay thay đổi thực tại ấy, chúng ta chỉ có thể nhận thức và mô tả nó mà thôi.”^[176] Nói cách khác, “toán học mô tả một thực tại phi cảm tính, nó tồn tại độc lập với những hoạt động cũng như với các thiên hướng trí tuệ của con người và chỉ có thể được nhận thức và có lẽ là không đầy đủ, bởi trí tuệ con người.”^[177]

Thế giới Platon của toán học cũng tồn tại độc lập với thực tại vật lý. Chẳng hạn, như chúng ta đã thảo luận trong chương 16, công cụ của các lý thuyết chuẩn ban đầu được phát triển bởi các nhà toán học mà không hề có liên hệ gì với vật lý cả. Thực tế, hóa ra chỉ có ba trong số các mô hình đó là mô tả được các lực đã biết của tự nhiên (lực điện từ, lực hạt nhân yếu và mạnh). Chúng tương ứng với ba nhóm Lie (lần lượt là nhóm đường tròn, $SU(2)$ và $SU(3)$), thậm chí mặc dù luôn có lý thuyết chuẩn cho *bất kỳ* nhóm Lie nào. Các lý thuyết chuẩn gắn với các

nhóm Lie mà không phải ba nhóm trên đều hoàn toàn mang tính toán học, nhưng ta chưa hề biết chúng có mối liên hệ nào với thế giới thực cả. Hơn nữa, chúng ta từng nói về những mở rộng siêu đối xứng của các lý thuyết chuẩn này, những thứ mà chúng ta có thể phân tích bằng toán học mặc dù siêu đối xứng vẫn chưa được tìm thấy trong tự nhiên, và rất có thể là nó không tồn tại. Những mô hình tương tự cũng có ý nghĩa về mặt toán-học trong một không-thời gian có số chiều khác bốn. Có rất nhiều ví dụ khác về các lý thuyết toán học phong phú không hề có mối liên hệ trực tiếp với bất kỳ loại thực tại vật lý nào.

Trong cuốn sách *Shadows of the Mind* (Những cái bóng của trí tuệ), Roger Penrose nói về tam giác như là: thế giới vật chất, thế giới tinh thần, và thế giới Platon của toán học.^[178] Chúng tách biệt nhưng lại xoắn bện vào nhau một cách sâu sắc. Chúng ta vẫn chưa hoàn toàn hiểu hết chúng liên kết với nhau như thế nào, nhưng có một điều rõ ràng là: mỗi thế giới đó ảnh hưởng sâu sắc theo nhiều cách tới cuộc sống của chúng ta. Tuy nhiên, trong khi tất cả chúng ta đều đánh giá cao tầm quan trọng của thế giới vật chất và tinh thần, rất nhiều người trong chúng ta vẫn vui vẻ vô tư lơ đi thế giới toán học. Tôi tin rằng khi chúng ta thức tỉnh trước thực tại ẩn giấu ấy và sử dụng được sức mạnh sẵn có nhưng chưa được khai thác của nó, nó sẽ dẫn dắt xã hội của chúng ta tới một bước nhảy mang tầm cỡ của cuộc Cách mạng Công nghiệp.

Theo quan điểm của tôi, tính khách quan của tri thức toán học chính là nguồn gốc cho những tiềm năng vô biên của nó. Đặc tính này phân biệt toán học với bất kỳ loại hoạt động trí tuệ nào khác của con người. Tôi tin rằng hiểu được điều gì ẩn sau đặc tính này sẽ soi sáng những bí ẩn sâu sắc nhất của thực tại vật lý, của ý thức, và những quan hệ qua lại giữa chúng. Nói cách khác, càng tiếp cận gần thế giới Platon của toán học, chúng ta sẽ càng có thêm năng lực để hiểu thế giới xung quanh và vị trí của mình ở trong đó.

Thật may, không gì có thể ngăn chúng ta nghiên cứu sâu hơn nữa thực tại Platon này và hợp nhất nó với cuộc sống của mình. Điều thực

sự ấn tượng đó là tính dân chủ vốn có của toán học: trong khi một số phần của thế giới vật chất và tinh thần có thể được mỗi người nhận thức và giải thích theo những cách khác nhau, hoặc thậm chí một số người không thể tiếp cận được, thì các khái niệm và phương trình toán học lại được nhận thức nhất quán và thuộc về tất cả chúng ta *một cách bình đẳng*. Không ai có thể độc chiếm tri thức toán học; không ai có thể tuyên bố một công thức hay một ý tưởng toán học là phát minh của riêng mình; không ai có thể lấy bằng sáng chế cho một công thức! Ví như Albert Einstein, cũng không thể nhận bằng sáng chế cho công thức $E = mc^2$. Đó là bởi vì, nếu đúng, một công thức toán học biểu thị một chân lý vĩnh cửu về vũ trụ. Do vậy, không ai có thể tuyên bố quyền sở hữu cá nhân đối với công thức đó; nó là tài sản chung mà chúng ta cùng chia sẻ.^[179] Dù giàu hay nghèo, da đen hay da trắng, trẻ hay già - không ai có thể lấy đi các công thức đó khỏi chúng ta. Không có thứ gì trên thế gian này sâu sắc và thanh nhã đến thế mà lại sẵn có cho tất cả mọi người.

Phỏng theo Mishima, ở chính giữa nền trang trí mộc mạc trong vở *Những nghi thức của Tình yêu và Toán học* là một bức thư pháp lớn treo trên tường. Trong bộ phim của Mishima, bức thư pháp đó viết chữ *shishei*: tính chân thật. Bộ phim của ông bàn về tính chân thật và danh dự. Bộ phim của chúng tôi là về chân lý, lẽ dĩ nhiên chúng tôi nghĩ rằng bức thư pháp của mình nên nói về chân lý. Và chúng tôi quyết định không viết nó bằng tiếng Nhật mà bằng tiếng Nga.

Từ “chân lý” có thể dịch thành hai từ trong tiếng Nga. Từ quen thuộc hơn là *pravda*, nói đến sự thật, như là một mẫu tin (và do vậy nó được chọn làm tên cho tờ báo chính thức của Đảng cộng sản Liên Xô). Từ còn lại, *istina*, có nghĩa sâu sắc hơn, là chân triết lý. Chẳng hạn, khẳng định rằng nhóm các đối xứng của một chiếc bàn tròn là một đường tròn là *pravda*, nhưng khẳng định về Chương trình Langlands (trong trường hợp mà nó được chứng minh) thì lại là một *istina*. Rõ

ràng, chân lý khiến nhà toán học phải hiến sinh chính bản thân mình trong bộ phim là *istina*.



Trong bộ phim của mình, chúng tôi muốn phản ánh khía cạnh đạo đức của tri thức toán học: một công thức mang sức mạnh cực kỳ to lớn cũng có thể có mặt trái của nó, và có nguy cơ tiềm tàng được sử dụng cho cái ác. Hãy nghĩ về nhóm các nhà vật lý lý thuyết vào đầu thế kỷ 20 cố gắng tìm hiểu cấu trúc của nguyên tử. Những gì họ nghĩ là theo đuổi khoa học hoàn toàn thuần túy và cao thượng lại vô tình dẫn tới việc khám phá ra bom nguyên tử. Nó mang lại cho chúng ta rất nhiều điều thiện, nhưng cũng mang lại biết bao nhiêu cuộc tàn phá và chết

chóc. Cũng giống như thế, một công thức toán học được khám phá ra như là một phần trong công cuộc tìm kiếm tri thức của chúng ta, cũng có thể là một hiểm họa. Mặc dù các nhà khoa học nên được tự do theo đuổi những ý tưởng của mình, tôi cũng tin rằng chúng ta cần có trách nhiệm làm mọi thứ có thể để đảm bảo rằng các công thức được khám phá ra không bị sử dụng để làm điều ác. Điều đó giải thích tại sao trong bộ phim của chúng tôi, nhà toán học lại sẵn sàng chết để bảo vệ cho công thức đó không bị rơi vào tay kẻ xấu. Việc xăm nó là cách để anh che giấu nó và đồng thời cũng để đảm bảo cho sự sống sót của nó.

Bởi vì chưa xăm mình bao giờ, nên tôi phải học về quá trình đó. Ngày nay, các hình xăm được thực hiện bằng máy, nhưng trong quá khứ (ở Nhật Bản) các hình xăm được trổ bằng một thẻ tre - một quá trình dài hơn, và đau đớn hơn. Tôi nghe nói có thể tìm được những tiệm xăm mình ở Nhật Bản vẫn sử dụng kỹ thuật cổ xưa này. Đó cũng chính là cách làm mà chúng tôi giới thiệu trong bộ phim.



Công thức nào sẽ đóng vai trò là “công thức của tình yêu” trong phim là một câu hỏi quan trọng. Nó phải đủ phức tạp (xét cho cùng thì nó là công thức của tình yêu kia mà) nhưng cũng phải đủ thẩm mỹ. Chúng tôi muốn truyền đạt rằng một công thức toán học có thể đẹp cả về nội dung lẫn hình thức. Và tôi muốn nó là công thức *của mình*.

Tìm “vai” cho công thức của tình yêu, tôi tình cờ gặp công thức này:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega F(qz, \bar{q}\bar{z}) = \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \int_{|z| < \epsilon^{-1}} \omega_{z\bar{z}} z^m \bar{z}^{\bar{m}} dz d\bar{z} \cdot \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_z^m \partial_{\bar{z}}^{\bar{m}} F \Big|_{z=0} \\ + q\bar{q} \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_w^m \partial_{\bar{w}}^{\bar{m}} \omega_{w\bar{w}} \Big|_{w=0} \cdot \int_{|w| < q^{-1}\epsilon^{-1}} F w^m \bar{w}^{\bar{m}} dw d\bar{w}.$$

Nó chính là công thức (5.7) trong một bài báo dài một trăm trang với nhan đề, *Instantons Beyond Topological Theory I* (Các hạt instanton bên ngoài lý thuyết topo I), mà tôi viết vào năm 2006 cùng với hai người bạn thân, Andrey Losev và Nikita Nekrasov.

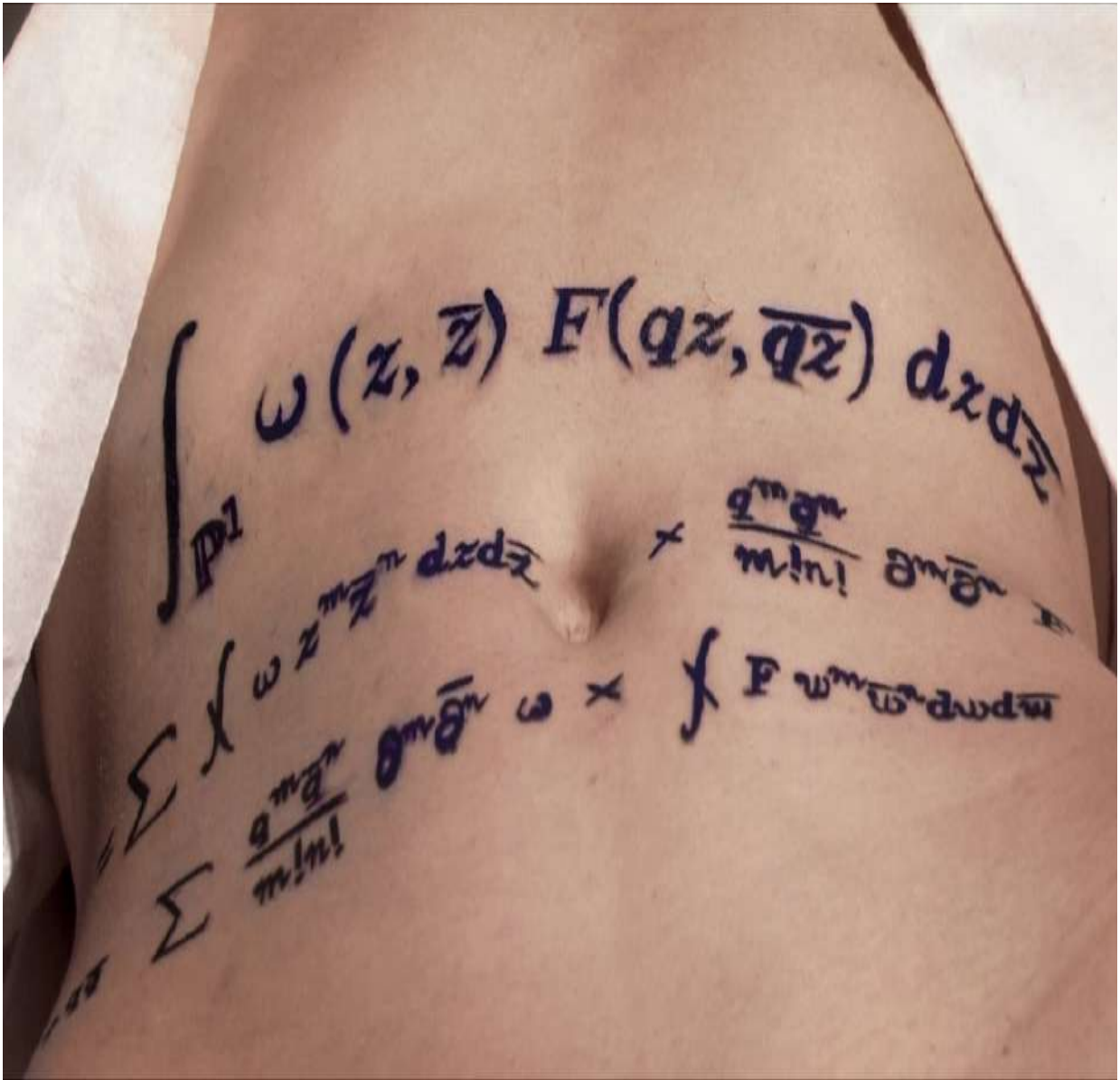
Phương trình này có vẻ như gồm ghiếc đến nỗi nếu chúng tôi làm một bộ phim mà trong đó tôi viết công thức này lên bảng và cố gắng giải thích ý nghĩa của nó, thì có lẽ hầu hết mọi người sẽ bỏ chạy hết khỏi rạp. Nhưng nhìn nó dưới dạng một hình xăm lại gợi ra một phản ứng hoàn toàn khác. Nó thực sự kích thích mọi người: ai cũng muốn biết nó có ý nghĩa gì.

Vậy nó có ý nghĩa gì? Bài báo của chúng tôi là phần đăng đầu tiên trong một chuỗi các bài mà chúng tôi viết về một cách tiếp cận mới đối với các lý thuyết trường lượng tử với các “instanton” - đó là những cấu hình của các trường với những tính chất rất đáng chú ý. Mặc dù các lý thuyết trường lượng tử đã thành công trong việc mô tả chính xác tương tác giữa các hạt cơ bản, nhưng vẫn còn rất nhiều hiện tượng quan trọng mà chúng ta không mấy hiểu biết. Chẳng hạn, theo mô hình chuẩn, các proton và neutron mỗi hạt đều tạo thành từ ba quark, mà ta không thể tách ba hạt đó khỏi nhau. Trong vật lý, hiện tượng này được biết đến là sự cầm tù. Hiện vẫn còn thiếu sự giải thích thỏa đáng về mặt lý thuyết cho hiện tượng này, và rất nhiều nhà vật lý tin rằng các hạt instanton nắm giữ chìa khóa để giải quyết bí ẩn đó. Tuy nhiên, trong cách tiếp

cận thường thấy của các lý thuyết trường lượng tử, các instanton thật sự khó nắm bắt.

Chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận mới lạ đối với các lý thuyết trường lượng tử mà chúng tôi tin là sẽ giúp hiểu rõ hơn về những ảnh hưởng mạnh mẽ của các instanton. Công thức trên biểu thị một hằng đẳng thức đầy kinh ngạc giữa hai cách tính một hàm tương quan ở một trong những lý thuyết của chúng tôi.^[180] Ở thời điểm khám phá ra nó, chúng tôi không mảy may biết rằng nó sẽ sớm được chọn làm công thức của tình yêu.

Oriane Giraud, nghệ sĩ tạo hiệu ứng đặc biệt của chúng tôi, rất thích thú với công thức này, nhưng lại nói là nó quá phức tạp cho một hình xăm. Tôi đã đơn giản hóa các ký hiệu, và nó xuất hiện trong bộ phim của chúng tôi như thế này:



Cảnh xăm mình trong bộ phim có ý định muốn thể hiện niềm đam mê trong nghiên cứu toán học. Trong khi xăm, nhà toán học hoàn toàn tách mình khỏi thế giới. Với anh, công thức này đã thực sự trở thành một vấn đề sinh tử.

Việc quay cảnh này khiến chúng tôi mất rất nhiều thời gian. Nó làm kiệt quệ cả về thể xác lẫn tinh thần của tôi và Kayshonne Insixiang May, diễn viên đóng vai Mariko. Chúng tôi hoàn thiện cảnh quay này lúc gần nửa đêm vào ngày quay cuối cùng. Sau mọi thứ mà chúng tôi đã cùng nhau vượt qua thì đây là một thời điểm ngập ‘tràn cảm xúc đối với khoảng 30 người trong đoàn làm phim.

Được Quỹ *Fondation Sciences Mathématiques de Paris* tài trợ, buổi công chiếu đầu tiên của bộ phim diễn ra vào tháng 4 năm 2010, ở nhà hát Max Linder Panorama, một trong những nhà hát tốt nhất Paris. Đó là một thành công. Những bài báo đầu tiên về bộ phim bắt đầu xuất hiện. Tạp chí *Le Monde* đã gọi *Những nghi thức của Tình yêu và Toán học* là “một bộ phim ngắn gây ấn tượng sâu sắc”, “giới thiệu một cái nhìn lãng mạn bất thường về các nhà toán học”. Còn tạp chí *New Scientist* thì viết:^[181]

Bộ phim thật tuyệt vời, rất đáng xem... Nếu mục tiêu của Frenkel là mang nhiều người hơn nữa đến với toán học, thì anh có thể tự chúc mừng bản thân về thành công của tác phẩm. Công thức của tình yêu, thực ra là một phiên bản đơn giản hóa của một phương trình mà anh đã viết trong một bài báo công bố năm 2006 về lý thuyết trường lượng tử có tên “Các hạt instanton bên ngoài lý thuyết topo I”, sẽ nhanh chóng được xem - nếu không hiểu - bởi một lượng lớn khán giả hơn nhiều so với cách tiếp cận khác của nó.

Theo lời của tạp chí *Tangente Sup*^[182] của Pháp, thì bộ phim sẽ “hấp dẫn những người vốn nghĩ rằng toán học thì đối lập hoàn toàn với nghệ thuật và thi ca”. Trong thông tin phụ lục kèm theo bài báo, Hervé Lehning đã viết:

Trong các nghiên cứu toán học của Edward Frenkel, đối xứng và đối ngẫu có vai trò rất quan trọng. Chúng có liên quan với Chương trình Langlands, với mục tiêu bắc cầu giữa lý thuyết số và các biểu diễn của một số nhóm nào đó. Chủ đề rất trừu tượng này thực sự đã có những ứng dụng, chẳng hạn như trong lý thuyết mật mã... Nếu ý tưởng đối ngẫu quá quan trọng với Frenkel như vậy, người ta có thể đặt câu hỏi liệu anh có nhìn thấy một đối ngẫu giữa tình yêu và toán học, như tựa đề bộ phim của anh đã khơi gợi. Câu trả lời của anh cho câu hỏi này đã rõ ràng. Với anh, nghiên cứu toán học cũng giống như một câu chuyện tình yêu.

Kể từ đó, bộ phim đã được trình chiếu tại một số liên hoan phim ở Pháp, Tây Ban Nha, và California; ở Paris, Kyoto, Madrid, Santa Barbara, Bilbao, Venice... Việc trình chiếu bộ phim và hành động quảng bá tiếp sau đó đã cho tôi cơ hội để thấy được một số điểm khác biệt giữa “hai nền văn hóa”. Trước tiên, nó đến dưới dạng một cú sốc văn hóa. Toán học của tôi chỉ một số ít người có thể hiểu được căn kễ; có lẽ, ban đầu trên toàn thế giới chỉ khoảng chục người, không hơn. Hơn nữa, bởi vì mỗi công thức biểu thị một chân lý khách quan, nên về bản chất chỉ có một cách để diễn giải chân lý đó. Bởi vậy, công trình toán học của tôi cũng được nhận thức theo cùng một cách với bất kỳ ai đọc nó. Nhưng trái lại, bộ phim của chúng tôi có ý định hướng tới một lượng khán giả rộng lớn hơn: có hàng nghìn người sẽ được xem nó. Và, dĩ nhiên, mỗi người sẽ diễn giải nó theo cách riêng của họ.

Điều mà tôi học được từ chuyện này, đó là người xem luôn là phần không thể thiếu trong một dự án nghệ thuật; sau cùng thì tất cả đều phụ thuộc vào đôi mắt của kẻ ngắm nhìn. Một người sáng tạo nghệ thuật không thể áp đặt ý chí của mình tới cảm nhận của người xem. Nhưng dĩ nhiên, chúng ta có thể được hưởng lợi từ điều này, bởi vì khi chia sẻ quan điểm của mình, chúng ta cùng trở nên hoàn thiện.

Trong bộ phim của chúng tôi, mở đầu bộ phim Mariko viết một bài thơ tình cho nhà toán học. Vào cuối bộ phim, khi anh xăm công thức, thì đó chính là cách anh đền đáp lại: với anh, công thức này là minh chứng tình yêu của anh. Nó có thể mang cùng một niềm đam mê và cảm xúc như một bài thơ, do vậy đó là cách chúng ta chỉ ra sự tương đồng giữa toán học và thi ca. Với Nhà toán học, đó là món quà của anh cho tình yêu, là sản phẩm của trí tuệ, niềm đam mê và trí tưởng tượng của anh. Nó cũng giống như anh viết một bức thư tình cho cô ấy vậy - hãy nhớ về chàng trai trẻ Galois viết những phương trình vào đêm cuối của đời mình.

Nhưng cô ấy là ai? Trong bối cảnh của thế giới thần thoại mà chúng ta hình dung, cô ấy là hiện thân của Chân lý Toán học (do vậy

tên cô là Mariko, nghĩa là “chân lý” trong tiếng Nhật, và điều này giải thích tại sao từ *istina* lại được dùng để viết trên bức thư pháp treo trên tường). Tình yêu của nhà toán học dành cho cô có ý nghĩa là tình yêu của anh với Toán học và Chân lý, mà anh đã hy sinh bản thân mình cho chúng. Nhưng cô ấy phải sống sót và mang theo công thức của anh, cũng như cô sẽ làm với những đứa con của anh. Chân lý Toán học là vĩnh cửu.

Liệu Toán học có thể là ngôn ngữ của tình yêu hay không? Một số khán giả không dễ dàng chấp nhận ý tưởng về một “công thức của tình yêu”. Chẳng hạn, có người đã nói với tôi sau khi xem bộ phim rằng “Logic và tình cảm không thể đi cùng với nhau. Đó là lý do tại sao chúng ta nói rằng tình yêu là mù quáng. Vậy thì làm thế nào mà một công thức tình yêu có thể vận hành được?” Thực tế, những tình cảm và cảm xúc của chúng ta thường xuất hiện một cách phi lý tính (mặc dù các nhà khoa học về nhận thức sẽ nói với bạn rằng một vài khía cạnh của thứ phi lý tính biểu kiến như thế thực tế có thể được mô tả bởi toán học). Bởi vậy, tôi không tin rằng có một công thức có thể miêu tả hay giải thích được tình yêu. Khi tôi nói về mối liên hệ giữa tình yêu và toán học, tôi không có ý nói rằng tình yêu có thể được quy giản về toán học. Mà quan điểm của tôi là toán học hàm chứa nhiều điều hơn so với hầu hết chúng ta tưởng tượng. Ngoài ra, toán học cho chúng ta một khả năng duy lý và cộng tính để yêu nhau và yêu thế giới quanh ta. Một công thức toán học không thể giải thích được tình yêu, nhưng nó có thể mang trên mình trọng trách của tình yêu.

Như nhà thơ Norma Farber viết:^[183]

*Hãy làm cho tôi một tình yêu trắc trở...
Và đẩy đưa tôi hết cuộc này đến cuộc khác.*

Quả là toán học đưa chúng tôi “hết cuộc này đến cuộc khác”, và chức năng tinh thần sâu sắc phần lớn chưa được khám phá của nó là nằm ở

đây.

Albert Einstein cũng viết: “Tất cả những ai nghiêm túc theo đuổi khoa học đều bị thuyết phục rằng có một linh hồn nào đó hiển hiện trong các định luật của Vũ trụ - một linh hồn cao cả hơn rất nhiều so với linh hồn của con người, và một khi đối mặt với nó, chúng ta, với những khả năng rất khiêm tốn của mình, luôn cảm thấy là kẻ hèn mọn.”^[184] Và Isaac Newton cũng biểu lộ cảm nhận của mình giống như thế: “Cá nhân tôi thấy mình chỉ là một đứa trẻ con chơi đùa trên bãi biển, thỉnh thoảng phát hiện được một hòn sỏi nhỏ, hay một vỏ sò xinh xinh, trong khi trước mặt tôi là cả một đại dương chân lý bao la còn chưa được khám phá.”^[185]

Ước mơ của tôi là một ngày nào đó tất cả chúng ta sẽ tỉnh thức trước hiện thực ẩn giấu này. Và có lẽ sau đó chúng ta mới có thể gạt sang một bên những khác biệt cá nhân và tập trung vào những chân lý sâu sắc thống nhất chúng ta. Sau đó, giống như những đứa trẻ nô đùa trên bãi biển, cảm thấy ngạc nhiên trước vẻ đẹp hài hòa đến sững sờ mà chúng ta khám phá ra, rồi cùng nhau chia sẻ và giữ gìn.

Lời kết

Máy bay của tôi hạ cánh xuống sân bay Logan ở Boston. Đó là tháng 1 năm 2012. Tôi sắp đến dự Hội nghị Liên hợp thường niên của Hội toán học Mỹ (AMS) và Hiệp hội Toán học Mỹ, tôi đã được mời tới đây để đọc báo cáo Bài giảng chuyên đề AMS 2012. Những bài giảng này được trình bày thường niên kể từ năm 1896. Nhìn lại danh sách những báo cáo viên trước đó và chủ đề các báo cáo của họ cũng giống như thăm lại lịch sử của toán học trong thế kỷ trước: John von Neumann, Shiing-Shen Chern, Micheál Atiyah, Raoul Bott, Robert Langlands, Edward Witten, và rất nhiều nhà toán học vĩ đại khác. Tôi cảm thấy thật vinh dự và nhỏ bé khi được là một phần của truyền thống này.

Việc quay trở lại Boston đã gọi lại trong tôi bao ký ức. Lần đầu tiên tôi hạ cánh xuống Logan là tháng 9 năm 1989, khi tôi tới Harvard - xin mượn lại cái tên của bộ phim nổi tiếng, *Từ nước Nga với Toán học*. Khi đó, tôi mới chỉ hai mươi một tuổi, còn chưa biết trông đợi vào những gì, và điều gì sẽ xảy đến. Ba tháng sau, trưởng thành rất nhanh trong thời kỳ hỗn loạn đó, tôi trở lại Logan để từ biệt Boris Feigin, người thầy hướng dẫn tôi, sắp quay về Moscow, và băn khoăn tự hỏi rằng liệu mình còn có thể gặp lại anh ấy nữa hay không. Thực tế thì, sự cộng tác trong toán học và tình bạn của chúng tôi vẫn tiếp tục phát triển tốt đẹp.

Thời gian tôi ở Harvard hóa ra lại kéo dài hơn rất nhiều so với kỳ vọng: nhận bằng tiến sĩ một năm sau đó, được bầu vào Hội các học giả Harvard (Harvard Society of Fellows) và vào kỳ cuối cùng của tôi ở đó, tôi được bổ nhiệm làm phó giáo sư ở Harvard. Rồi, năm năm sau khi tới Boston, tôi bồi hồi chờ đợi cha mẹ và gia đình em gái tôi bay đến

Logan, để định cư tại Mỹ cùng tôi. Họ sống ở vùng Boston kể từ đó, nhưng tôi thì lại rời đi vào năm 1997, sau khi Đại học California ở Berkeley đưa ra lời đề nghị mà tôi không thể từ chối.

Tôi vẫn thường ghé thăm Boston để gặp gia đình mình. Thực tế, nơi ở của cha mẹ tôi chỉ cách Trung tâm hội nghị Hynes vài khối nhà nơi Hội nghị Toán học Liên hợp nói trên diễn ra, do vậy họ sẽ có cơ hội lần đầu tiên trực tiếp thấy tôi làm việc. Một món quà mới tuyệt vời làm sao - tôi có thể chia sẻ trải nghiệm này với gia đình mình. “Chào mừng về nhà!”

Hội nghị Liên hợp có tới hơn 7.000 người đăng ký tham gia - gần như là cuộc hội họp toán học lớn nhất từ trước tới giờ. Rất nhiều người trong số họ đến nghe bài giảng của tôi, tổ chức trong một hội trường khổng lồ. Cha mẹ tôi, em gái tôi và cháu tôi ngồi ở hàng ghế đầu. Bài giảng nói về công trình chung gần đây của tôi với Robert Langlands và Ngô Bảo Châu. Nó là kết quả của ba năm cộng tác giữa chúng tôi, là cố gắng của chúng tôi để phát triển xa hơn những ý tưởng của Chương trình Langlands.^[186]

“Chuyện gì sẽ xảy ra nếu chúng ta làm một bộ phim về Chương trình Langlands nhỉ?” Tôi hỏi các thánh giả. “Khi đó như bất kỳ người viết kịch bản nào cũng sẽ nói với các bạn, chúng ta sẽ phải vật lộn với những câu hỏi kiểu: điều gì đang bị đe dọa? Sẽ có những nhân vật nào? Mạch truyện sẽ ra sao? Các xung đột sẽ như thế nào? Và chúng sẽ được giải quyết thế nào?”

Mọi người trong thánh phòng đều cười. Tôi nói về André Weil và phiến đá Rosetta của ông. Chúng tôi tiếp tục một hành trình qua các lục địa khác nhau của thế giới toán học, xem xét các mối liên kết bí ẩn giữa chúng.

Mỗi cú bấm vào điều khiển các *slide* tiếp theo trong bài thuyết trình của tôi lại được chiếu lên bốn màn hình khổng lồ. Mỗi slide diễn tả từng bước nhỏ trong công cuộc truy tìm tri thức không có hồi kết của chúng tôi. Chúng ta luôn suy tư về những vấn đề vĩnh cửu của chân lý

và cái đẹp. Và càng hiểu biết nhiều về toán học - cái vũ trụ ẩn giấu kỳ bí ấy - chúng ta càng nhận ra mình mới biết ít ỏi làm sao, còn biết bao nhiêu thứ đang nằm ở phía trước. Hành trình của chúng ta vẫn sẽ còn tiếp diễn.

Lời cảm ơn

Tôi xin cảm ơn DARPA và quỹ Khoa học Quốc gia đã hỗ trợ một số nghiên cứu của tôi được mô tả trong cuốn sách này. Cuốn sách được hoàn thiện trong khi tôi là giáo sư ở viện Nghiên cứu Khoa học Cơ bản Miller của Đại học California ở Berkeley.

Tôi xin cảm ơn biên tập viên T.J. Kelleher và biên tập viên dự án Melissa Veronesi ở Basic Books vì những hướng dẫn rất chuyên nghiệp của họ.

Khi làm cuốn sách này, tôi đã có những cuộc thảo luận rất bổ ích với Sara Bershtel, Robert Brazell, David Eisenbud, Marc Gerald, Masako King, Susan Rabiner, Sasha Raskin, Philibert Schogt, Margit Schwab, Eric Weinstein, and David Yezzi.

Tôi cũng xin cảm ơn Alex Freedland, Ben Glass, Claude Levesque, Kayvan Mashayekh, và Corinne Trang đã đọc một số phần của cuốn sách ở những giai đoạn khác nhau và đưa ra nhiều lời khuyên hữu ích. Tôi cũng rất biết ơn Andrea Young vì đã chụp các bức ảnh về “trò lật cốc” được sử dụng trong chương 15.

Tôi xin dành lời cảm ơn đặc biệt tới Thomas Farber vì rất nhiều những ý kiến sâu sắc và lời khuyên của ông, và tới Marie Levek vì đã đọc bản thảo và đặt ra nhiều câu hỏi gợi mở giúp tôi hoàn thiện cách trình bày ở nhiều chỗ. Cha tôi, Vladimir Frenkel, đã đọc rất nhiều bản nháp của cuốn sách và những ý kiến đóng góp của ông là vô giá.

Tôi mắc nợ những người thầy, người hướng dẫn và nhiều người khác đã giúp đỡ tôi trong hành trình của mình, tôi hy vọng, những công ơn ấy hiện lên rõ ràng trong câu chuyện mà tôi đã kể.

Trên tất cả, tôi xin dành lòng biết ơn sâu sắc cho cha mẹ, Lidia và Vladimír Frenkel, tình yêu và sự ủng hộ của hai người đã giúp tôi đạt

được tất cả những thành tựu của mình. Tôi xin dành tặng cuốn sách này cho họ.

CHÚ THÍCH

Chương 2. BẢN CHẤT CỦA ĐỐI XỨNG

^[1] Trong phần thảo luận này chúng ta sử dụng cụm từ “đối xứng của một vật” như một thuật ngữ chỉ một phép biến đổi cụ thể nào đó bảo toàn vật, chẳng hạn như phép quay một chiếc bàn. Chúng ta sẽ không nói “đối xứng của một vật” để biểu thị tính chất đối xứng của vật đó.

^[2] Nếu chúng ta sử dụng phép quay theo chiều kim đồng hồ, ta vẫn thu được cùng một tập hợp các phép quay: phép quay một góc 90° theo chiều kim đồng hồ thì cũng chính là phép quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 270° . Các nhà toán học thường quy ước sử dụng các phép quay ngược chiều kim đồng hồ, nhưng đây chỉ là vấn đề lựa chọn.

^[3] Điều này nghe có vẻ dư thừa không cần thiết, nhưng ta không chỉ đơn thuần tỏ ra là quá tỉ mỉ. Chúng ta đưa thêm nó vào, để cho nhất quán. Chúng ta nói rằng một đối xứng là một phép biến đổi bất kỳ mà bảo toàn vật, và phép đồng nhất là một phép biến đổi như vậy.

Để tránh nhầm lẫn, tôi muốn nhấn mạnh rằng trong phần thảo luận này chúng ta chỉ quan tâm đến kết quả cuối cùng của một phép đối xứng cho trước. Những gì mà ta tác động lên vật trong cả quá trình là không quan trọng, chỉ các vị trí cuối cùng của tất cả các điểm trên vật mới là quan trọng thôi. Chẳng hạn nếu ta quay chiếc bàn một góc 360° , thì tất cả các điểm trên bàn sẽ trở về nguyên vị trí ban đầu. Tương tự như vậy, một phép quay 90° theo chiều kim đồng hồ cũng chính là phép

quay ngược chiều kim đồng hồ một góc 270° . Một ví dụ khác, giả sử ta đẩy chiếc bàn trượt trên sàn theo hướng nào đó một đoạn dài 10 mét rồi kéo ngược nó trở lại 10 mét, hoặc chuyển chiếc bàn sang phòng khác rồi lại mang nó về. Cho đến khi nào nó còn được đặt nguyên vị trí ban đầu và mỗi điểm của nó vẫn giữ nguyên vị trí, thì những việc làm thế này cũng được coi là cùng một đối xứng như đối xứng đồng nhất vậy.

[4] Có một tính chất quan trọng mà hợp thành của các đối xứng thỏa mãn, được gọi là tính chất *kết hợp*: cho ba đối xứng S , S' và S'' , lấy hợp thành của chúng theo hai thứ tự khác nhau, $(S \circ S') \circ S''$ và $S \circ (S' \circ S'')$ thì ta vẫn thu được cùng một kết quả. Tính chất này được liệt kê trong định nghĩa chính thức của một nhóm như một tiên đề. Ta không nhắc đến nó trong phần chính văn của cuốn sách bởi vì với những nhóm mà chúng ta xét đến thì tính chất này hiển nhiên được thỏa mãn.

[5] Khi nhắc đến các đối xứng của một chiếc bàn vuông, chúng ta thấy rằng thật tiện lợi nếu đồng nhất bốn đối xứng với bốn góc của chiếc bàn. Tuy nhiên, sự đồng nhất như thế phụ thuộc vào sự lựa chọn một trong các đỉnh - đó là đỉnh biểu diễn đối xứng đồng nhất. Một khi đỉnh này đã được chọn, quả thật chúng ta có thể đồng nhất mỗi đối xứng với đỉnh mà đối xứng này làm biến đổi đỉnh được chọn tới đỉnh đó. Điểm hạn chế đó là nếu chọn một đỉnh khác để biểu diễn đối xứng đồng nhất, chúng ta sẽ thu được một sự đồng nhất hoàn toàn khác. Do vậy tốt hơn là nên phân biệt những đối xứng của chiếc bàn với các điểm trên chiếc bàn đó.

[6] Tham khảo, Sean Carroll, *The Particle at the End of The Universe: How the Hunt for the Higgs Boson Leads Us to the Edge of a New World*, Dutton, 2012.

[7] Năm 1872, nhà toán học Felix Klein sử dụng ý tưởng cho rằng các hình dạng được xác định bởi những tính chất đối xứng của chúng như là xuất phát điểm cho Chương trình Erlangen có ảnh hưởng rất sâu rộng của ông, trong đó ông tuyên bố rằng các đặc điểm nổi bật của bất kỳ hình học nào cũng được xác định bởi một nhóm đối xứng. Chẳng

hạn, trong hình học Euclid, nhóm đối xứng của nó bao gồm tất cả các phép biến đổi của không gian Euclid mà bảo toàn khoảng cách. Những phép biến đổi như thế là hợp thành của các phép quay và các phép tịnh tiến. Còn các hình học phi Euclid thì tương ứng với các nhóm đối xứng khác. Điều này cho phép chúng ta phân loại các hình học khả dĩ bằng cách phân loại các nhóm đối xứng liên quan.

^[8] Điều đó không có nghĩa nói rằng một mệnh đề toán học không có những khía cạnh cần phải diễn giải; chẳng hạn, những câu hỏi kiểu như một mệnh đề đã cho có tầm quan trọng như thế nào, được ứng dụng rộng rãi ra sao, có những hệ quả nào đối với sự phát triển của toán học, v.v đều là những chủ đề cần tranh luận cả. Nhưng *ý nghĩa* của mệnh đề - tức là điều chính xác ẩn chứa trong nó - thì không cần giải thích nếu như nó nhất quán về mặt logic. (Tính nhất quán về mặt logic của mệnh đề thì không cần tranh cãi, một khi ta đã chọn một hệ tiên đề có chứa mệnh đề được phát biểu trong đó.)

^[9] Chú ý rằng mỗi phép quay cũng làm nảy sinh một đối xứng của bất kỳ một vật tròn xoay nào, chẳng hạn như một chiếc bàn tròn. Bởi vậy, về nguyên tắc, ta có thể nói về một biểu diễn của nhóm các phép quay bằng những đối xứng của chiếc bàn tròn thay vì một mặt phẳng. Tuy nhiên, trong toán học, thuật ngữ “biểu diễn” được dành riêng cho tình huống mà trong đó một nhóm cho trước làm nảy sinh các đối xứng của một không gian n -chiều. Những đối xứng này phải là các phép biến đổi tuyến tính theo cách gọi của các nhà toán học, một khái niệm sẽ được giải thích ở chú thích 2, chương 14.

^[10] Với phần tử g bất kỳ của nhóm các phép quay, ký hiệu S_g là đối xứng tương ứng của không gian n -chiều. Nó phải là một phép biến đổi tuyến tính đối với bất kỳ phần tử g nào, và thỏa mãn tính chất: trước hết, với bất kỳ cặp phần tử g, h nào của nhóm, đối xứng S_{gh} phải bằng hợp thành của hai đối xứng S_g và S_h . Sau nữa, đối xứng tương ứng với phần tử đơn vị của nhóm phải là đối xứng đồng nhất của mặt phẳng.

^[11] Sau này, người ta khám phá ra rằng còn có ba quark nữa, gọi là “duyen”, “đỉnh” và “đáy”, và các phản-quark tương ứng.

Chương 3. BÀI TOÁN SỐ NĂM

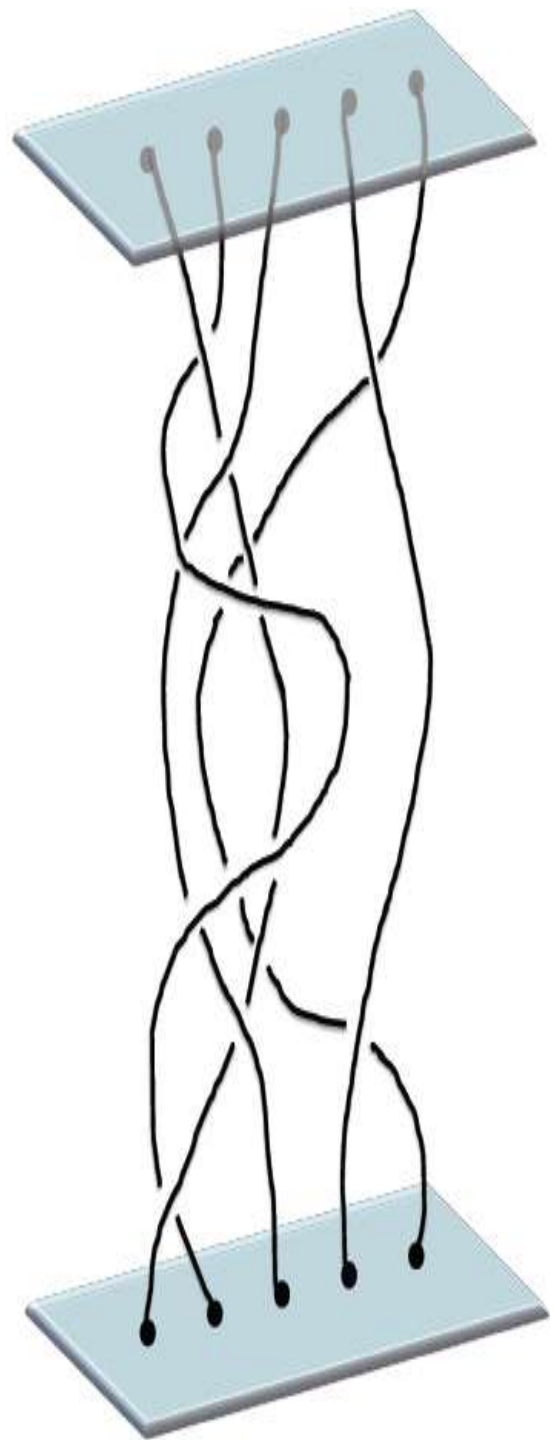
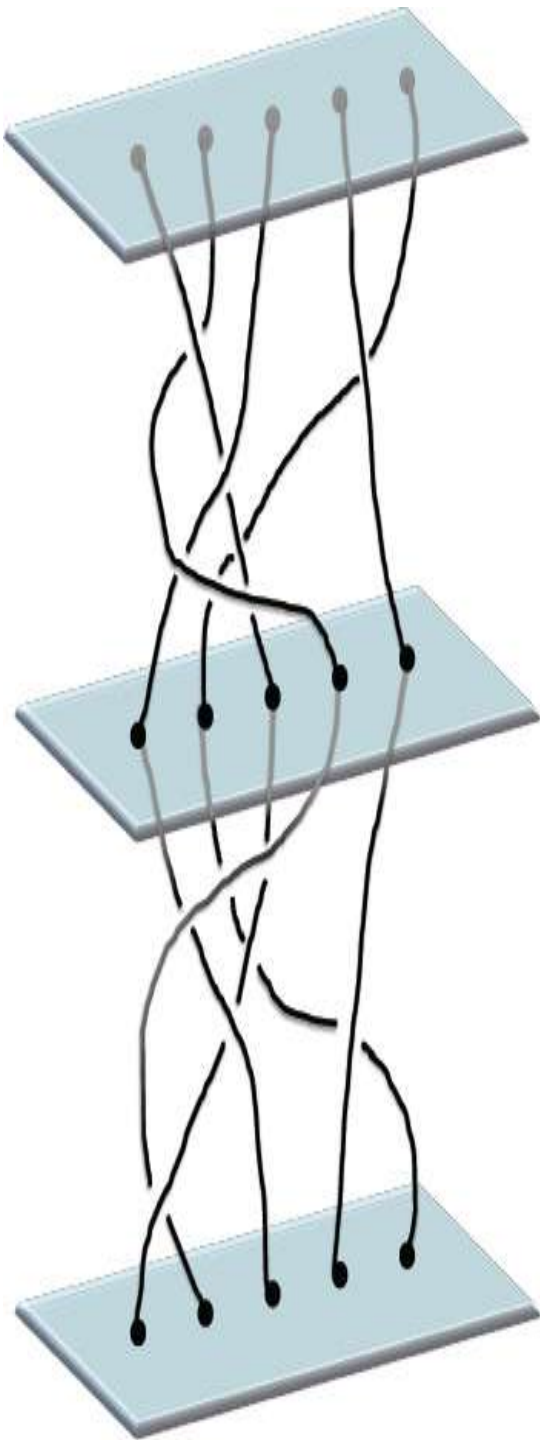
^[12] Cũng có một giáo đường Do Thái bán chính thức ở Marina Rosha. Tình hình đã được cải thiện sau *perestroika* khi có nhiều giáo đường và các trung tâm của cộng đồng Do Thái được mở ra tại Moscow và các thành phố khác.

Chương 5. NHỮNG MANH MỐI CỦA LỜI GIẢI

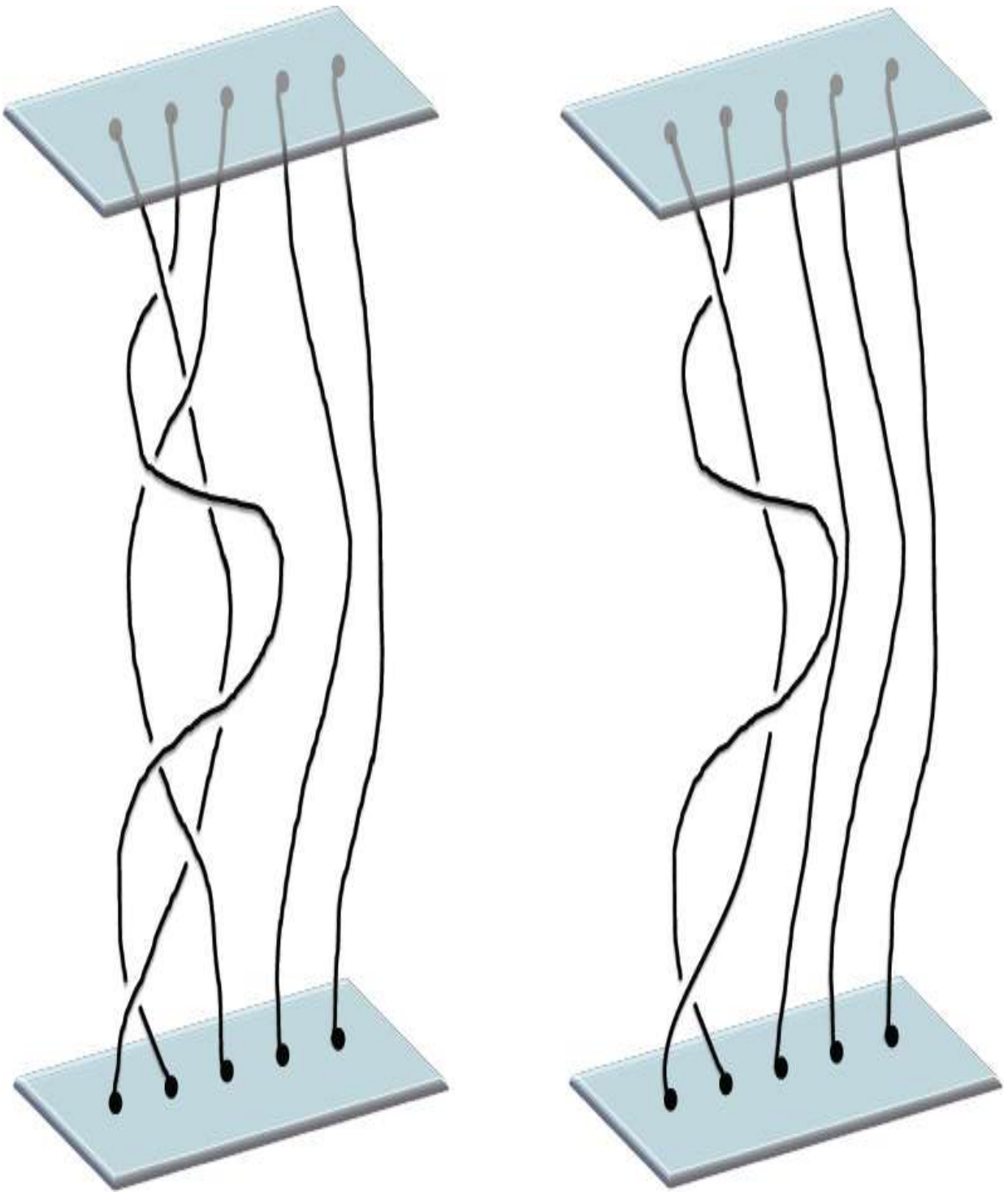
^[13] Câu chuyện về Đại học Nhân dân Do Thái và chi tiết về cái chết của Bella Muchnik Subbotovskaya được kể lại trong các bài báo của D.B. Fuchs và các tác giả khác trong M. Shifman (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*, World Scientific/2005.

^[14] Nếu đặt bện đơn vị lên đỉnh của bện khác, và bỏ đi những tấm ở giữa, ta sẽ thu được bện ban đầu sau khi rút ngắn các sợi dây lại. Điều này có nghĩa là kết quả của việc cộng một bện b với bện đơn vị cho ta lại chính bện b .

^[15] Đây là hình ảnh của phép cộng một bện và ảnh đối xứng gương của nó.

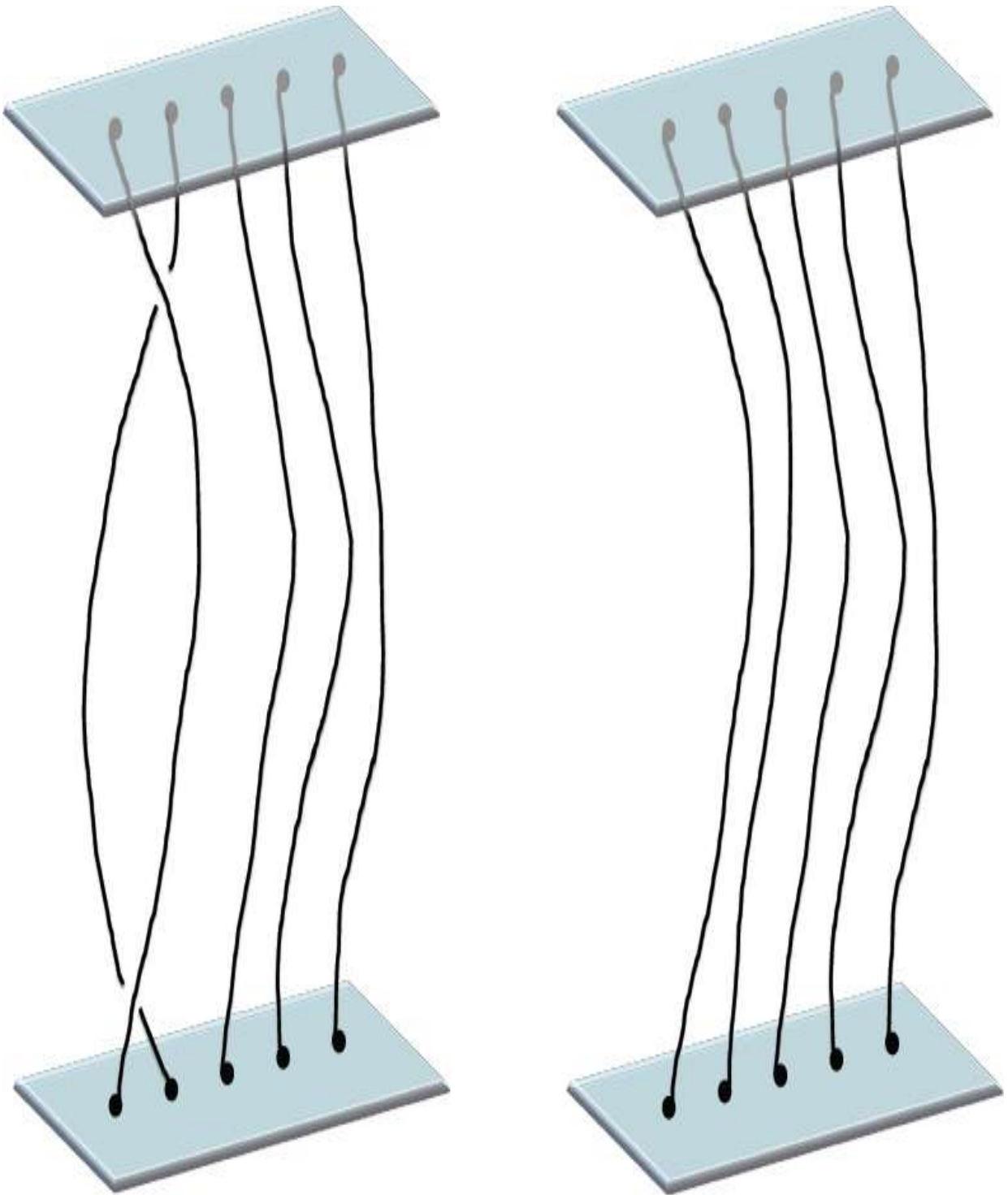


Bây giờ, trong bện được vẽ ở bên phải của hình trên, ta kéo sợi dây với hai đầu mút ở “đỉnh” ngoài cùng bên phải về bên phải. Nó sẽ cho ta bện bên trái dưới đây. Sau đó, làm y hệt như vậy với hai đầu sợi dây ở đỉnh thứ ba của bện này. Nó cho ta bện bên phải ở hình dưới.



Tiếp theo, ta kéo sợi dây tại điểm đầu và điểm cuối ở đỉnh thứ hai sang bên trái. Trong bện thu được có vẻ như có sự chồng chéo giữa dây thứ nhất và thứ hai. Nhưng đây chỉ là ảo giác: bằng cách kéo sợi dây thứ hai qua bên phải, ta sẽ loại bỏ được ngay sự chồng chéo này. Những bước làm này được vẽ ở hình dưới đây. Bện thu được, ở bên

phải của hình dưới, chính là bện đơn vị mà ta đã thấy ở trên. Chính xác hơn, để thu được bện đơn vị, chúng ta cần kéo thẳng các sợi dây, nhưng việc này phải thỏa mãn những quy tắc của ta (ta nên thu ngắn các sợi dây, do vậy bện của chúng ta sẽ có cùng độ cao với bện ban đầu). Chú ý rằng không có bước nào ở trên chúng ta cắt hoặc khâu các sợi hoặc cho phép sợi này đi xuyên qua sợi khác.



^[16] Đây là cơ hội tốt để thảo luận về sự khác biệt giữa “định nghĩa” và “định lý”. Trong chương 2, chúng ta đã đưa ra định nghĩa của một nhóm. Cụ thể là một nhóm là một tập hợp được trang bị một phép toán (thường được gọi là phép hợp thành, phép cộng hay phép nhân, tùy hoàn cảnh) thỏa mãn những tính chất (hoặc tiên đề) sau: có một phần tử

đơn vị trong tập hợp (theo nghĩa đã giải thích trong chương 2); mỗi phần tử trong tập hợp có một phần tử nghịch đảo; và phép toán trên tập hợp đó phải thỏa mãn tính chất kết hợp mô tả ở chú thích 4, chương 2. Một khi đã đưa ra *định nghĩa* này, khái niệm nhóm là cố định, một lần và mãi mãi. Chúng ta không được phép thay đổi nữa.

Bây giờ, với một tập hợp cho trước, ta thử trang bị cho nó cấu trúc của một nhóm. Điều này có nghĩa là ta sẽ xây dựng một phép toán trong tập hợp này, và chứng minh rằng phép toán đó thỏa mãn tất cả các tính chất liệt kê ở trên. Trong chương này, chúng ta lấy tập hợp tất cả các bện với n sợi (ta đồng nhất các bện thu được bằng cách xoắn, vặn, kéo các sợi dây, như đã giải thích trong phần chính văn của cuốn sách), và xây dựng phép toán cộng hai bện bất kỳ như vậy theo quy tắc đã mô tả trong phần chính văn. Khi đó, *Định lý* của chúng ta sẽ là mệnh đề khẳng định rằng phép toán này thỏa mãn tất cả các tính chất kể trên. Chứng minh của định lý này bao gồm một phép kiểm tra trực tiếp những tính chất đó. Ta đã kiểm tra hai tính chất đầu tiên (xem chú thích 2 và 3 bên trên) và tính chất cuối cùng (tính kết hợp) tự khắc thỏa mãn qua cách xây dựng phép cộng hai bện.

^[17] Bởi vì một trong những quy tắc của ta là một sợi dây không được quấn rối chính nó, do vậy sợi dây đơn lẻ của chúng ta chỉ có thể được kéo thẳng từ đỉnh ở tấm trên cùng xuống đỉnh tương ứng ở tấm dưới. Dĩ nhiên, nó có thể đi theo một đường phức tạp, giống như con đường vòng quanh núi hay một đường phố quanh co vòng vèo, nhưng bằng cách rút ngắn sợi dây lại, nếu cần thiết, ta có thể làm cho nó đi thẳng xuống dưới. Nói cách khác, nhóm B_1 chỉ bao gồm một phần tử, chính là phần tử đơn vị (nó cũng là nghịch đảo của chính mình, và là kết quả của phép cộng với chính nó).

^[18] Theo ngôn ngữ toán học, ta nói rằng “nhóm bện B_2 đẳng cấu với nhóm các số nguyên”. Điều này có nghĩa là có một tương ứng 1-1 giữa hai nhóm - tức là ta gán cho mỗi bện số chồng chéo của nó - do vậy phép cộng của các bện (theo nghĩa đã diễn giải ở trên) sẽ tương ứng với

phép cộng thông thường của các số nguyên. Thật vậy, đặt hai bên chồng lên nhau, chúng ta thu được bên mới có số chồng chéo bằng với tổng các số gán với hai bên ban đầu. Hơn nữa, bên đơn vị, không xảy ra sự chồng chéo nào, tương ứng với số nguyên 0, còn việc lấy bên nghịch đảo thì tương ứng với việc lấy số đối của một số nguyên.

^[19] Tham khảo, David Garber, *Braid group cryptography*, trong *Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications*, trang 329-403, World Scientific 2010, có thể tìm thấy trên Internet tại: <http://www.arxiv.org/pdf/0711.3941v2.pdf>.

^[20] Tham khảo, Graham P. Collins, *Computing with Quantum Knots*, Scientific American, tháng 4 năm 2006, trang 57-63.

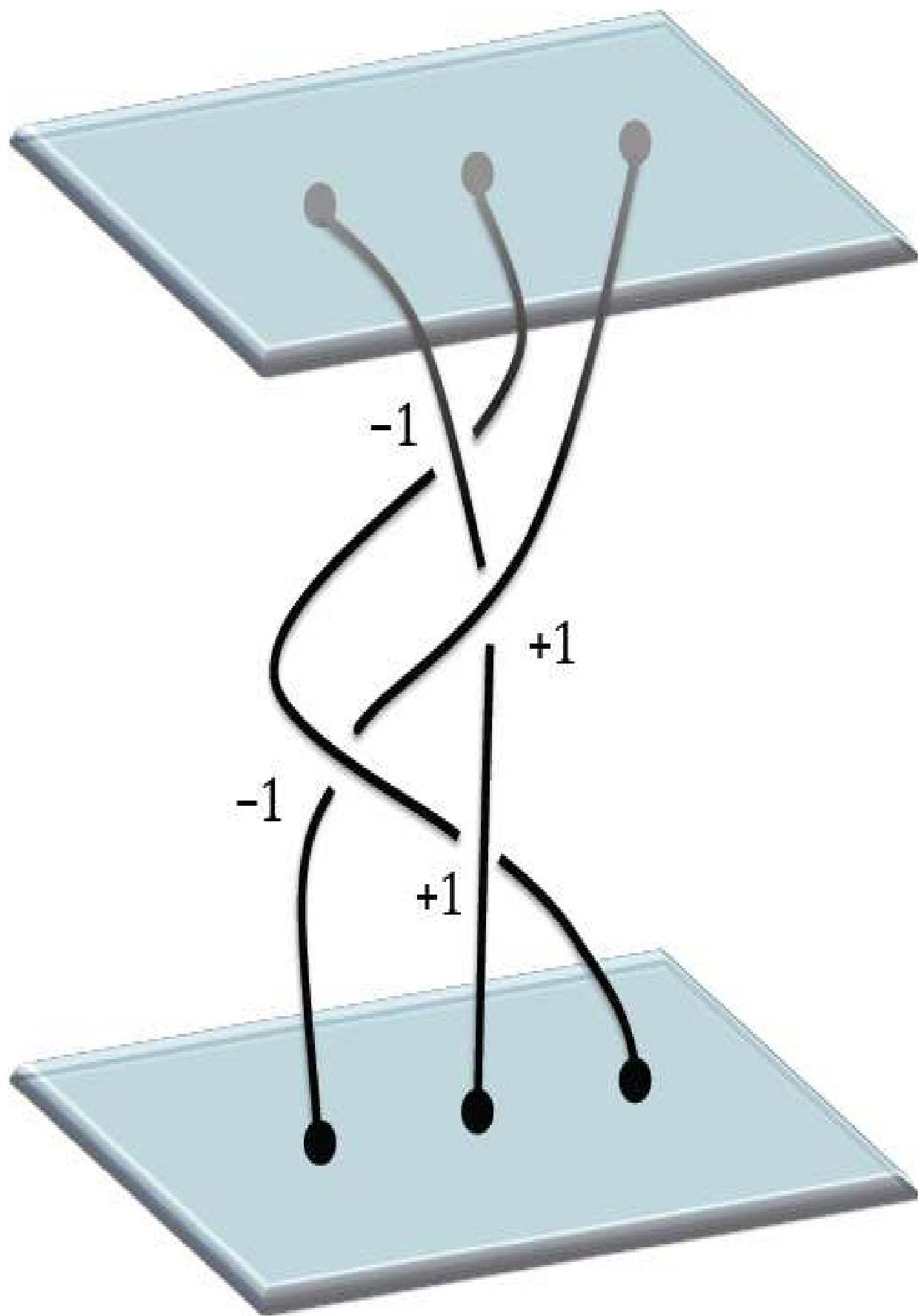
^[21] De Witt Sumner, Claus Ernst, Sylvia J. Spengler, và Nicholas R. Cozzarelli, *Analysis of the mechanism of ADN recombination using tangles*, Quarterly Review of Biophysics, số 28, tháng 8 năm 1995, trang 253-313.

^[22] Một mệnh đề chính xác hơn, mà chúng ta sẽ thảo luận trong chương 9, nói rằng nhóm bên là *nhóm cơ bản* của không gian gồm n điểm phân biệt không có thứ tự trên mặt phẳng. Đây là một cách giải thích hữu ích tập hợp n điểm phân biệt, không có thứ tự trên mặt phẳng thông qua các đa thức bậc n . Xét một đa thức *monic* bậc hai: $x^2 + a_1x + a_0$, với a_0 và a_1 là các số phức (ở đây từ “*monic*” có nghĩa là hệ số của x có lũy thừa cao nhất trong đa thức, tức là x^2 , bằng 1). Đa thức này có hai nghiệm, cũng là các số phức, và đảo lại những nghiệm này xác định một đa thức *monic* bậc hai duy nhất. Các số phức có thể được coi là các điểm trên mặt phẳng (xem Chương 9), do vậy một đa thức *monic* bậc hai với hai nghiệm phân biệt thì cũng là một cặp hai điểm phân biệt trên mặt phẳng.

Tương tự, một đa thức *monic* bậc n , $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, với n nghiệm phức phân biệt thì cũng chính là một tập hợp n điểm phân biệt trên mặt phẳng - tức các nghiệm của nó. Cố định một đa thức như thế, chẳng hạn như: $(x - 1)(x - 2)\dots(x - n)$, với các nghiệm là 1, 2, 3,...

n . Một đường trong không gian của các đa thức như vậy, bắt đầu và kết thúc tại đa thức $(x - 1)(x - 2) \dots (x - n)$, có thể được hình dung như một bện với n sợi, mỗi sợi là quỹ đạo của một nghiệm cụ thể. Do vậy ta thấy rằng nhóm bện B_n là nhóm cơ bản của không gian các đa thức bậc n với các nghiệm phân biệt (xem chương 14).

^[23] Với mỗi chỗ chồng chéo của hai sợi dây, ta gán cho nó $+1$ nếu sợi đi xuống từ bên trái nằm bên dưới sợi đi xuống từ bên phải; ta gán -1 nếu xảy ra điều ngược lại. Chẳng hạn, xét bện sau:



Khi cộng những con số này lại (+1 và -1) trên tất cả những chỗ chồng chéo, ta thu được số chồng chéo của bên đã cho. Nếu chúng ta có thể xoắn vặn sợi dây, chúng ta luôn cộng hay trừ đi cùng một lượng +1 cũng như -1 chồng chéo, do vậy tổng số chồng chéo không thay đổi. Điều này có nghĩa là tổng số chồng chéo là *hoàn toàn xác định*: nó không thay đổi khi ta xoắn vặn bên.

[24] Chú ý rằng tổng số chồng chéo của một bên thu được bằng cách cộng hai bên bằng với tổng số chồng chéo của hai bên đó. Bởi vậy, phép cộng hai bên có tổng số chồng chéo bằng 0 sẽ lại là một bên với tổng số chồng chéo bằng 0. Nhóm con giao hoán tử B'_n bao gồm tất cả các bên như vậy. Theo một nghĩa chính xác hơn, nó là phần không giao hoán lớn nhất của nhóm bên B_n .

[25] Khái niệm số Betti có nguồn gốc ban đầu trong hình học topo, lĩnh vực toán học nghiên cứu những tính chất nổi bật của các dạng hình học. Các số Betti của một dạng hình học đã cho, như một đường tròn hoặc một mặt cầu, chẳng hạn, tạo hành một chuỗi các con số, $b_0, b_1, b_2, \dots$ mỗi số trong đó có thể bằng 0 hoặc một số tự nhiên. Ví dụ, đối với một không gian phẳng, như một đường thẳng, một mặt phẳng, v.v thì $b_0 = 1$, và tất cả các số Betti khác đều bằng 0. Nói chung, b_0 là số các thành phần liên thông của dạng hình học đó. Đối với đường tròn, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, và tất cả các số Betti còn lại bằng 0. Thực tế, b_1 , số Betti đầu tiên, bằng 1 phản ánh sự tồn tại của một thành phần một chiều không tầm thường. Với mặt cầu, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, và các số Betti khác đều bằng 0. Ở đây b_2 phản ánh sự tồn tại của thành phần hai chiều không tầm thường.

Các số Betti của nhóm bên B_n được định nghĩa như là số Betti của không gian các đa thức monic bậc n , với n nghiệm phân biệt. Các số Betti của nhóm con giao hoán tử B'_n là các số Betti của một không gian có liên quan mật thiết. Nó bao gồm tất cả các đa thức monic bậc n , với n là số nghiệm phân biệt và thêm một tính chất đó là biệt thức của

chúng (bình phương của tích tất cả các hiệu giữa tất cả các cặp nghiệm) nhận một giá trị cố định khác 0 (chẳng hạn, ta có thể nói rằng giá trị đó bằng 1). Ví dụ, biệt thức của đa thức $x^2 + a_1x + a_0$ bằng $a_1^2 - 4a_0$, và cũng có một công thức tương tự cho mọi số n .

Từ định nghĩa đó ta suy ra rằng biệt thức của một đa thức bằng 0 nếu và chỉ nếu nó có nghiệm bội. Bởi vậy, biệt thức cho ta một ánh xạ từ không gian tất cả các đa thức monic bậc n với n nghiệm phân biệt tới mặt phẳng phức bỏ đi điểm 0. Như vậy, ta thu được một “thớ” của không gian này trên mặt phẳng phức bỏ đi gốc tọa độ. Số Betti của B'_n phản ánh thông tin về topo của bất kỳ thớ nào trong số đó (xét trong không gian topo thì chúng là như nhau), trong khi số Betti của B_n phản ánh thông tin về topo của toàn bộ không gian. Khao khát hiểu được topo của những thớ này đã tạo động lực khiến Varchenko giao bài toán này cho tôi ngay từ ban đầu. Để biết thêm về các số Betti và các khái niệm liên quan như đồng điều và đối đồng điều, độc giả có thể đọc các cuốn sách nhập môn sau:

William Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Springer, 1995.

Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

Chương 6. NHÀ TOÁN HỌC TẬP SỰ

^[26] Một số người suy đoán rằng Fermat có thể đã bị bọm khi để lại những dòng ghi bên lề cuốn sách cổ. Tôi thì không nghĩ như vậy; tôi cho rằng ông đã thực sự mắc một sai lầm gì đó. Cho dù thế nào, chúng ta cũng phải biết ơn ông - mấy dòng ghi ngăn ngủi của ông bên lề sách rõ ràng đã có một ảnh hưởng tích cực tới sự phát triển của toán học.

[27] Chính xác hơn, tôi đã chứng minh rằng với mỗi ước số d của n , số Betti thứ q , với $q = n(d - 2)/d$, bằng $\varphi(d)$, và với mỗi ước số d của $n - 1$, số Betti thứ q , với $q = (n - 1)(d - 2)/d$, cũng bằng $\varphi(d)$. Tất cả các số Betti khác của B'_n bằng 0.

[28] Năm 1985, Mikhail Gorbachev lên nắm quyền, và ngay sau đó ông đã đưa ra chính sách *perestroika*. Trong chừng mực mà tôi biết, việc phân biệt đối xử mang tính hệ thống đối với các thí sinh Do Thái ở kỳ tuyển vào *Mekh-Mat* như tôi đã trải qua đã chấm dứt vào khoảng năm 1990.

[29] S. Zdravkovska, và P. Duren, *Golden Years of Moscow Mathematics*, American Mathematical Society, 1993, trang 221.

[30] Nhà toán học Yuly Ilyashenko đã biện luận rằng sự kiện này là một chất xúc tác cho sự xuất hiện của chính sách bài Do Thái ở *Mekh-Mat*, trong bài phỏng vấn có tựa đề là *The black 20 years at Mekh-Mat*, công bố trên trang Polit.ru ngày 28 tháng 7 năm 2009:

[http: / / www.polit.ru/ article /2009/07/28/ ily ashenko2](http://www.polit.ru/article/2009/07/28/ilyashenko2)

[31] Câu hỏi là tìm xem có bao nhiêu cách để ghép đôi các cặp cạnh của một đa giác đều $4n$ cạnh lại với nhau để thu được một diện Riemann có giống là n . Trong chương 9, chúng ta sẽ thảo luận một cách cụ thể để làm điều đó khi chúng ta đồng nhất các cạnh đối diện của đa giác lại với nhau.

Chương 7. LÝ THUYẾT THỐNG NHẤT LỚN

[32] Giả sử tồn tại các số tự nhiên m và n sao cho $\sqrt{2} = m/n$. Ta có thể giả sử rằng các số m và n là nguyên tố cùng nhau mà không hề làm giảm tính tổng quát; tức là chúng không đồng thời chia hết cho bất kỳ số tự nhiên nào ngoài 1. Nếu không, chúng ta có thể viết $m = dm'$ và n

= dn' và như vậy $\sqrt{2} = m'/n'$. Quá trình này có thể được lặp lại, nếu cần, cho tới khi ta thu được hai số nguyên tố cùng nhau.

Do vậy, ta giả sử rằng $\sqrt{2} = m/n$, với m, n là hai số nguyên tố cùng nhau. Bình phương cả hai vế đẳng thức trên, ta được $2 = m^2/n^2$. Nhân cả hai vế với n^2 , ta có $m^2 = 2n^2$. Từ đây suy ra rằng m là số chẵn vì nếu nó lẻ thì m^2 cũng lẻ, điều này mâu thuẫn với công thức trên.

Nếu m chẵn, thì $m = 2p$ với p là số tự nhiên nào đó. Thay vào công thức trên ta thu được $4p^2 = 2n^2$, do vậy $n^2 = 2p^2$. Nhưng như thế có nghĩa là n cũng phải là số chẵn, theo cùng cách lý luận ta đã sử dụng để chứng tỏ m chẵn. Do vậy cả m và n đều chẵn, điều này mâu thuẫn với giả sử của chúng ta rằng m và n nguyên tố cùng nhau. Do đó hai số m, n như thế không tồn tại.

Đây là một ví dụ tốt về “phép chứng minh bằng phản chứng”. Ta bắt đầu với mệnh đề đối ngược với điều mà chúng ta đang cố gắng chứng minh (trong trường hợp này, chúng ta bắt đầu với giả định rằng $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, điều đối ngược với mệnh đề mà ta cần chứng minh.) Nếu điều này suy ra một mệnh đề sai (trong trường hợp của ta nó suy ra rằng cả m và n đều là số chẵn, mặc dù ta đã giả sử rằng chúng là nguyên tố cùng nhau), khi đó ta kết luận rằng mệnh đề mà chúng ta đưa ra ban đầu cũng là sai. Do vậy, điều mà ta muốn chứng minh (tức $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỉ) là đúng. Ta sẽ sử dụng lại phương pháp này trong chương 8: trước tiên, khi chúng ta thảo luận về phép chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat), và sau đó, như trong chú thích 6, khi chúng ta đưa ra phép chứng minh của Euclid rằng có nhiều vô hạn các số nguyên tố.

^[33] Ví dụ ta hãy nhân hai số sau $1/2 + \sqrt{2}$ và $3 - \sqrt{2}$. Đơn giản ta chỉ cần phá ngoặc:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)(3 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Nhưng $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ nên bằng cách nhóm những số hạng đồng dạng, chúng ta thu được đáp số sau:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Đây là một số có cùng dạng với hai số ban đầu, nên nó thuộc hệ thống số mới của chúng ta.

^[34] Chúng ta chỉ xét những đối xứng của hệ thống số của ta mà tương thích với các phép toán cộng và nhân, như là 0 chuyển thành 0, 1 chuyển thành 1, nghịch đảo cộng tính thành nghịch đảo cộng tính và nghịch đảo nhân tính thành nghịch đảo nhân tính. Nhưng nếu 1 chuyển thành 1 thì $2 = 1+1$ cũng phải chuyển thành 2. Như thế, tất cả các số tự nhiên được giữ nguyên, và những nghịch đảo cộng tính, nhân tính của chúng cũng vậy. Do đó tất cả các số hữu tỉ đều bất biến dưới tác động của những đối xứng đó.

^[35] Dễ thấy rằng đối xứng này tương thích với phép cộng, phép trừ, phép nhân và phép chia. Ta sẽ thử với phép cộng. Xét hai số khác nhau trong hệ thống số mới của chúng ta là:

$$x + y\sqrt{2} \quad \text{and} \quad x' + y'\sqrt{2},$$

Với x, y, x', y' là các số hữu tỉ. Cộng chúng lại, ta được:

$$(x + y\sqrt{2}) + (x' + y'\sqrt{2}) = (x + x') + (y + y')\sqrt{2}.$$

Ta có thể áp dụng đối xứng của ta lên chúng và thu được:

$$x - y\sqrt{2} \quad \text{and} \quad x' - y'\sqrt{2},$$

Bây giờ nếu cộng chúng lại với nhau:

$$(x - y\sqrt{2}) + (x' - y'\sqrt{2}) = (x + x') - (y + y')\sqrt{2}.$$

Ta thấy rằng kết quả thu được đúng bằng số ta nhận được khi áp dụng đối xứng lên tổng ban đầu:

$$(x + x') + (y + y')\sqrt{2} \mapsto (x + x') - (y + y')\sqrt{2}.$$

Nói cách khác ta có thể áp dụng đối xứng này lên từng số rồi cộng chúng lại. Hoặc ta có thể cộng chúng lại trước, sau lấy đối xứng lên tổng. Kết quả thu được sẽ như nhau. Đây chính là ngụ ý khi ta nói đối xứng của ta là *tương thích* với phép toán cộng. Tương tự như vậy, ta có thể kiểm tra rằng đối xứng của ta cũng tương thích cả với các phép toán trừ, nhân và chia.

^[36] Ví dụ, trong trường hợp trường số thu được bằng cách gộp thêm $\sqrt{2}$ vào trường số hữu tỉ, nhóm Galois bao gồm hai phần tử: phần tử đơn vị và đối xứng hoán đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Ký hiệu phần tử đơn vị là I và đối xứng hoán đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ là S .

Công thức cụ thể cho phép toán hợp thành hai đối xứng này có dạng:

$$I \circ I = I, \quad I \circ S = S, \quad S \circ I = S,$$

Và công thức thú vị nhất là:

$$S \circ S = I$$

Thật vậy, nếu chúng ta hoán đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ rồi làm như thế một lần nữa, kết quả cuối cùng sẽ là phép đồng nhất:

$$x + y\sqrt{2} \mapsto x - y\sqrt{2} \mapsto x - (-y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}.$$

Chúng ta đã mô tả một cách đầy đủ nhóm Galois của trường số này: nó bao gồm hai phần tử, I và S , và hợp thành của chúng được cho bởi các công thức trên.

^[37] Vài năm trước đó, Niels Henrik Abel đã chứng tỏ được rằng có một phương trình bậc năm mà không giải được bằng căn thức (Joseph Louis Lagrange và Paolo Ruffini cũng đã có những đóng góp quan trọng trong đó). Tuy nhiên, chứng minh của Galois lại tổng quát hơn và mang tính cốt lõi hơn. Để biết thêm về nhóm Galois và lịch sử phong phú của việc giải các phương trình đa thức, mời xem *Mario Livio, The Equation That Couldn't be Solved*, Simon & Schuster, 2005. (Bản dịch Việt ngữ của Phạm Văn Thiều với nhan đề **Ngôn ngữ của đối xứng** - NXB Trẻ, 2014)

^[38] Tổng quát hơn, xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số hữu tỉ a, b, c . Các nghiệm x_1 và x_2 của nó được cho bởi công thức:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{and} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nếu biệt thức $b^2 - 4ac$ không phải là bình phương của một số hữu tỉ, thì các nghiệm này không phải là số hữu tỉ. Do đó, nếu ta gộp các nghiệm này vào trường số hữu tỉ, ta sẽ có một trường số mới. Nhóm các đối xứng của trường số mới này cũng bao gồm hai phần tử: phần tử đơn vị và đối xứng hoán đổi hai nghiệm x_1 và x_2 . Nói cách khác, đối xứng này hoán đổi

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

và

$$-\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Nhưng để mô tả nhóm Galois, chúng ta không cần viết ra các công thức tường minh cho các nghiệm. Thực vậy, vì bậc của đa thức bằng 2, nên chúng ta biết rằng có hai nghiệm, và ký hiệu chúng là x_1 và x_2 . Khi đó ta có:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Phá ngoặc ra, ta được

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

do vậy

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$$

Ta cũng có

$$(x_1)^2 = -\frac{c + bx_1}{a}$$

bởi vì x_1 là một nghiệm của phương trình trên. Bởi vậy, nếu biết số không phải là bình phương của một số hữu tỉ, thì trường số thu được qua việc gộp thêm x_1 và x_2 vào trường số hữu tỉ bao gồm tất cả các số có dạng $\alpha + \beta x_1$, với α, β là các số hữu tỉ. Dưới tác động của đối xứng hoán đổi x_1 và x_2 , số $\alpha + \beta x_1$ trở thành:

$$\alpha + \beta x_2 = \left(\alpha - \beta \frac{b}{a} \right) - \beta x_1.$$

Đối xứng này tương thích với các phép toán cộng, v.v. bởi vì cả x_1 và x_2 đều cùng là nghiệm của một phương trình với các hệ số hữu tỉ. Ta nhận được thông tin rằng nhóm Galois của trường số này bao gồm đối xứng đồng nhất và đối xứng hoán đổi x_1 và x_2 . Tôi nhấn mạnh rằng chúng ta không sử dụng bất kỳ kiến thức nào về cách biểu diễn x_1 và x_2 theo a, b và c .

^[39] Để minh họa quan điểm này, hãy xét, chẳng hạn phương trình $x^3 = 2$. Một trong những nghiệm của nó là căn bậc ba của 2 ($\sqrt[3]{2}$). Hai nghiệm còn lại, là các số phức, $\sqrt[3]{2}\omega$ và $\sqrt[3]{2}\omega^2$, với

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{-1}$$

(xem phần thảo luận về số phức trong chương 9). Trường số nhỏ nhất bao gồm ba nghiệm này cũng phải chứa bình phương của chúng:

$$\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2})^2, \sqrt[3]{4}\omega$$

cũng như các tỉ số của chúng là ω và ω^2 . Do vậy, có vẻ như để xây dựng trường số này, ta phải gộp thêm tám số vào trường các số hữu tỉ. Tuy nhiên, ta còn có một hệ thức:

$$1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

cho phép chúng ta biểu diễn ω qua $1 + \omega$:

$$\omega^2 = -1 - \omega$$

Từ đó ta cũng có:

$$\sqrt[3]{2}\omega^2 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\omega, \quad \sqrt[3]{4}\omega^2 = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}\omega.$$

Bởi vậy để thu được trường số của ta, chúng ta chỉ cần gộp 5 số vào trường các số hữu tỉ: đó là

$$\omega, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{4}$$

và

$$\sqrt[3]{4}\omega$$

Do vậy, một phần tử tổng quát của trường số này, gọi là trường phân rã của phương trình $x^3 = 2$, sẽ là một tổ hợp của 6 thành phần: một số hữu tỉ cộng với một số hữu tỉ nhân với $(0$ cộng với 1 số hữu tỉ nhân với $\sqrt[3]{2}$, v.v. Hãy so sánh nó với trường phân rã của $x^2 = 2$, bao gồm hai phần tử: một số hữu tỉ cộng với một số hữu tỉ nhân với $\sqrt{2}$.

Ta đã thấy ở bên trên rằng, các phần tử thuộc nhóm Galois của trường phân rã của phương trình $x^2 = 2$ hoán vị hai nghiệm của phương trình này, $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Có hai hoán vị như vậy: một hoán đổi hai nghiệm này và phần tử đơn vị.

Tương tự như vậy, với bất kỳ phương trình nào có hệ số hữu tỉ, chúng ta định nghĩa trường phân rã của nó là trường số thu được bằng cách gộp tất cả các nghiệm vào trường số hữu tỉ. Bằng suy luận giống như Chú thích 3 ở trên, bất kỳ đối xứng nào của trường số này tương thích với các phép toán cộng và nhân, cũng giữ nguyên các số hữu tỉ. Bởi thế, dưới tác động của một đối xứng như vậy, bất kỳ nghiệm nào của phương trình này cũng chuyển thành một nghiệm khác. Do đó ta thu được một hoán vị các nghiệm. Trong trường hợp của phương trình $x^3 = 2$, có ba nghiệm đã liệt kê ở trên. Dưới tác động của mỗi hoán vị, nghiệm đầu tiên, $\sqrt[3]{2}$, chuyển thành nghiệm bất kỳ trong ba nghiệm; nghiệm thứ hai, $\sqrt[3]{2}\omega$, chuyển thành một trong hai nghiệm còn lại; và khi đó nghiệm thứ ba, $\sqrt[3]{2}\omega^2$ phải chuyển thành nghiệm còn lại (một hoán vị phải là 1-1 để có nghịch đảo). Bởi vậy, có thể có $3.2 = 6$ hoán vị cho ba nghiệm này. Các hoán vị này lập thành một nhóm, và hóa ra nhóm này là tương ứng 1-1 với nhóm Galois của trường phân rã của phương trình $x^3 = 2$. Do đó, ta thu được một mô tả tường minh về nhóm Galois thông qua phép hoán vị các nghiệm.

Trong tính toán ở trên, ta đã sử dụng các công thức cụ thể cho các nghiệm của phương trình. Nhưng cũng có thể đưa ra một cách lập luận tương tự cho một phương trình bậc ba bất kỳ với hệ số hữu tỉ, mà không cần công thức cho các nghiệm biểu thị qua các hệ số của nó. Kết quả thu được như sau: ký hiệu các nghiệm của phương trình này là x_i ,

x_2, x_3 . Giả sử rằng tất cả các nghiệm này là vô tỷ. Tuy nhiên, dễ thấy rằng, biệt thức của phương trình này, được định nghĩa bởi:

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2,$$

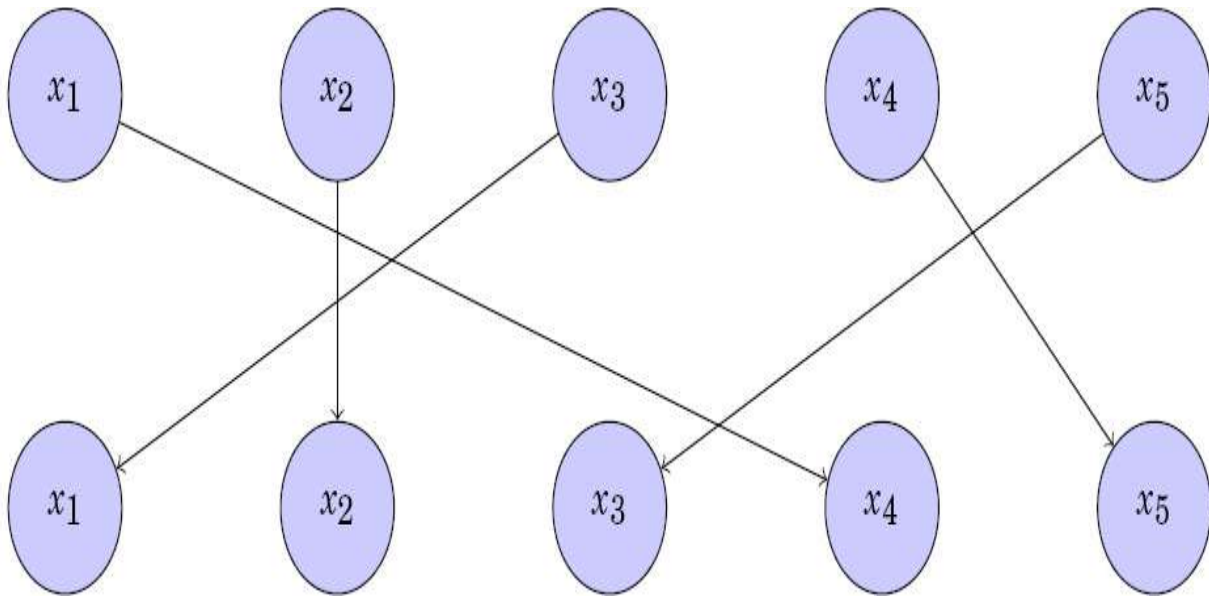
luôn là một số hữu tỉ. Hóa ra nếu căn bậc hai của nó không phải là một số hữu tỉ, thì nhóm Galois của trường phân rã của phương trình đang xét là nhóm tất cả các hoán vị của các nghiệm này (do vậy nó bao gồm sáu phần tử). Nếu căn bậc hai của biệt thức là một số hữu tỉ thì nhóm Galois sẽ bao gồm ba phần tử: phần tử đơn vị, phần tử hoán vị vòng quanh

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$$

và nghịch đảo của nó.

^[40] Chẳng hạn, không khó để chỉ ra rằng một phương trình bậc năm điển hình (tức là, phương trình với $n - 5$), mà có 5 nghiệm, thì nhóm Galois của trường phân rã của nó là nhóm hoán vị 5 con số đó. Mỗi hoán vị là một sự xáo lại 1-1 các con số này, giống như cách làm ở hình dưới đây.

Qua một hoán vị như vậy, nghiệm x_i chuyển thành bất kỳ nghiệm nào trong số 5 nghiệm (có thể thành cả chính nó), ta có 5 cách chọn, do vậy x_2 phải chuyển thành 1 trong số 4 nghiệm còn lại, x_3 thành 3 nghiệm còn lại, v.v. Do đó, kết hợp lại, có $5.4.3.2.1 = 120$ hoán vị, bởi thế nhóm Galois có 120 phần tử.



(Nhóm các hoán vị của một tập n phần tử, còn được biết đến dưới tên gọi nhóm đối xứng của n ký tự, bao gồm $n! = n.(n - 1) \dots 2.1$ phần tử.) Không giống như nhóm Galois của phương trình bậc hai, bậc ba, và bậc bốn, nó không phải là một nhóm giải được. Bởi vậy, theo lập luận của Galois, chúng ta không thể biểu thị được các nghiệm của một phương trình bậc năm tổng quát qua căn thức.

^[41] Hiện tại nó có thể được tìm thấy trên trang web của viện Nghiên cứu cao cấp Princeton.

<http://publications.ias.edu/sites/default/files/weil1.pdf>

^[42] Trích lại từ hình ảnh có thể tìm thấy trong Bộ sưu tập Kỹ thuật số của viện Nghiên cứu cao cấp Princeton:

<http://cdm.itg.ias.edu/cdm/collection/coll12/id/1682/rec/1>

Chương 8. NHỮNG CON SỐ THẦN KỲ

^[43] Robert Langlands, chương *Is there beauty in mathematical theories?* trong *The Many Faces of Beauty*, Ed. by Vittorio Hosle, University of Notre Dame Press, 2013, có thể tìm thấy online ở

<http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf>

[44] Để đọc thêm về giả thuyết này, xem bài báo sâu sắc sau: Barry Mazur, *Conjecture*, Synthèse, số 111, 1997, trang 197-210.

[45] Để biết thêm về lịch sử Định lý cuối cùng của Fermat, xem Simon Singh, *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, Anchor, 1998. Bản dịch Việt ngữ của Phạm Văn Thiều và Phạm Việt Hưng, 2004, NXB Trẻ.

[46] Xem Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Annals of Mathematics, số 141, 1995, trang 443-551.

Richard Taylor và Andrew Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Mathematics, số 141, 1995, trang 554-572.

Họ đã chứng minh giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil trong trường hợp điển hình nhất (gọi là nửa ổn định), trường hợp này hóa ra lại đủ để giải quyết Định lý cuối cùng của Fermat. Một vài năm sau, những trường hợp còn lại của giả thuyết được chứng minh bởi C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond và R. Taylor.

Bởi vì bây giờ nó đã được chứng minh, có lẽ đúng hơn nên gọi giả thuyết Shimura-Taniyama-VVeil là một định lý. Và thực tế, nhiều nhà toán học giờ đã gọi nó là “định lý về tính modular” (*modularity theorem*). Nhưng thói cũ khó sửa, và một vài người, trong đó có tôi, vẫn sử dụng tên gọi cũ của nó. Thật mỉa mai, Định lý cuối cùng của Fermat luôn được nhắc đến như một định lý, mặc dù nó là một giả thuyết. Hẳn nhiên, nguyên do của việc này là vì sự tôn trọng dành cho khẳng định của Fermat rằng ông đã chứng minh được nó.

[47] Nếu N không là một số nguyên tố thì ta có thể viết $N = xy$ với hai số tự nhiên x, y nào đó nằm giữa 1 và $N - 1$. Khi đó x không có nghịch đảo theo modun N . Nói cách khác, không tồn tại số tự nhiên z nào nằm giữa 1 và $N - 1$ sao cho

$$xz = 1 \text{ theo modun } N.$$

Thật vậy, nếu đẳng thức này thỏa mãn thì chúng ta có thể nhân cả hai vế với y và thu được

$$xzy = y \text{ theo modun } N.$$

Nhưng $xy = N$, do vậy vế trái là Nz , có nghĩa là y chia hết cho N . Nhưng khi đó y không thể nằm giữa 1 và $N - 1$ được.

[48] Chứng minh được cho là của Euclid như sau. Ta áp dụng phương pháp “phản chứng” đã sử dụng trong chương này khi thảo luận về việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat.

Giả sử rằng có hữu hạn số nguyên tố, $p_1, p_2, \dots, p_N$. Xét số A thu được bằng cách lấy tích của chúng rồi cộng với 1: $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$. Tôi khẳng định rằng, nó là một số nguyên tố. Ta sẽ chứng minh điều này bằng phản chứng: nếu A không phải là một số nguyên tố, thì nó sẽ chia hết cho một số tự nhiên nào đó ngoài 1 và chính nó. Do vậy nó phải chia hết cho một trong số các số nguyên tố trên - gọi đó là p_i chẳng hạn. Nhưng nếu A chia hết cho p_i , thì $A = 0$ theo modun p_i , trong khi từ cách định nghĩa của A ta lại có $A = 1$ theo modun p_i .

Vậy là ta đã đi tới mâu thuẫn. Điều này có nghĩa là A không chia hết cho số tự nhiên nào ngoài 1 và chính nó. Do đó nó phải là một số nguyên tố.

Nhưng vì A rõ ràng là lớn hơn các số $p_1, p_2, \dots, p_N$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của chúng ta rằng $p_1, p_2, \dots, p_N$ là tất cả các số nguyên tố. Bởi vậy giả định ban đầu của chúng ta cho rằng có một số hữu hạn các số nguyên tố là sai. Do đó có vô hạn các số nguyên tố.

[49] Ta sẽ nói chi tiết điều này: trong một hệ thống số cụ thể, một nghịch đảo nhân tính của một số a là một số b , sao cho $a \cdot b = 1$. Nên, chẳng hạn, trong hệ thống số hữu tỉ, nghịch đảo nhân tính của $3/4$ là $4/3$. Trong hệ thống số mà chúng ta đang xét, nghịch đảo của một số tự nhiên a , nằm giữa 1 và $p - 1$ là một số tự nhiên b cùng nằm trong khoảng đó sao cho $a \cdot b = 1$ theo modun p .

Bất kể hệ thống số mà ta đang xét đến là gì, số 0, phần tử đơn vị của phép cộng, không bao giờ có nghịch đảo nhân tính. Điều đó giải thích tại sao ta lại loại bỏ nó.

[50] Đây là một chứng minh. Ta sẽ chọn một số tự nhiên a nằm giữa 1 và $p - 1$, với p là một số nguyên tố. Hãy nhân a với tất cả các số b khác cùng nằm trong khoảng đó và lấy kết quả theo modun p . Ta sẽ lập một bảng gồm hai cột: ở cột thứ nhất sẽ là số b , và cột thứ hai sẽ là tích $a.b$ theo modun p .

Chẳng hạn với $p = 5$ và $a = 2$, bảng này trông sẽ như sau:

1	2
2	4
3	1
4	3

Ta thấy ngay rằng mỗi số 1, 2, 3, 4 chỉ xuất hiện trong cột bên phải đúng một lần. Khi nhân 2 vào ta thu được cùng một tập hợp các số đó, nhưng chúng bị hoán vị theo một cách nào đấy. Đặc biệt, số 1 xuất hiện ở dòng thứ 3. Điều này có nghĩa là khi ta nhân 3 với 2, ta được 1 theo

modun 5. Nói cách khác, 3 là nghịch đảo của 2 nếu ta dùng số học theo modun 5.

Trong trường hợp tổng quát cũng xảy ra hiện tượng này: nếu chúng ta lập một bảng như trên cho bất kỳ số nguyên tố p và số tự nhiên a nào thuộc tập hợp $1, 2, \dots, p - 1$, thì mỗi một số thuộc tập hợp này sẽ xuất hiện ở cột bên phải chính xác một lần.

Ta sẽ chứng minh điều này, một lần nữa sử dụng thuật chứng minh bằng phản chứng: giả sử rằng điều này không xảy ra. Khi đó một trong các số thuộc tập hợp $1, 2, \dots, p - 1$, gọi nó là n phải xuất hiện ở trong cột hai lần. Điều này có nghĩa là có 2 số trong tập hợp $1, 2, \dots, p - 1$ gọi chúng là c_1 và c_2 (giả sử rằng $c_1 > c_2$), sao cho:

$$a.c_1 = a.c_2 = n \text{ theo modun } p.$$

Nhưng khi đó, ta có:

$$a.c_1 - a.c_2 = a.(c_1 - c_2) = 0 \text{ theo modun } p.$$

Công thức cuối cùng có nghĩa là $a.(c_1 - c_2)$ chia hết cho p . Nhưng điều này là không thể bởi vì p là một số nguyên tố và cả hai số a và $c_1 - c_2$ đều thuộc tập hợp $\{1, 2, \dots, p - 1\}$.

Ta kết luận rằng ở cột bên phải của chúng ta mỗi một trong các số $1, 2, \dots, p - 1$ xuất hiện không quá một lần. Nhưng bởi vì có chính xác $p - 1$ các số như thế và số hàng trong bảng cũng bằng $p - 1$, nên khả năng duy nhất để điều này xảy ra là mỗi số phải xuất hiện chính xác một lần. Nhưng như vậy số 1 sẽ phải xuất hiện đâu đó trong cột bên phải và chỉ duy nhất một lần. Gọi b là số tương ứng ở cột bên trái. Khi đó ta có:

$$a.b = 1 \text{ theo modun } p.$$

Và điều này đã hoàn tất chứng minh.

^[51] Chẳng hạn, ta có thể chia 4 cho 3 trong trường hữu hạn với 5 phần tử:

$$4/3 = 4.3^{-1} = 4.2 = 8 \text{ theo modun } 5.$$

= 3 theo modun 5.

(ở đây ta đã sử dụng một thực tế rằng 2 là nghịch đảo nhân tính của 3 theo modun 5).

^[52] Ta để ý thấy rằng với bất kỳ số a nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1, thì ta có:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots = \frac{1}{1 - a},$$

Điều này có thể dễ dàng chứng minh được bằng cách nhân cả hai vế với $1 - a$. Sử dụng đẳng thức này và ký hiệu $q + q^2$ là a , ta có thể viết lại hàm sinh của dãy Fibonacci:

$$q(1 + (q + q^2) + (q + q^2)^2 + (q + q^2)^3 + \dots)$$

thành:

$$\frac{q}{1 - q - q^2}.$$

Tiếp theo, phân tích $1 - q - q^2$ thành tích các nhân tử tuyến tính, ta tìm được

$$\frac{q}{1 - q - q^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} q \right)^{-1} - \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} q \right)^{-1} \right).$$

Sử dụng đồng nhất thức ở trên một lần nữa, với

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} q$$

ta tìm được hệ số đứng trước q^n trong hàm sinh của chúng ta (tức là F_n) bằng:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Như vậy, chúng ta đã thu được một công thức chính xác cho số Fibonacci thứ n , không phụ thuộc vào những số hạng đứng trước nó.

Chú ý rằng số

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

xuất hiện trong công thức này chính là con số được gọi là *tỉ lệ vàng*. Từ công thức trên ta thấy rằng tỉ lệ F_n/F_{n-1} tiến tới tỉ lệ vàng khi n lớn dần. Để đọc thêm về tỉ lệ vàng và các số Fibonacci, hãy tham khảo Mario Livio, *The Golden Ration (Tỉ lệ vàng)*, Broadway, 2003.

^[53] Tôi làm theo cách trình bày kết quả này trong Richard Taylor, *Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity*, (số học modular: được dẫn đường bởi vẻ đẹp vốn có và óc tò mò của con người), Thư gửi viện Nghiên cứu cao cấp, hè 2012, trang 6-8. Tôi cảm ơn Ken Ribet vì những lời góp ý hữu ích của anh. Theo cuốn sách của André Weil, *Dirichlet Series and Automorphic Forms (Chuỗi Dirichlet và Những dạng tự đẳng cấu)*, Springer Verlag, 1971, phương

trình cubic mà chúng ta thảo luận trong chương này được đề xuất bởi John Tate, theo Robert Fricke.

^[54] Nhóm này là một trong những nhóm được gọi là “nhóm con đồng dư” của một nhóm gọi là $SL_2(\mathbb{Z})$, bao gồm những ma trận 2×2 với các hệ số nguyên, và có định thức bằng 1, tức là mảng các số nguyên:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sao cho $ad - bc = 1$. Phép nhân ma trận được cho bởi công thức chuẩn:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Bây giờ, bất kỳ số phức q nào nằm trong đĩa đơn vị cũng có thể được viết dưới dạng

$$e^{2\pi\tau\sqrt{-1}}$$

với số phức τ nào đó có phần ảo dương: $\tau = x + y\sqrt{-1}$, với $y > 0$ (xem chú thích 12, chương 15). Số q này được xác định duy nhất bởi τ và ngược lại. Do đó, ta có thể mô tả tác động của nhóm SL_2 lên q bằng cách mô tả tác động tương ứng lên τ . Tác động đó được cho bởi công thức:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Nhóm $SL_2(\mathbf{Z})$ (chính xác hơn là thương của nó cho nhóm con hai phần tử bao gồm ma trận đơn vị I và ma trận $-I$) là nhóm các đối xứng của đĩa, được trang bị thêm một metric phi-Euclid đặc biệt, được gọi là mô hình đĩa Poincaré. Hàm của chúng ta là một dạng modular có “trọng số là 2”, có nghĩa là nó bất biến dưới tác động ở trên của một nhóm con đồng dư của $SL_2(\mathbf{Z})$ trên đĩa, nếu chúng ta sửa chính xác tác động này bằng cách nhân hàm số với nhân tử $(c\tau + d)^2$.

Tham khảo Henri Darmon, *A proof of the full Shimura-Taniyama-Weil conjecture is announced*, Notices of the American Mathematical Society, số 46, tháng 12 năm 1999, trang 1397-1441.

Có thể tìm thấy trên Internet tại <http://www.ams.org/notices/199911/comm-darmon.pdf>

[55] Hình này do Lars Madsen sáng tạo ra và được ông cho phép công bố ở đây. Tôi cảm ơn Ian Agol vì đã chỉ cho tôi xem hình này và vì cuộc đối thoại đầy bổ ích với ông.

[56] Tham khảo, Neal Koblitz, *Elliptic curve cryptosystems*, Mathematics of Computation (Toán học tính toán), số 49, năm 1987, trang 203-209.

I. Blake, G. Seroussi, và N. Smart, *Elliptic curves in cryptography*, Cambridge University Press, 1999.

[57] Nói chung, điều này đúng với hầu hết các số nguyên tố p . Cũng có một cặp bất biến phụ gắn với phương trình cubic này (cái được gọi là cái dẫn (*conductor*)), và với dạng modular (cái gọi là bậc), và những bất biến này cũng được bảo toàn trong tương ứng đó. Chẳng hạn, trong trường hợp của phương trình cubic mà chúng ta đang xét, chúng đều

bảng 11. Tôi cũng xin lưu ý rằng mỗi dạng modular xuất hiện ở đây đều có một số hạng hằng bằng 0, hệ số b_1 đứng trước q bằng với 1, và tất cả các hệ số b_n với $n > 1$ đều được xác định bởi hệ số b_p tương ứng với số nguyên tố p .

[58] Cụ thể là, nếu a, b, c là nghiệm của phương trình Fermat $a^n + b^n = c^n$, với n là một số nguyên tố lẻ, thì theo Yves Hellegouarch và Gerhard Frey, xét phương trình cubic:

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

Ken Ribet đã chứng minh được rằng (theo lời khuyên của Frey và một vài kết quả riêng phần của Jean Pierre Serre) phương trình này không thể thỏa mãn giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil. Cùng với trường hợp $n = 4$ (mà thực ra đã được chính bản thân Fermat giải quyết), từ đây suy ra Định lý cuối cùng của Fermat. Thực vậy, bất kỳ một số nguyên $n > 2$ nào cũng có thể được viết dưới dạng $n = mk$, với m hoặc là 4 hoặc là một số nguyên tố lẻ. Bởi vậy việc phương trình Fermat không có nghiệm với những m như vậy cho thấy rằng nó vô nghiệm với mọi $n > 2$.

[59] Goro Shimura, *Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections*, Bullentin of London Mathematical Society, số 21, 1989, trang 193.

[60] Sách đã dẫn (sdd) ở trang 190.

[61] Xem chú thích 1 trang 1302-1303 của bài báo sau về lịch sử phong phú của giả thuyết này: Serge Lang, *Some history of the Shimura-Taniyama conjecture*, Notices of American Mathematical Society, số 42, 1995, trang 1301-1307. Có thể tìm thấy online tại <http://ams.org/notices/199511/forum.pdf>

Chương 9. PHIẾN ĐÁ ROSETTA

^[62] *The Economist*, 20 tháng 8 năm 1998, trang 70.

^[63] Hình ảnh về các diện Riemann trong cuốn sách này được vẽ nhờ phần mềm *Mathematica*®, sử dụng mã mà Stan Wagon đã hảo tâm cung cấp. Chi tiết hơn, xem cuốn sách của anh: Stan Wagon, *Mathematica® in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*, Springer-Verlag, 2010.

^[64] Đây không phải là một định nghĩa chính xác, nhưng nó cho ta một trực quan đúng đắn về các số thực. Để có được một định nghĩa chính xác, chúng ta nên nghĩ về mỗi số thực như một giới hạn của một dãy hội tụ các số hữu tỉ (còn được biết đến dưới tên gọi dãy Cauchy); chẳng hạn, việc chặt cụt khai triển thập phân vô hạn của $\sqrt{2}$ cho ta một dãy như vậy.

^[65] Để làm điều này, hãy đánh dấu một điểm trên đường tròn và đặt đường tròn lên đường thẳng sao cho điểm đánh dấu trên đường tròn tiếp xúc với điểm 0 trên đường thẳng. Sau đó lăn đường tròn sang bên phải sao cho điểm đánh dấu trên đường tròn lại tiếp xúc với đường thẳng một lần nữa (điều này sẽ xảy ra sau khi đường tròn xoay tròn một vòng). Điểm tiếp xúc này giữa đường tròn và đường thẳng sẽ là điểm tương ứng với số p .

^[66] Hình học của các số phức (và vài hệ thống số khác) được giải thích một cách rất đẹp trong cuốn sách của Barry Mazur, *Imagining Number*, Picador, 2004.

^[67] Chính xác hơn, chúng ta sẽ thu được bề mặt của chiếc bánh donut bỏ đi một điểm. Điểm đặc biệt này tương ứng với “nghiệm vô hạn” khi cả x và y tiến tới vô cùng.

^[68] Để có một diện Riemann có giống là g , chúng ta nên đặt một đa thức biến x , bậc $2g + 1$ vào vế phải của phương trình.

^[69] Mối liên kết này giữa đại số và hình học thể hiện tầm nhìn cực kỳ sâu sắc của René Descartes, đã được mô tả lần đầu tiên trong *La Géometrie* (Hình học), một phụ lục trong cuốn *Discours de la Méthode*, xuất bản năm 1637. Đây là những gì mà E.T. Bell đã viết về phương

pháp của Descartes: “Bây giờ tới sức mạnh thực sự của phương pháp của ông. Chúng ta bắt đầu với các phương trình với độ phức tạp tùy ý và diễn giải những tính chất đại số và giải tích của nó bằng ngôn ngữ hình học... Bởi vậy đại số và giải tích chính là những thủy thủ của chúng ta đi tới những đại dương còn chưa được khai phá của ‘không gian’ và ‘hình học’ của nó.” (E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Touch-Stone, 1986, trang 54). Tuy nhiên, chú ý rằng phương pháp của Descartes áp dụng cho nghiệm của các phương trình trên trường số thực, trong khi ở chương này, chúng ta quan tâm đến các nghiệm trên trường hữu hạn và trường số phức.

^[70] Ví dụ, chúng ta đã học được ở chương 8 rằng phương trình cubic $y^2 + y = x^3 - x^2$ có bốn nghiệm theo modun 5. Như vậy, nói một cách ngây thơ thì đường cong tương ứng trên trường hữu hạn với 5 phần tử, có bốn điểm. Nhưng thực tế còn có thêm nhiều cấu trúc nữa bởi vì chúng ta có thể xét các nghiệm nhận giá trị trong những mở rộng khác nhau của trường hữu hạn có 5 phần tử này; chẳng hạn, trường thu được bằng cách gộp thêm nghiệm của phương trình $x^2 = 2$ mà chúng ta đã thảo luận ở chú thích 8 chương 14. Những trường mở rộng này có 5^n phần tử, với $n = 2, 3, 4, \dots$ và do đó chúng ta có một hệ thang bậc các nghiệm lấy giá trị trong các trường hữu hạn này.

Những đường cong tương ứng với các phương trình cubic này được gọi là những “đường cong elliptic”.

^[71] *The Bhagavad-Gita*, Krishna’s Counsel in Time of War, do Barbara Miller dịch, Bantam Classic, 1986.

Cũng rất thú vị khi lưu ý rằng Weil đã sống hai năm ở Ấn Độ vào đầu những năm 30 của thế kỷ trước và ông cũng đã thừa nhận rằng ông chịu ảnh hưởng bởi đạo Hindu.

^[72] Ý tưởng ở đây là cho trước một đường cong trên một trường hữu hạn, chúng ta xét cái gọi là các hàm hữu tỉ trên nó. Những hàm này là tỉ số của hai đa thức. (Chú ý rằng một hàm số như vậy có một “cực” - tức là giá trị của nó không xác định - ở mỗi điểm trên đường cong mà

là nghiệm của đa thức ở mẫu số.) Hóa ra tập tất cả các hàm hữu tỉ trên một đường cong cho trước cũng có những tính chất tương tự như tập các số hữu tỉ, hay một trường số tổng quát hơn, như những trường số mà ta đã thảo luận trong chương 8.

Để giải thích rõ ràng hơn điểm này, xét những hàm hữu tỉ trên các diện Riemann; sự tương tự này vẫn sẽ còn có hiệu lực. Chẳng hạn, xét mặt cầu. Sử dụng phép chiếu nổi (hay lập thể - *stereographic projection*), chúng ta có thể coi mặt cầu như là hợp của một điểm và một mặt phẳng phức (chúng ta có thể coi điểm dư này như là điểm biểu diễn vô cực). Ký hiệu $t = r + s + \sqrt{-1}$ là tọa độ trên mặt phẳng phức. Khi đó mỗi đa thức $P(t)$ với hệ số phức là một hàm số trên mặt phẳng. Những đa thức này tương tự với các số nguyên trong lý thuyết số. Một hàm hữu tỉ trên mặt cầu là tỉ số giữa hai đa thức không có nhân tử chung $P(t)/Q(t)$. Những hàm hữu tỉ này là tương tự với các số hữu tỉ, tức các số biểu diễn bởi tỉ số m/n của các số nguyên không có thừa số chung. Tương tự như vậy, các hàm hữu tỉ trên một diện Riemann tổng quát hơn là tương tự với các phân tử của một trường số tổng quát hơn.

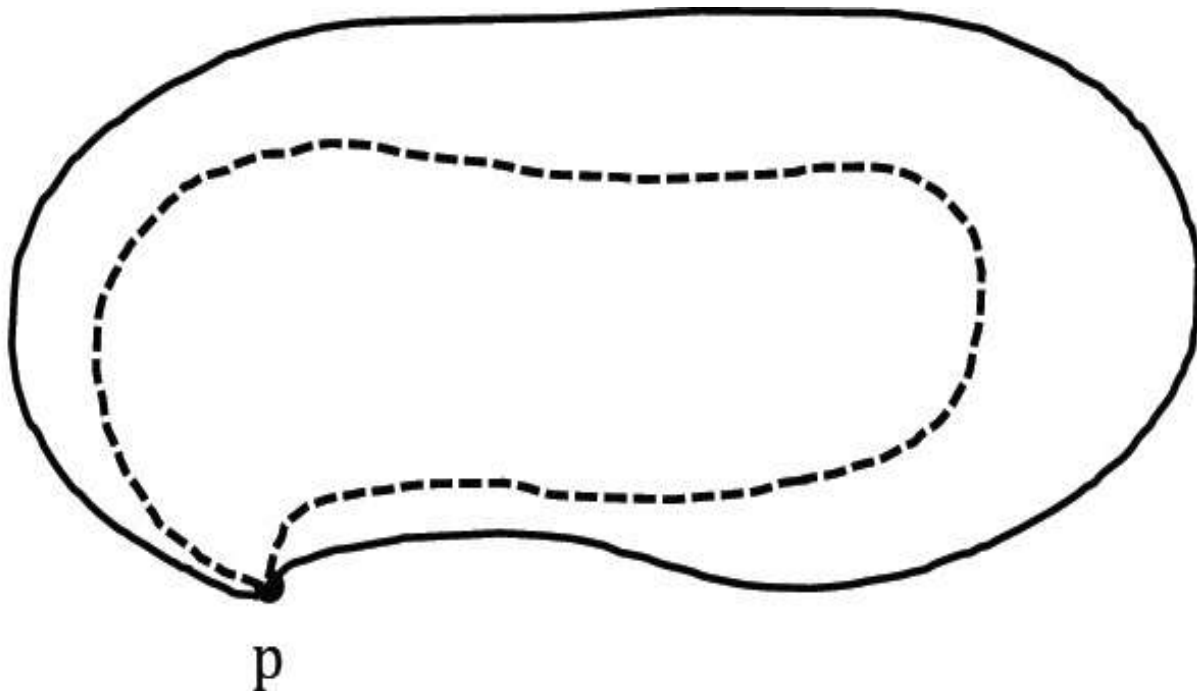
Sức mạnh của sự tương tự này nằm ở thực tế rằng đối với rất nhiều kết quả về trường số, sẽ có nhiều kết quả tương tự cũng đúng với các hàm hữu tỉ trên những đường cong trên các trường hữu hạn, và ngược lại. Việc phát hiện và/hoặc chứng minh một mệnh đề cụ thể nào đó cho một trong số chúng, đôi khi sẽ trở nên dễ dàng hơn. Khi đó sự tương tự sẽ cho chúng ta biết rằng một mệnh đề tương tự cũng phải đúng đối với cái kia. Đây đã từng là một trong những phương tiện mà Weil và các nhà toán học khác sử dụng để đưa ra những kết quả mới.

^[73] Đã từng có ba giả thuyết Weil được chứng minh bởi Bernard Dwork, Alexander Grothendieck, và Pierre Deligne.

^[74] Có một sự rườm rà trong định nghĩa này. Để giải thích điều đó, xét hai đường trên mặt phẳng vẽ ở hình dưới đây, một đường liền nét và một đường đứt nét. Rõ ràng là một trong số chúng có thể được biến dạng liên tục về đường kia mà không bị đứt, gãy. Cho nên sẽ là hợp lý

và kinh tế hơn nếu ta nói rằng hai đường cong đóng mà có thể biến dạng về nhau theo cách này là tương đương với nhau. Khi làm như vậy, ta đã làm giảm mạnh số lượng các phần tử trong nhóm của chúng ta.

Thực tế quy tắc này cũng tương tự như quy tắc chúng ta đã sử dụng trong định nghĩa của nhóm bện trong chương 5. Ở đó, ta cũng đã phát biểu rằng hai bện là tương đương nếu chúng có thể biến dạng (hay rút) về nhau mà không cắt hay khâu các sợi dây.



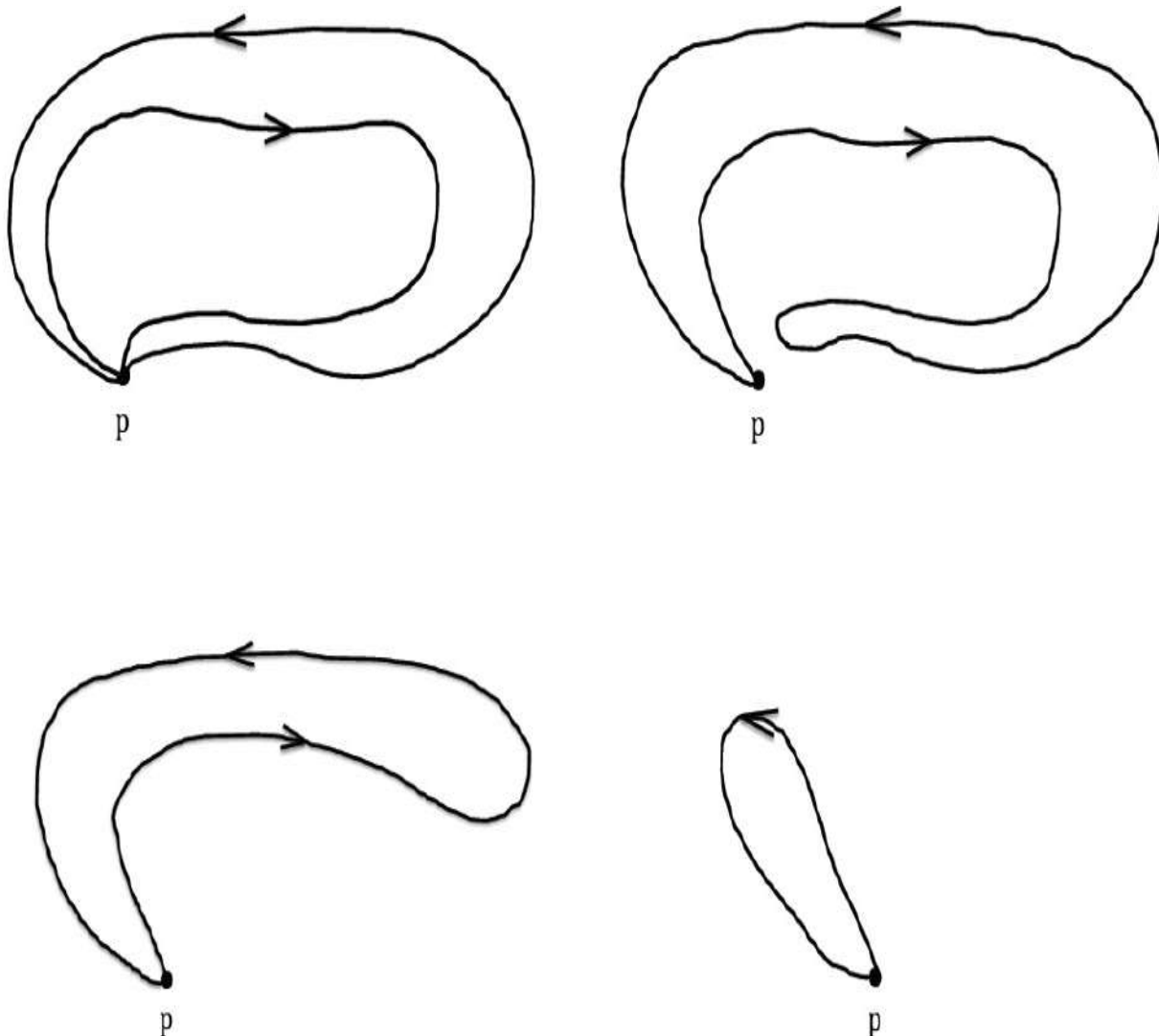
Do vậy ta định nghĩa nhóm cơ bản của diện Riemann của chúng ta như là một nhóm mà các phần tử của nó là các đường đóng bắt đầu và kết thúc ở cùng một điểm P , với một yêu cầu phụ là chúng ta sẽ đồng nhất những đường đóng mà có thể được biến dạng liên tục về nhau.

Chú ý rằng nếu diện Riemann của chúng ta là liên thông, điều mà chúng ta ngầm hiểu trong suốt cả quá trình này, thì sự lựa chọn điểm quy chiếu P là không quan trọng: các nhóm cơ bản gắn với những điểm quy chiếu P khác nhau sẽ tương ứng 1-1 với nhau (chính xác hơn là chúng sẽ “đẳng cấu” với nhau).

^[75] Phần tử đơn vị sẽ là “đường hằng”. Nó không bao giờ rời điểm được đánh dấu P . Thực ra, sẽ hữu ích hơn nếu coi mỗi đường đóng là một quỹ đạo của một hạt, bắt đầu và kết thúc ở cùng một điểm P .

Đường hằng sẽ là quỹ đạo của một hạt đứng yên tại điểm P . Rõ ràng nếu chúng ta cộng bất kỳ đường nào với đường hằng, theo nghĩa đã diễn giải trong phần chính văn của cuốn sách, thì ta vẫn thu được đường ban đầu.

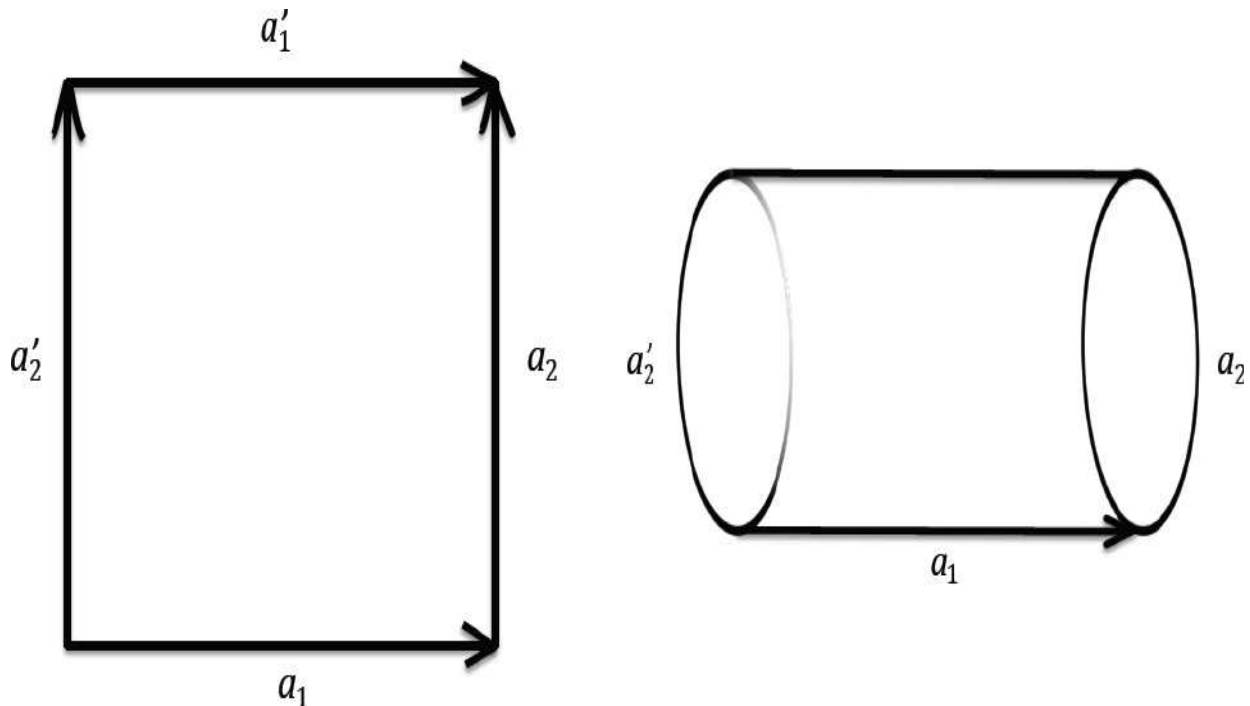
Đường nghịch đảo của một đường cho trước sẽ là chính đường cong đó, nhưng đi theo hướng ngược lại. Để kiểm tra xem đó có thực là đường nghịch đảo không, ta cộng một đường với nghịch đảo của nó. Ta thu được một đường mới đi theo cùng một hành trình hai lần, nhưng theo hai hướng ngược nhau. Chúng ta có thể liên tục biến dạng đường cong “kép” mới này về đường hằng. Đầu tiên ta bứt nhẹ một trong hai đường. Đường mới có thể bị co lại về một điểm, như được chỉ ra ở hình dưới đây.



^[76] Một lựa chọn khác, như ta đã thảo luận ở chú thích 10, chương 5, nhóm bên B_n có thể được mô tả như là nhóm cơ bản của không gian các đa thức monic bậc n với n nghiệm phân biệt. Chúng ta chọn đa thức $(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ với các nghiệm $1, 2, \dots, n$ (chúng là các “đỉnh” của bên), như là điểm tham chiếu p .

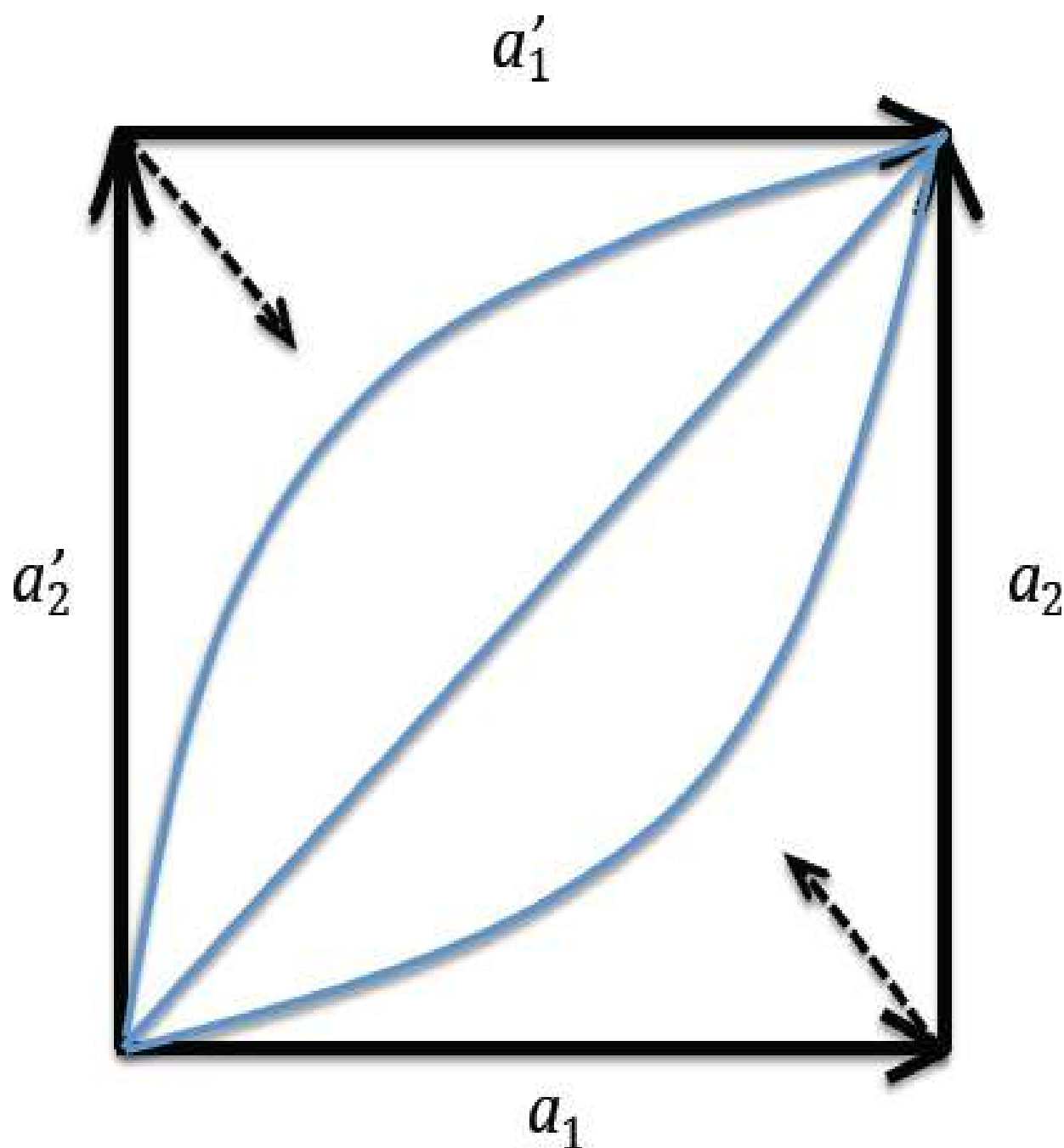
^[77] Để thấy rằng hai đường giao hoán với nhau, chú ý rằng ta có thể thu được mặt xuyên bằng cách dán các cạnh đối diện của một hình vuông (đa giác với bốn đỉnh). Khi chúng ta dán hai cạnh nằm ngang a_1 , a'_1 lại với nhau, ta thu được một hình trụ.

Dán hai đường tròn ở hai đáy của hình trụ lại với nhau (đó chính là kết quả của hai cạnh thẳng đứng của hình vuông, a_2 và a'_2 , sau khi thực hiện dán lần thứ nhất), ta thu được một xuyên. Bây giờ ta thấy rằng hai cạnh a_1 và a_2 trở thành hai đường đóng độc lập trên xuyên. Chú ý rằng trên xuyên cả bốn góc của hình vuông cùng biểu diễn một điểm, do vậy hai đường này trở thành đóng - chúng bắt đầu và kết thúc ở cùng điểm P trên xuyên. Ta cũng có $a_1 = a'_1$ bởi vì chúng ta đã dán chúng lại với nhau, và tương tự như vậy, $a_2 = a'_2$.



Trên hình vuông, nếu ta đi theo đường và sau đó đi theo đường a_2 , nó sẽ đưa ta từ một đỉnh tới đỉnh đối diện. Đường thu được sẽ là $a_1 + a_2$. Nhưng chúng ta cũng có thể đi giữa hai đỉnh này theo một đường khác, đầu tiên là đường a'_2 , sau đó là a'_1 , đường cũng giống như a_1 . Đường thu được sẽ là $a'_1 + a'_2$. Sau khi dán hai cạnh đối diện của hình vuông lại, a'_1 trở thành a_1 và a'_2 trở thành a_2 . Do đó $a'_1 + a'_2 = a_2 + a_1$.

Bây giờ để ý rằng cả $a_1 + a_2$ và $a_2 + a_1$ đều có thể biến dạng về đường chéo, một đường thẳng nối hai đỉnh đối diện, như được vẽ ở hình dưới đây (hai mũi tên nét đứt chỉ cách làm biến dạng mỗi một trong hai đường).



Điều này có nghĩa là hai đường $a_1 + a_2$ và $a_2 + a_1$ làm nảy sinh cùng một phần tử trong nhóm cơ bản của xuyên. Chúng ta đã chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1$$

Từ đây suy ra rằng nhóm cơ bản của xuyên có một cấu trúc đơn giản: chúng ta có thể biểu diễn các phần tử của nó dưới dạng $Ma_1 + N(a_2)$, với $(a_1$ và a_2 là hai đường tròn trên xuyên vẽ trong hình trang 145

trong phần chính văn của cuốn sách, còn M, N là các số nguyên. Phép cộng trong nhóm cơ bản trùng với phép cộng thông thường của các biểu diễn này.

[78] Cách dễ nhất để mô tả nhóm cơ bản của diện Riemann có giống g dương (tức là có g lỗ) là một lần nữa lại nhận thấy rằng ta có thể thu được nó bằng cách dán các cạnh đối diện của một đa giác - nhưng bây giờ là với $4g$ đỉnh. Chẳng hạn, hãy dán các cạnh đối diện của một bát giác (một đa giác với tám đỉnh) lại với nhau. Có bốn cặp cạnh đối diện trong trường hợp này và ta đồng nhất các cạnh trong từng cặp với nhau. Kết quả thu được từ phép dán này khó tưởng tượng hơn trong trường hợp của xuyên, nhưng người ta đã biết rằng trong trường hợp này sẽ thu được một diện Riemann có giống là 2 (bề mặt của chiếc bánh ngọt Đan Mạch).

Điều này có thể được sử dụng để mô tả nhóm cơ bản của một diện Riemann tổng quát một cách tương tự như ta đã mô tả nhóm cơ bản của một xuyên. Như trong trường hợp của xuyên, ta xây dựng $2g$ phần tử trong nhóm cơ bản của diện Riemann với giống g , bằng cách đi theo đường qua $2g$ cạnh liên tiếp của đa giác (mỗi một trong $2g$ cạnh còn lại sẽ được đồng nhất với một trong số đó). Ký hiệu chúng là $a_1, a_2, \dots, a_{2g}$. Chúng sẽ sinh ra nhóm cơ bản của diện Riemann của ta, theo nghĩa rằng ta có thể thu được bất kỳ phần tử nào của nhóm này bằng cách cộng chúng lại với nhau, có thể là vài lần. Chẳng hạn, với $g = 2$, ta có phần tử sau: $a_3 + 2a_1 + 3a_2 + a_3$. (Nhưng chú ý rằng ta không thể viết nó thành $2a_3 + 2a_1 + 3a_2$, bởi vì a_3 không giao hoán với a_2 và a_1 , do vậy ta không thể chuyển a_3 ở phần xa nhất bên phải về bên trái.)

Cũng hệt như trong trường hợp của xuyên, bằng cách biểu diễn đường đi nối hai đỉnh đối diện của đa giác theo hai cách khác nhau, ta thu được một hệ thức giữa chúng, tổng quát hóa hệ thức giao hoán trong trường hợp xuyên:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2g-1} + a_{2g} = a_{2g} + a_{2g-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Hóa ra đây lại thực sự là hệ thức duy nhất giữa các phần tử này, do vậy ta thu được một cách mô tả cô đọng nhóm cơ bản: nó được sinh ra bởi các phần tử $a_1, a_2, \dots, a_{2g}$, thỏa mãn hệ thức trên.

^[79] Để giải thích chính xác hơn điều này, xét tất cả các hàm hữu tỉ trên diện Riemann của chúng ta, theo nghĩa của chú thích 11 ở trên. Chúng cũng tương tự như các số hữu tỉ. Nhóm Galois liên quan được định nghĩa là nhóm các đối xứng của trường số thu được bằng cách gộp các nghiệm của các phương trình đa thức như $x^2 = 2$ vào trường số hữu tỉ. Tương tự, ta có thể gộp nghiệm của các phương trình đa thức vào các hàm hữu tỉ trên một diện Riemann X . Hóa ra khi làm thế ta thu được các hàm hữu tỉ trên một diện Riemann X' khác, là một cái “phủ” của X ; tức là ta có một ánh xạ $X' \rightarrow X$ với các thớ hữu hạn. Trong tình huống đó, nhóm Galois bao gồm các đối xứng của X' để cho tất cả các điểm của X không thay đổi. Nói cách khác, các đối xứng này tác động dọc theo các thớ của ánh xạ $X' \rightarrow X$.

Bây giờ chú ý rằng nếu chúng ta có một đường đóng trên diện Riemann X , bắt đầu và kết thúc ở cùng một điểm P trên X , ta có thể lấy mỗi điểm của X' trong thớ trên P và “đi theo” nó dọc theo đường này. Khi quay trở lại, nói chung ta sẽ tới một điểm khác trong thớ trên P , do vậy ta thu được một phép biến đổi của thớ này. Đây là hiện tượng đơn đạo, mà ta sẽ thảo luận chi tiết hơn trong chương 15. Phép biến đổi thớ này có thể được truy nguyên về một phần tử của nhóm Galois. Do vậy, ta thu được một mối liên kết giữa nhóm cơ bản và nhóm Galois.

Chương 10. CÙNG HỘI CÙNG THUYỀN

^[80] Từ “đặc biệt” ở đây hàm ý về những phép biến đổi trực giao bảo toàn sự định hướng - chúng chính xác là những phép quay của mặt cầu. Một ví dụ của một phép biến đổi trực giao mà không bảo toàn sự định hướng (và do vậy, không thuộc $SO(3)$) là phép đối xứng gương qua một

mặt phẳng tọa độ. Nhóm $SO(3)$ có liên quan mật thiết với nhóm $SO(3)$, mà chúng ta đã thảo luận trong chương 2 có liên quan tới các quark (nhóm unita đặc biệt của không gian ba chiều). Nhóm $SU(3)$ được định nghĩa tương tự như nhóm $SO(3)$; chỉ khác là chúng ta thay thế không gian ba chiều *thực* bởi không gian ba chiều *phức*.

[81] Có một cách khác để thấy rằng đường tròn là một chiều đó là nhớ lại rằng nó có thể được coi là tập các nghiệm thực của phương trình $x^2 + y^2 = 1$, như chúng ta đã thảo luận trong chương 9. Do vậy đường tròn là tập hợp các điểm trên mặt phẳng bị hạn chế bởi một phương trình. Do đó số chiều của nó là số chiều của mặt phẳng, bằng 2, trừ đi số các phương trình, bằng 1.

[82] Trích dẫn này xuất hiện trong phần chú thích cuốn sách của Duchamp tên là *À l'Infinitif*, được Gerald Holton trích lại trong *Henri Poincaré, Marcel Duchamp and innovation in science and art*, Leonardo, số 34, 2001, trang 130.

[83] Linda Dalrymple Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, MIT Press, 2013, trang 493.

[84] Gerald Holton, sđd, trang 134.

[85] Charles Darwin, *Autobiographies*, Penguin Classics, 2002, trang 30.

[86] Chi tiết hơn, xem tại, Shing-Tung Yau và Steve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, 2010.

[87] Hóa ra chiều của nhóm này bằng $n(n - 1)/2$. Nói cách khác, để biểu thị phần tử của nhóm này, ta cần $n(n - 1)/2$ tọa độ độc lập (trong trường hợp $n = 3$ chúng ta cần $3(3 - 1)/2 = 3$ tọa độ, như ta đã thấy trong phần chính văn của cuốn sách).

[88] Về mặt toán học, mỗi vòng có thể coi như là hình ảnh của một “ánh xạ” đặc biệt từ đường tròn tới không gian ba chiều, tức là một quy tắc gán cho mỗi điểm φ trên đường tròn một điểm $f(\varphi)$ trong không gian ba chiều. Chúng ta chỉ xét những ánh xạ “trơn”. Nói chung, điều này có

nghĩa là vòng của chúng ta không hề có các góc hay các cạnh rõ rệt, và do vậy nó trông như vòng được vẽ ở hình trong phần chính văn của cuốn sách.

Tổng quát hơn, một ánh xạ từ đa tạp S tới đa tạp M là một quy tắc gán cho mỗi điểm s của S một điểm thuộc M , gọi là ảnh của s .

^[89] Tham khảo thêm, Brian Greene, *The Elegant Universe*, Vintage Books, 2003. *Bản dịch tiếng Việt của Phạm Văn Thiều nhan đề **Giai điệu dây và Bản giao hưởng vũ trụ**, NXB Trẻ, 2003.*

^[90] Chính xác hơn, một vòng trong $SO(3)$ là một tập hợp $\{f(\varphi)\}$ các phần tử của $SO(3)$, được tham số hóa bởi góc φ (tức là một tọa độ trên đường tròn). Cho tiếp một vòng thứ hai, là một tập hợp $g(\varphi)$, ta lấy hợp thành hai phép quay này, $f(\varphi).g(\varphi)$ đối với mỗi φ . Khi đó ta sẽ có một tập hợp mới $\{f(\varphi).g(\varphi)\}$, cũng là một vòng trong $SO(3)$. Do vậy, với mỗi cặp vòng trong $SO(3)$, chúng ta có thể tạo ra một vòng thứ ba. Đây là quy tắc nhân của nhóm vòng. Phần tử đơn vị của nhóm vòng là vòng được tập trung ở phần tử đơn vị của $SO(3)$, tức là $f(\varphi)$ là phần tử đơn vị của $SO(3)$ với mọi φ . Vòng nghịch đảo với vòng $\{f(\varphi)\}$ là vòng $\{f(\varphi)^{-1}\}$. Dễ dàng kiểm tra được rằng tất cả các tiên đề của một nhóm đều thỏa mãn. Do đó, không gian vòng của $SO(3)$ quả thật là một nhóm.

^[91] Để thấy được điều này, hãy xét ví dụ đơn giản hơn sau: không gian vòng của mặt phẳng. Mặt phẳng có hai tọa độ, x và y . Bởi vậy, một vòng trên mặt phẳng thì cũng giống như một tập hợp các điểm trên mặt phẳng với các tọa độ $x(\varphi)$ và $y(\varphi)$ với góc φ nằm giữa 0 và 360 độ (chẳng hạn, các công thức $x(\varphi) = \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = \sin(\varphi)$ biểu diễn một vòng đặc biệt: đó là đường tròn bán kính là 1, tâm ở gốc tọa độ). Bởi vậy, để xác định cụ thể một vòng, ta cần phải xác định cụ thể một tập vô hạn những cặp các số, $\{x(\varphi), y(\varphi)\}$, một cặp cho mỗi góc φ . Điều đó giải thích tại sao không gian vòng của mặt phẳng lại có vô hạn chiều. Cùng nguyên do như vậy không gian vòng của bất kỳ đa tạp hữu hạn chiều nào cũng là vô hạn chiều.

^[92] Được trích lại từ R.E. Langer, *René Descartes*, The American Mathematics Monthly, tập 44, số 8, tháng 10 năm 1937, trang 508.

^[93] Mặt phẳng tiếp xúc là mặt phẳng gần với mặt cầu nhất trong số tất cả các mặt phẳng đi qua điểm tiếp xúc. Nó chỉ chạm vào mặt cầu tại điểm ấy, trong khi nếu chúng ta dịch chuyển mặt phẳng này, thậm chí rất nhỏ thôi (để nó vẫn đi qua điểm cố định đó trên mặt cầu), ta sẽ nhận được một mặt phẳng cắt mặt cầu tại nhiều điểm hơn.

^[94] Theo định nghĩa, đại số Lie của một nhóm Lie cho trước là một không gian phẳng (như là một đường thẳng, một mặt phẳng, v.v.) gần với nhóm Lie này nhất trong số tất cả các không gian phẳng đi qua một điểm trong nhóm Lie tương ứng với phần tử đơn vị.

^[95] Một đường tròn tổng quát thì không có điểm đặc biệt nào. Nhưng *nhóm đường tròn* thì có: đó là phần tử đơn vị của nhóm này, cũng chính là điểm đặc biệt trên đường tròn. Nó cần phải cụ thể để biến một đường tròn thành một nhóm.

^[96] Đây là một định nghĩa chính xác hơn về không gian vector:

Một khi ta chọn một hệ tọa độ trong không gian phẳng n -chiều, là ta đồng nhất các điểm trong không gian này với các bộ n -số thực, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, các số x_i là tọa độ của một điểm. Đặc biệt, có một điểm đặc biệt là $(0, 0, \dots, 0)$ mà tất cả các tọa độ bằng 0. Đây là gốc tọa độ.

Bây giờ cố định một điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ta định nghĩa một đối xứng của không gian đang xét, gửi một điểm bất kỳ khác $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ tới $(z_1 + x_1, z_2 + x_2, \dots, z_n + x_n)$. Về phương diện hình học, ta có thể coi đối xứng này như là một phép dịch không gian n -chiều theo hướng của đoạn thẳng định hướng nối gốc tọa độ với điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Đối xứng này được gọi là một *vector* và nó thường được biểu diễn bằng đoạn thẳng có hướng này. Có một tương ứng 1-1 giữa các điểm của không gian phẳng n -chiều này và các vector. Ký hiệu vector này là $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vì nguyên do này, không gian phẳng với một hệ tọa độ cố

định có thể coi là không gian của các vector. Do đó ta gọi nó là *không gian vector*.

Lợi thế của tư duy qua các vector so với các điểm đó là ở chỗ chúng ta có hai phép toán tự nhiên trên vector. Thứ nhất là phép cộng các vector, làm cho không gian vector trở thành một nhóm. Như đã giải thích trong chương 2, các đối xứng có thể được hợp thành, và như vậy chúng tạo thành một nhóm. Phép hợp thành của các đối xứng dịch chuyển vừa mô tả ở đoạn trước cho chúng ta quy tắc cộng vector như sau:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle = \langle y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n \rangle.$$

Phần tử đơn vị trong nhóm các vector là vector $(0, 0, \dots, 0)$. Nghịch đảo cộng tính của vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là vector $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Thứ hai là phép toán nhân vector với các số thực. Kết quả của phép nhân vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với một số thực k là vector $(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$.

Như vậy, một không gian vector mang hai cấu trúc: phép cộng, thỏa mãn các tính chất của một nhóm, và phép nhân với các số. Những cấu trúc này phải thỏa mãn những tính chất tự nhiên.

Bây giờ, bất kỳ không gian tiếp xúc nào cũng là một không gian vector, do vậy, bất kỳ đại số Lie nào cũng là một không gian vector.

Những gì được mô tả ở trên là khái niệm không gian vector trên trường số thực. Thật vậy, tọa độ của các vector là những số thực, và do vậy ta có thể nhân các vector với các số thực. Nếu ta thay thế các số thực bằng các số phức trong mô tả này thì ta nhận được khái niệm không gian vector trên trường số phức.

^[97] Phép toán trên một đại số Lie thường được ký hiệu bởi ngoặc vuông, như vậy nếu

$\vec{a}$

và

$$\vec{b}$$

là hai vector của một đại số Lie (cũng là một không gian vector, như đã giải thích ở chú thích trên), thì kết quả của phép toán này trên chúng được ký hiệu bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}]$$

Nó thỏa mãn các tính chất sau:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}], [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], [k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$$

với k là số bất kỳ, và cái gọi là đồng nhất thức Jacobi:

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0.$$

^[98] Tích có hướng của hai vector

$$\vec{a}$$

và

$$\vec{b}$$

trong không gian ba chiều là một vector, được ký hiệu là

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

vuông góc với mặt phẳng chứa

$$\vec{a}$$

và

$$\vec{b}$$

và có độ dài bằng tích độ dài của

$$\vec{a}$$

và

$$\vec{b}$$

nhân với sin của góc giữa chúng, sao cho bộ ba vector

$$\vec{a}, \vec{b},$$

và

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

tạo thành một tam diện thuận (điều này cũng có thể được biểu diễn bằng cái gọi là quy tắc bàn tay phải).

^[99] Chẳng hạn, đại số Lie của nhóm Lie $SO(3)$ là không gian vector ba chiều. Bởi vậy, đại số Lie của nhóm vòng của $SO(3)$ bao gồm tất cả các vòng trong không gian ba chiều này. Tích có hướng trong không gian ba chiều cho ta một cấu trúc đại số Lie trên những vòng này. Do vậy, cho trước hai vòng, ta có thể tạo ra vòng thứ ba, thậm chí mặc dù không dễ gì mô tả nó bằng lời.

^[100] Chính xác hơn, một đại số Kac-Moody là một mở rộng của đại số Lie của một nhóm vòng bằng một không gian một chiều. Chi tiết

hơn, tham khảo Victor Kac, *Infinite dimensional Lie Algebras*, xuất bản lần thứ 3, Cambridge University Press, 1990.

^[101] Những mô hình với đối xứng đại số Visoro được gọi là các lý thuyết trường bảo giác, được các nhà vật lý người Nga là Alexander Belavin, Alexander Polyakov, và Alexander Zamolodchikov đề xuất đầu tiên vào năm 1984. Công trình có ảnh hưởng sâu rộng của họ được dựa trên những kết quả của Feigin và Fuchs, cũng như Victor Kac.

^[102] Những mô hình nổi tiếng nhất được biết đến trong số đó là các mô hình Wess-Zumino-Witten. Chi tiết hơn, xem Edward Frenkel và David Ben-Zvi, *Vertex Algebras*, xuất bản lần thứ 2, American Mathematical Society, 2004.

^[103] Những “trường lượng tử” này chẳng liên quan gì đến các “trường số” hay các “trường hữu hạn” mà chúng ta đã thảo luận ở các chương trước. Đây là một ví dụ về sự lộn xộn về thuật ngữ, mặc dù ở một số các ngôn ngữ khác không có sự lộn xộn như vậy, chẳng hạn, người Pháp, dùng từ “champs” cho trường lượng tử và “corps” cho các trường số và trường hữu hạn.

Chương 11. CHINH PHỤC ĐỈNH CAO

^[104] Đây là một cách xây dựng chính xác: giả sử chúng ta có một phần tử thuộc nhóm vòng của $SO(3)$, đó là một tập hợp $\{g(\varphi)\}$ các phần tử của $SO(3)$, được tham số hóa bởi góc φ (tọa độ trên đường tròn). Mặt khác, một phần tử thuộc không gian vòng của mặt cầu là một tập hợp các điểm trên mặt cầu được tham số hóa bởi φ . Cho trước các $\{g(\varphi)\}$ và $\{f(\varphi)\}$ như vậy, ta xây dựng một phần tử khác thuộc không gian vòng của mặt cầu như là tập $g(\varphi)\{f(\varphi)\}$. Điều này có nghĩa là chúng ta áp dụng phép quay $g(\varphi)$ cho điểm $f(\varphi)$ của mặt cầu, một cách độc lập đối với mỗi φ . Do đó ta thấy rằng mỗi phần tử thuộc nhóm vòng của $SO(3)$ làm nảy sinh một đối xứng của không gian vòng của mặt cầu.

^[105] Một điểm của một đa tạp cờ là một tập hợp: một đường thẳng trong một không gian n -chiều cố định, một mặt phẳng chứa đường thẳng đó, một không gian ba chiều chứa mặt phẳng đó, v.v. cho tới siêu phẳng ($n - 1$) chiều chứa tất cả chúng.

Đối chiếu điều này với các không gian xạ ảnh mà tôi đã học trước tiên: một điểm của không gian xạ ảnh chỉ là một đường thẳng trong không gian n -chiều, không hơn.

Trong trường hợp đơn giản nhất, $n = 2$, không gian cố định của chúng ta là hai chiều, và do vậy lựa chọn duy nhất mà chúng ta có chỉ là đường thẳng thôi (chỉ có một mặt phẳng, đó chính là bản thân không gian). Bởi vậy, trong trường hợp này, đa tạp cờ cũng chính là không gian xạ ảnh, và hóa ra nó trùng với mặt cầu. Một điểm quan trọng cần lưu ý đó là ở đây chúng ta xét các đường thẳng, mặt phẳng, v.v. trong một không gian phức (chứ không phải không gian thực), và chỉ xét những gì đi qua gốc tọa độ của không gian n -chiều cố định của chúng ta mà thôi.

Ví dụ tiếp theo là $n = 3$, do đó chúng ta có một không gian ba chiều. Trong trường hợp này không gian xạ ảnh bao gồm tất cả các đường thẳng trong không gian ba chiều này, nhưng đa tạp cờ lại bao gồm các cặp: một đường thẳng và một mặt phẳng chứa nó (ở đây chỉ có một không gian ba chiều mà thôi). Bởi vậy, trong trường hợp này có sự khác biệt giữa không gian xạ ảnh và đa tạp cờ. Chúng ta có thể nghĩ về đường thẳng như là cột cờ và mặt phẳng là mặt chứa lá cờ. Vì thế mới có cái tên “đa tạp cờ”.

^[106] Boris Feigin và Edward Frenkel, *A family of representations of affine Lie algebras*, Russian Mathematical Surveys, tập 43, số 5, 1988, trang 221-222.

Chương 12. CÂY TRI THỨC

^[107] Mark Saul, *Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathematics*, Notices of the American Mathematical Society, số 46, tháng 11 năm 1999, trang 1217-1220.

^[108] Sau này, tôi đã biết được rằng Gelfand cũng cộng tác với các bác sĩ tim mạch (vì cùng một lý do như Yakov Isaevich cộng tác với các bác sĩ tiết niệu), và cũng sử dụng thành công cách tiếp cận này tới nghiên cứu y học.

Chương 14. BUỘC LẠI CÁC BÓ TRI THỨC

^[109] Một định nghĩa chính xác của không gian vector đã giới thiệu trong chú thích 17, chương 10.

^[110] Trong trường hợp phạm trù các không gian vector, cấu xạ từ không gian vector V_1 tới không gian vector V_2 là phép biến đổi tuyến tính từ V_1 tới V_2 . Đó là những ánh xạ f từ V_1 tới V_2 sao cho

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$

đối với hai vector

$\vec{a}$

và

$\vec{b}$

bất kỳ trong V_1 và

$$f(k \cdot \vec{a}) = k \cdot f(\vec{a})$$

với vector

$\vec{a}$

bất kỳ trong V và số k bất kỳ. Đặc biệt các cấu xạ từ một không gian vector V tới chính nó là các phép biến đổi tuyến tính từ V tới chính nó. Nhóm đối xứng của V bao gồm những cấu xạ có nghịch đảo như thế.

^[111] Chẳng hạn, xem Benjamin C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientist*, MIT Press, 1991.

Joseph Goguen, *A categorical manifesto*, Mathematical Structures in Computer Science, tập 1, 1991, 49-67.

Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2010.

^[112] Mời tham khảo http://haskell.org/haskellwiki/Category_theory và những tài liệu tham khảo đề cập trong đó.

^[113] Mời tham khảo Masaki Kashiwara và Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 2010.

^[114] Tính chất đáng ngạc nhiên này của số học theo modun các số nguyên tố có một giải thích đơn giản nếu ta nhìn nó từ quan điểm của lý thuyết nhóm. Xét những các phần tử khác 0 của trường hữu hạn: $1, 2, \dots, p - 1$. Chúng tạo thành một nhóm đối với phép nhân. Thật vậy, phần tử đơn vị đối với phép nhân là số 1: nếu chúng ta nhân bất kỳ phần tử a nào với 1, ta lại nhận được a . Và mỗi phần tử có một nghịch đảo, như đã giải thích ở chú thích 8, chương 8: với a bất kỳ thuộc tập hợp $\{1, 2, \dots, p - 1\}$, có một phần tử b thỏa mãn $a \cdot b = 1$ theo modun p .

Nhóm này có $p - 1$ phần tử. Có một thực tế tổng quát, đúng với bất kỳ nhóm hữu hạn G nào với N phần tử: lũy thừa bậc N của mỗi phần tử a trong nhóm đó đều bằng phần tử đơn vị (mà chúng ta sẽ ký hiệu là 1),

$$a^N = 1$$

Để chứng minh điều này, xét các phần tử sau trong nhóm G : $1, a, a^2, \dots$. Bởi vì nhóm G là hữu hạn nên những phần tử này không thể đều là khác nhau. Tất phải có sự lặp lại. Gọi k là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a^k = 1$ hoặc bằng a^j với j nào đó trong khoảng $1, \dots, k-1$. Xét trường hợp thứ hai. Ký hiệu a^{-1} là nghịch đảo của a , tức là $a \cdot a^{-1} = 1$ và lấy lũy thừa bậc j của nó $(a^{-1})^j$. Nhân cả hai vế của phương trình $a^k = a^j$ với $(a^{-1})^j$ vào bên phải. Mỗi lần gặp $a \cdot a^{-1}$ ta thay nó bằng 1. Nhân với 1 không làm thay đổi kết quả, nên ta luôn có thể bỏ nó đi khỏi tích. Nên ta thấy rằng mỗi a^{-1} triệt tiêu một a . Do đó, vế trái sẽ bằng a^{k-j} , và vế phải bằng 1. Ta thu được $a^{k-j} = 1$. Nhưng $k-j$ lại nhỏ hơn k , điều này mâu thuẫn với cách chọn k của chúng ta. Bởi vậy, sự lặp lại đầu tiên trong dãy trên phải có dạng $a^k = 1$, do đó các phần tử $1, a, a^2, \dots, a^{k-1}$, tất cả phải là khác nhau. Điều này có nghĩa là chúng tạo thành một nhóm k phần tử. $\{1, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$. Nó là nhóm con của nhóm G ban đầu với N phần tử, theo nghĩa nó là tập hợp các phần tử con của G sao cho kết quả của phép nhân hai phần tử bất kỳ trong tập hợp này lại là một phần tử của tập con ấy, trong đó có chứa phần tử đơn vị của G và chứa các phần tử nghịch đảo của nó.

Bây giờ, ta đã biết rằng số phần tử của bất kỳ nhóm con của một nhóm nào luôn là ước của số phần tử thuộc nhóm đó. Mệnh đề này ngày nay được gọi là định lý Lagrange. Tôi sẽ để các bạn tự chứng minh nó (hoặc đơn giản là tra cứu nó trên Google).

Áp dụng định lý Lagrange cho nhóm con $\{1, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$, gồm k phần tử. Ta thấy rằng k phải là ước của N , số lượng các phần tử của G . Do đó, $N = km$ với m là một số tự nhiên nào đó. Nhưng vì $a^k = 1$, ta thu được:

$$a^N = (a^k) \cdot (a^k) \dots (a^k) = 1 \cdot 1 \dots 1 = 1$$

đây chính là điều phải chứng minh.

Giờ hãy quay lại nhóm $\{1, 2, \dots, p-1\}$ với phép toán tương ứng là phép nhân. Nó có $p-1$ phần tử. Đây chính là nhóm G của chúng ta, do

vậy $N = p - 1$. Áp dụng kết quả tổng quát trong trường hợp này, ta có $a^{p-1} = 1$ theo modun p với mọi a thuộc $\{1, 2, \dots, p - 1\}$. Nhưng khi đó:

$$a^p = a \cdot a^{p-1} = a \cdot 1 = a \text{ theo modun } p$$

Dễ thấy rằng công thức cuối cùng luôn đúng với số nguyên a bất kỳ, nếu ta đặt quy định rằng:

$x = y$ theo modun p bất cứ khi nào $x - y = rp$ với số nguyên r nào đó.

Đây chính là mệnh đề của định lý nhỏ Fermat. Fermat đã phát biểu nó lần đầu tiên trong một lá thư gửi cho một người bạn. “Tôi sẽ gửi cho anh một chứng minh,” ông viết, “nhưng tôi sợ rằng nó quá dài.”

^[115] Cho đến bây giờ, chúng ta đã xét số học theo modun số nguyên tố p . Tuy nhiên, hóa ra có một mệnh đề tương tự với định lý Fermat nhỏ trong số học theo modun số tự nhiên n bất kỳ. Để giải thích nó là gì, tôi phải nhắc lại hàm Euler φ , mà chúng ta đã thảo luận trong phần liên quan đến nhóm bện trong chương 6. (Trong đề tài về nhóm bện của mình, tôi đã phát hiện ra rằng những số Betti của các nhóm bện được biểu thị qua hàm này.) Nhắc lại rằng $\varphi(n)$ là số các số tự nhiên nằm giữa 1 và $n - 1$ và là nguyên tố cùng nhau với n ; tức là không có ước chung với n (ngoài 1). Chẳng hạn, nếu n là một số nguyên tố, thì tất cả các số tự nhiên nằm giữa 1 và $n - 1$ là nguyên tố cùng nhau với n , và do vậy $\varphi(n) = n - 1$.

Bây giờ, tương tự của công thức $a^{p-1} = 1$ theo modun p mà chúng ta vừa chứng minh trong Chú thích trước là công thức:

$$a^{\varphi(n)} = 1 \text{ theo modun } n$$

Công thức này đúng với mọi số tự nhiên n và số tự nhiên a bất kỳ là nguyên tố cùng nhau với n . Nó có thể được chứng minh bằng cách giống hệt chúng ta đã làm ở trên: ta xét tập hợp tất cả các số tự nhiên nằm giữa 1 và $n - 1$ và là nguyên tố cùng nhau với n . Có tất cả $\varphi(n)$ số như thế. Dễ thấy rằng chúng tạo thành một nhóm với phép nhân. Do đó, theo định lý Lagrange, với bất kỳ phần tử nào trong nhóm này, lũy thừa bậc $\varphi(n)$ của nó cũng bằng với phần tử đơn vị.

Chẳng hạn, xét trường hợp n là tích của hai số nguyên tố. Tức là $n = pq$, với p và q là hai số nguyên tố phân biệt. Trong trường hợp này, các số không là nguyên tố cùng nhau với n là những số hoặc chia hết cho p hoặc chia hết cho q . Những số chia hết cho p có dạng pi , với $i = 1, 2, \dots, q - 1$ (có $q - 1$ các số như vậy), còn những số chia hết cho q có dạng qj , với $j = 1, 2, \dots, p - 1$ (có $p - 1$ số như vậy). Do đó ta thấy rằng:

$$\varphi(n) = (n - 1) - (q - 1) - (p - 1) = (p - 1)(q - 1)$$

Bởi vậy, ta có:

$$a^{(p-1)(q-1)} = 1 \text{ theo modun } pq$$

đối với bất kỳ số tự nhiên a nào không chia hết cho p và q . Và dễ thấy rằng công thức:

$$a^{1+m(p-1)(q-1)} = a \text{ theo modun } pq$$

đúng với bất kỳ số tự nhiên a và số nguyên m nào.

Phương trình này là cơ sở cho một trong những thuật toán mã hóa được sử dụng rộng rãi nhất, gọi là thuật toán RSA (đặt theo tên Ron Rivest, Adi Shamir, và Leonard Adleman, những người đã mô tả nó vào năm 1977). Ý tưởng ở đây là chúng ta chọn hai số nguyên tố p và q (có nhiều thuật toán khác nhau sinh ra chúng) và gọi n là tích pq . Số tự nhiên n được công khai, nhưng các số nguyên tố p và q thì không. Sau đó ta chọn một số e là nguyên tố cùng nhau với $(p - 1)(q - 1)$. Số này cũng được công khai.

Quá trình mã hóa thực hiện sự chuyển đổi số a bất kỳ (như là số thẻ giao dịch) thành a^e theo modun n .

$$a \rightarrow b = a^e \text{ theo modun } n$$

Hóa ra có một cách rất hiệu quả để tái tạo lại a từ a^e . Cụ thể là ta tìm một số d nằm giữa 1 và $(p - 1)(q - 1)$ sao cho:

$$de = 1 \text{ theo modun } (p - 1)(q - 1)$$

Nói cách khác,

$$de = 1 + m(p - 1)(q - 1)$$

với số tự nhiên m bất kỳ. Khi đó:

$$a^{de} \text{ theo modun } n = \text{theo modun } n = a^{1+m(p-1)(q-1)} \text{ theo modun } n \\ = a \text{ theo modun } n.$$

theo công thức trên.

Do đó, cho trước $b = a^e$, ta có thể tái tạo lại số a ban đầu như sau:

$$b \rightarrow b^d \text{ theo modun } n$$

Tóm lại: ta công khai hai số n và e , nhưng giữ bí mật d . Sự mã hóa được cho bởi công thức:

$$a \rightarrow b = a^e \text{ theo modun } n$$

Ai cũng có thể làm được điều này bởi vì e và n là công khai.

Sự giải mã được cho bởi công thức:

$$b \rightarrow b^d \text{ theo modun } n$$

Áp dụng cho a^e ta thu được số a ban đầu. Nhưng chỉ những ai đã biết số d mới làm được.

Nguyên nhân tại sao đây lại là một sơ đồ mã hóa tốt, đó là bởi vì nếu muốn tìm d , số sẽ giúp bạn tái tạo con số được mã hóa, chúng ta phải biết giá trị của $(p - 1)(q - 1)$. Nhưng để có nó, chúng ta phải biết giá trị của p, q , hai ước số nguyên tố của n . Những số này được giữ bí mật. Với n đủ lớn, sử dụng các phương pháp phân tích ra thừa số đã biết, nó có thể lấy mất nhiều tháng, thậm chí nếu bạn dùng cả một mạng những máy tính cực mạnh, để tìm p và q . Chẳng hạn, vào năm 2009, một nhóm các nhà nghiên cứu sử dụng hàng trăm máy tính song song mới có thể phân tích được ra thừa số nguyên tố những số có 232 chữ số, nhưng đã phải tốn mất tới hai năm (xem [http:// eprint.iacr.org /2010/006.pdf](http://eprint.iacr.org/2010/006.pdf)). Nhưng nếu ai đó có thể đưa ra một phương pháp hiệu quả hơn để “phân tích” các số tự nhiên thành thừa số nguyên tố (chẳng hạn, sử dụng một máy tính lượng tử), thì khi đó chúng ta mới có thể có công cụ để phá vỡ sơ đồ mã hóa này. Điều này giải thích tại sao rất nhiều nghiên cứu lại hướng tới chủ đề phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

^[116] Trong trường hợp các số hữu tỉ, ta thấy rằng các phương trình kiểu $x^2 = 2$ có thể không có nghiệm hữu tỉ, và trong trường hợp này ta có thể xây dựng một hệ thống số mới bằng cách gộp vào các nghiệm này, như $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Từ đó ta thấy rằng việc hoán đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ là một đối xứng của hệ thống số mới này.

Tương tự như vậy, ta có thể xét các đa thức theo biến x , như là $x^2 = 2$, hoặc $x^3 - x = 1$, như là các phương trình trên trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$. Ta đặt câu hỏi là liệu phương trình trên có nghiệm trong trường hữu hạn này hay không. Nếu nó không có nghiệm, thì ta có thể gộp chúng vào trường hữu hạn, theo cùng một cách mà ta đã gộp $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ vào trường số hữu tỉ. Bằng cách này ta có thể tạo thành các trường hữu hạn mới.

Chẳng hạn, nếu $p = 7$, phương trình $x^2 = 2$ có hai nghiệm, 3 và 4, bởi vì:

$$3^2 = 9 = 2 \text{ theo modun } 7, 4^2 = 16 = 2 \text{ theo modun } 7.$$

Chú ý rằng 4 là -3 trong số học theo modun 7 bởi vì $3+4 = 0$ theo modun 7. Do vậy hai nghiệm này của $x^2 = 2$ là đối nhau, như là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ là số đối của nhau vậy. Điều này không có gì đáng ngạc nhiên, vì hai nghiệm của $x^2 = 2$ luôn là số đối của nhau bởi vì nếu $a^2 = 2$, thì $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = 2$. Điều đó có nghĩa là nếu p khác 2, sẽ luôn có hai số của trường hữu hạn bình phương lên cho cùng một kết quả, và chúng là số đối của nhau (nếu p khác 2, thì p sẽ phải là số lẻ, và $-a$ không thể bằng a vì nếu không p sẽ bằng với $2a$). Bởi vậy, chỉ có một nửa số phần tử khác không của trường hữu hạn $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ là các số chính phương.

(Luật tương hỗ nổi tiếng của Gauss mô tả khi nào thì n là một số chính phương theo modun p và khi nào thì không. Điều này vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này, nhưng chỉ cần nói rằng đáp số chỉ phụ thuộc vào giá trị của p theo modun $4n$. Do vậy, chẳng hạn, chúng ta đã biết rằng, $n = 2$ là một số chính phương theo modun 7. Trong trường hợp này, $4n = 8$. Do đó nó cũng là số chính phương theo

modern số nguyên tố p bất kỳ nào miễn là nó bằng 7 theo mod 8, bất kể lớn nhỏ ra sao. Đây quả là một kết quả thật đáng kinh ngạc!)

Nếu $p = 5$, thì $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$, và $4^2 = 1$ theo mod 5. Vì vậy 1 và 4 là các số chính phương theo mod 5, nhưng 2 và 3 thì không. Đặc biệt ta thấy rằng phương trình $x^2 = 2$ không có nghiệm trong trường hữu hạn $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, cũng như trong trường hợp trường các số hữu tỉ. Do đó ta có thể tạo ra một hệ thống số mới, mở rộng trường hữu hạn $(0, 1, 2, 3, 4)$ bằng cách gộp các nghiệm của $x^2 = 2$ vào. Ta cũng sẽ ký hiệu chúng bởi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$ (nhưng ta phải nhớ rằng các số này không giống những số mà chúng ta đã gộp vào trường số hữu tỉ trước đây).

Chúng ta thu được một trường hữu hạn mới bao gồm các số có dạng:

$$a+b\sqrt{2}$$

với a, b thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Bởi vì chúng ta có hai tham số a, b nhận các giá trị 0, 1, 2, 3, 4, ta thấy rằng hệ thống số mới này có $5 \cdot 5 = 25$ phần tử. Tổng quát hơn, bất kỳ mở rộng trường nào của trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ cũng có p^m phần tử, với số tự nhiên m nào đó.

Bây giờ giả sử rằng, chúng ta gộp tất cả nghiệm của các phương trình đa thức vào trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Khi đó ta sẽ thu được một hệ thống số mới gọi là *bao đóng đại số* của trường hữu hạn. Trường hữu hạn ban đầu có p phần tử. Nhưng hóa ra bao đóng đại số của nó lại có vô hạn phần tử. Câu hỏi tiếp theo của chúng ta là nhóm Galois của bao đóng đại số này là gì. Chúng là những đối xứng của bao đóng đại số này, sao cho bảo toàn các phép toán cộng và nhân và gửi các phần tử từ trường hữu hạn p phần tử ban đầu tới chính chúng.

Nếu chúng ta bắt đầu với trường số hữu tỉ, và lấy bao đóng đại số của nó, thì nhóm Galois tương ứng sẽ rất phức tạp. Thực tế, Chương trình Langlands được tạo ra một phần là để mô tả nhóm Galois này và những biểu diễn của nó dưới ngôn ngữ của giải tích điều hòa.

Ngược lại, nhóm Galois của bao đóng đại số của trường hữu hạn $\{0,1,\dots, p-1\}$ hóa ra lại khá đơn giản. Tức là chúng ta đã biết về những đối xứng này rồi: đối xứng Frobenius, chính là phép nâng lên lũy thừa bậc p : $a \rightarrow a^p$. Theo định lý Fermat nhỏ, đối xứng Frobenius bảo toàn tất cả các phần tử của trường hữu hạn p phần tử ban đầu. Nó cũng bảo toàn phép cộng và phép nhân trong bao đóng đại số:

$$(a+b)^p = a^p + b^p, (ab)^p = a^p b^p$$

Do đó, đối xứng Frobenius thuộc nhóm Galois của bao đóng đại số của trường hữu hạn này.

Ký hiệu đối xứng Frobenius là F . Rõ ràng bất kỳ lũy thừa nguyên F^n nào của Frobenius cũng là một phần tử của nhóm Galois. Chẳng hạn, F^2 là phép toán nâng lên lũy thừa bậc p^2 , $a \rightarrow a^{p^2} = (a^p)^p$. Các đối xứng F^n khi n chạy qua tất cả các số nguyên, tạo thành một nhóm con của nhóm Galois mà ta gọi là nhóm Weil, để vinh danh André Weil. Bản thân nhóm Galois lại chính là sự đầy đủ hóa của nhóm Weil; ngoài các lũy thừa nguyên của F , nó còn có một số phần tử là giới hạn của F^n khi n tiến ra vô cùng. Nhưng theo một nghĩa nào đó, đối xứng Frobenius sinh ra nhóm Galois.

Đây là một ví dụ về cách mà đối xứng Frobenius tác động lên các phần tử của bao đóng đại số của một trường hữu hạn. Xét trường hợp $p=5$, và các phần tử của bao đóng đại số có dạng trên:

$$a + b\sqrt{2}$$

với a, b là 0, 1, 2, 3, hoặc 4. Hệ thống số mới này có một đối xứng hoán đổi $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$:

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

tương đồng với những gì đã xảy ra khi chúng ta gộp $\sqrt{2}$ vào trường số hữu tỉ. Điều ngạc nhiên (và không có tương tự trong trường hợp hữu tỉ) đó là đối xứng hoán đổi này hóa ra lại bằng đối xứng Frobenius. Thật vậy, áp dụng đối xứng Frobenius cho $\sqrt{2}$ có nghĩa là nâng nó lên lũy thừa bậc năm và ta thấy rằng:

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

vì $4 \equiv -1$ theo modun 5. Do đó với $p \equiv 5$, đối xứng Frobenius gửi $a + b\sqrt{2}$ tới $a - b\sqrt{2}$. Điều này cũng xảy ra đối với p bất kỳ sao cho phương trình $x^2 = 2$ vô nghiệm trong trường hữu hạn $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

^[117] Một đối xứng của không gian vector n -chiều, gọi chính xác hơn là một phép biến đổi tuyến tính (xem chú thích 2), có thể được biểu diễn bởi một ma trận, tức là một mảng vuông gồm các số a_{ij} , với i và j chạy từ 1 tới n , ở đây n là chiều của không gian vector. Khi đó vết của đối xứng là tổng các phần tử nằm trên đường chéo của ma trận, tức là tổng của tất cả các số a_{ii} , với i chạy từ 1 đến n .

^[118] Trong bối cảnh hiện tại, quay trở lại có nghĩa là tìm, với một hàm f cho trước, một bó mà với mỗi điểm s trên đa tạp của chúng ta, vết của đối xứng Frobenius trên thớ tại s bằng giá trị của f tại s . Bất kỳ số nào cũng có thể coi là vết của một đối xứng của một không gian vector. Điều khó khăn là tổ hợp những không gian này lại thành một tập hợp nhất quán thỏa mãn các tính chất của một bó.

Chương 15. MỘT VỮ ĐIỆU DUYÊN DÁNG

^[119] Một biểu diễn của nhóm Galois G trong một nhóm H là một quy tắc gán cho mỗi phần tử của nhóm Galois một phần tử của H . Nó phải thỏa mãn điều kiện là nếu a, b là hai phần tử của nhóm Galois và $f(a)$ và $f(b)$ là các phần tử của H được gán cho chúng, thì gán cho tích ab trong nhóm Galois phải là tích $f(a)f(b)$ trong H . Một cái tên chính xác hơn ánh xạ này là *đồng cấu* từ nhóm Galois tới H .

^[120] Để làm rõ hơn điều này, ta nhắc lại khái niệm không gian vector trong chú thích 17, chương 10. Như đã thảo luận trong chương 2, một biểu diễn n -chiều của một nhóm cho trước là một quy tắc gán

một đối xứng S_g của một không gian vector n -chiều cho mỗi phần tử g của nhóm này. Quy tắc này phải thỏa mãn tính chất sau: đối với hai phần tử bất kỳ g, h và tích gh của nhóm, đối xứng S_{gh} phải bằng hợp thành của S_g và S_h . Nó cũng đòi hỏi rằng với mỗi phần tử g , ta có

$$S_g(\vec{a} + \vec{b}) = S_g(\vec{a}) + S_g(\vec{b})$$

và

$$S_g(k \cdot \vec{a}) = k \cdot S_g(\vec{a})$$

với mọi vector

$$\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix}$$

và số k bất kỳ. (Những đối xứng như thế gọi là các phép biến đổi tuyến tính, xem chú thích 2, chương 14.)

Nhóm tất cả các phép biến đổi tuyến tính khả nghịch của một không gian vector n -chiều được gọi là nhóm tuyến tính tổng quát. Nó được ký hiệu là $GL(n)$. Do đó, theo định nghĩa ở đoạn trên, một biểu diễn n -chiều của một nhóm Γ cho trước thì cũng chính là một biểu diễn của Γ trong $GL(n)$ (hay một đồng cấu từ Γ tới $GL(n)$, xem chú thích 1).

Chẳng hạn, trong chương 10, chúng ta đã nói về một biểu diễn ba chiều của $SO(3)$. Mỗi phần tử của nhóm $SO(3)$ là một phép quay của mặt cầu, mà ta gán cho nó một phép quay tương ứng của không gian vector ba chiều có chứa mặt cầu đó (hóa ra nó là một phép biến đổi tuyến tính). Điều này cho ta một biểu diễn của $SO(3)$ trong $GL(3)$ (hay một cách tương đương là một đồng cấu từ $SO(3)$ tới $GL(3)$). Một cách trực quan, ta có thể coi một phép quay như là “tác động” lên một không

gian vector ba chiều, quay mỗi vector trong không gian này thành một vector khác.

Ở một vế của quan hệ Langlands (còn được biết đến dưới tên gọi tương ứng Langlands), chúng ta xét biểu diễn n -chiều của nhóm Galois. Ở vế kia, chúng ta có những hàm tự đẳng cấu mà ta có thể sử dụng để xây dựng cái gọi là các biểu diễn tự đẳng cấu của một nhóm $GL(n)$ khác gồm các đối xứng của không gian vector n -chiều, mặc dù không phải là trên trường số thực mà là trên những cái gọi là các adèle. Tôi sẽ không giải thích chúng là gì, nhưng giản đồ sau sẽ cho thấy một cách khái lược quan hệ Langlands trông sẽ như thế nào:

Các biểu diễn n -chiều của nhóm Galois

$\leftrightarrow$

Những biểu diễn tự đẳng cấu của nhóm $GL(n)$

Chẳng hạn, các biểu diễn hai chiều của nhóm Galois sẽ có quan hệ với những biểu diễn của nhóm $GL(2)$, mà ta có thể xây dựng từ các dạng modular đã được thảo luận trong chương 9.

Mỗi quan hệ tổng quát này thu được nhờ thay thế nhóm $GL(n)$ bằng một nhóm Lie tổng quát hơn. Khi đó ở vế phải của quan hệ này ta có những biểu diễn tự đẳng cấu của G thay vì $GL(n)$. Ở vế trái, ta có các biểu diễn của nhóm Galois trong nhóm đối ngẫu Langlands ${}^L G$, thay vì $GL(n)$ (hoặc tương đương, các đồng cấu từ nhóm Galois tới ${}^L G$). Chi tiết hơn, chẳng hạn, xem bài báo tổng quan của tôi: Edward Frenkel, *Lectures on the Langlands Program and conformal field theory*, trong *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II* do P.Cartier, và cộng sự biên tập, trang 387-536, Springer-Verlag, 2007, có thể tìm thấy trên Internet tại:

[http:// www.arxiv.org/pdf/hep-th/0512172.pdf](http://www.arxiv.org/pdf/hep-th/0512172.pdf)

^[121] Xem video tại:

[http:// www.youtube.com/watch?v=CYBqIRM8GiY](http://www.youtube.com/watch?v=CYBqIRM8GiY).

^[122] Điệu múa này được gọi là Binasuan, chẳng hạn xem video này:

[http:// www.youtube/watch=?v=N2T00z_eaTY](http://www.youtube/watch=?v=N2T00z_eaTY)

^[123] Về cách xây dựng đường này và giải thích tại sao nếu đi qua nó hai lần, ta lại thu được đường tầm thường, mời tham khảo, Louis H. Kaumann, *Knots and Physics*, xuất bản lần thứ 3, trang 419-420, World Scientific, 2010.

^[124] Nói cách khác, nhóm cơ bản của $SO(3)$ bao gồm hai phần tử: một là phần tử đơn vị và phần tử còn lại là đường này, mà bình phương của nó là phần tử đơn vị.

^[125] Tên toán học cho nhóm này là $SU(2)$. Nó bao gồm những phép biến đổi “unita đặc biệt” của không gian vector phức hai chiều. Nhóm này là anh em họ với nhóm $SU(3)$, mà ta đã thảo luận trong chương 2, có liên quan đến các quark, nó bao gồm các phép biến đổi unita đặc biệt của không gian vector phức ba chiều.

^[126] Chính xác hơn, việc nâng một đường đóng mà chúng ta đã xây dựng (tương ứng với lần xoay chiếc cốc tròn một vòng đầu tiên) từ nhóm $SO(3)$ tới cái phủ kép của nó, tức nhóm $SU(2)$, sẽ là một đường bắt đầu và kết thúc ở những điểm khác nhau của $SU(2)$ (cả hai đều chiếu xuống cùng một điểm trên $SO(3)$), do vậy nó không là một đường đóng trong $SU(2)$.

^[127] Nói chung, quan hệ này tinh tế hơn, nhưng để đơn giản, trong cuốn sách này chúng ta sẽ giả sử rằng đối ngẫu của một nhóm đối ngẫu cũng chính là nhóm đó.

^[128] Một G -phân thớ chính (hay một G -phân thớ) trên một diện Riemann là một sự phân thớ trên diện Riemann sao cho tất cả các thớ là bản sao của “sự phức hóa” của nhóm G (nó được xác định bằng cách thay thế, trong định nghĩa của nhóm, các số thực bởi các số phức). Các điểm của không gian moduli (được gọi chính xác hơn là chùm) của G -phân thớ trên X là các lớp tương đương của các G -phân thớ trên X .

Để đơn giản hóa vấn đề, trong cuốn sách này chúng ta không phân biệt một nhóm Lie với phức hóa của nó.

^[129] Trong nhóm cơ bản, chúng ta đồng nhất hai đường đóng bất kỳ mà có thể biến dạng được về nhau. Bởi vì bất kỳ đường đóng nào trên mặt phẳng mà không đi vòng quanh một điểm bị bỏ đi đều có thể co về một điểm, nên các phần tử không tầm thường của nhóm cơ bản là những đường đóng đi quanh điểm này (đó là những đường không thể bị co lại - điểm mà chúng ta phải bỏ đi khỏi mặt phẳng là một chướng ngại cho việc co lại này).

Dễ thấy rằng bất kỳ hai đường đóng nào có cùng số vòng quấn đều có thể biến dạng về nhau được. Do vậy, nhóm cơ bản của mặt phẳng bỏ đi một điểm chính là nhóm các số nguyên. Chú ý rằng thảo luận này gọi lại thảo luận của chúng ta trong chương 5 về nhóm bện với hai sợi dây, mà chúng ta cũng thấy nó chính là nhóm các số nguyên. Đây không phải là một sự trùng hợp ngẫu nhiên, vì không gian của những cặp điểm phân biệt trên mặt phẳng là tương đương về mặt topo với mặt phẳng bỏ đi một điểm.

^[130] Nguyên nhân của việc đơn đạo nhận giá trị trong nhóm đường tròn là vì công thức nổi tiếng sau của Euler:

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1}.$$

Nói cách khác, số phức $e^{\theta\sqrt{-1}}$ được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn đơn vị tương ứng với góc θ , được đo bởi radian. Nhắc lại rằng 2π radian thì cũng giống như 360° (tương ứng với quay trọn một vòng tròn). Bởi vậy, góc θ được đo theo radian là góc bằng $360.\theta/2\pi$ độ.

Một trường hợp đặc biệt của công thức này, đối với $\theta = \pi$, là:

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

Richard Feynmann gọi đây là “một trong những công thức đáng chú ý, gây sửng sốt nhất trong toán học.” Nó đóng một vai trò nổi bật trong cuốn tiểu thuyết *The Housekeeper and the Professor* (Người giúp

việc và vị giáo sư), Picador, 2009. Một trường hợp khác, không kém quan trọng, đó là:

$$e^{2\pi i} = -1$$

Điều này có nghĩa là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức với tọa độ t , mà nghiệm của phương trình vi phân của chúng ta được xác định trên đó, bao gồm tất cả các điểm có dạng $t = e^{\theta i}$, với θ nằm giữa 0 và 2π . Khi chúng ta đi dọc theo đường tròn đơn vị này theo chiều ngược kim đồng hồ là chúng ta đang đánh giá nghiệm $x(t) = t^n$ tại các điểm $t = e^{\theta i}$, khi cho góc θ đi từ 0 tới 2π (theo radian). Đi trọn một vòng tròn có nghĩa là $\theta = 2\pi$. Bởi vậy, để thu được giá trị tương ứng của nghiệm, ta phải thay $t = e^{2\pi i}$ vào t^n . Kết quả là $e^{2\pi i n}$. Nhưng giá trị ban đầu của nghiệm lại thu được bằng cách thay $t = 1$ vào t^n , tức là bằng 1. Do vậy, ta thấy rằng khi đi theo một đường đóng có chiều ngược kim đồng hồ dọc theo đường tròn đơn vị, nghiệm của chúng ta được nhân thêm với $e^{2\pi i n}$. Và đó chính là đơn đạo dọc theo đường này.

Đơn đạo này, $e^{2\pi i n}$ là một số phức, mà ta có thể biểu diễn như một điểm trên một đường tròn đơn vị ở một mặt phẳng phức khác. Điểm này tương ứng với góc $2\pi n$ radian hay $360n$ độ, nên chính là cái mà chúng ta muốn chỉ ra. Thực tế, nhân bất kỳ số phức z nào với $e^{2\pi i n}$, về mặt hình học, là ta đã quay điểm đó trên mặt phẳng tương ứng với z một góc bằng $360n$ độ. Nếu n là một số nguyên, thì $e^{2\pi i n} = 1$ do vậy, không có đơn đạo nào xảy ra cả, nhưng nếu n không phải là một số nguyên thì chúng ta có một đơn đạo không tầm thường.

Để tránh nhầm lẫn, tôi muốn nhấn mạnh rằng ở đây chúng ta có hai mặt phẳng phức. Một là mặt phẳng phức mà trên đó phương trình của chúng ta được xác định - “mặt phẳng t ”. Còn mặt phẳng kia là mặt phẳng mà chúng ta biểu diễn đơn đạo. Nó không liên quan gì đến mặt phẳng t cả.

Tóm lại, chúng ta đã giải thích đơn đạo của một nghiệm dọc theo một đường đóng với số vòng quấn +1 trên mặt phẳng t như là một điểm của đường tròn khác. Tương tự như vậy, nếu số vòng quấn của đường

là w thì đơn đạo dọc theo đường này là $e^{2\pi w n \sqrt{-1}} = 1$, tương đương với phép quay $2\pi w n$ radian hay $360 w n$ độ. Do đó, đơn đạo làm nảy sinh một biểu diễn của nhóm cơ bản trong nhóm đường tròn. Qua biểu diễn này, đường trên mặt phẳng t bỏ đi một điểm, có số vòng quấn là w , bị quay một góc $360 w n$ độ.

^[131] Chú ý rằng việc chúng ta bỏ đi một điểm, gốc tọa độ, khỏi mặt phẳng thật-sự quan trọng. Nếu không, bất kỳ đường nào trên mặt phẳng cũng có thể co lại, và nhóm cơ bản sẽ là tầm thường. Do đó không có đơn đạo nào là khả dĩ cả. Chúng ta bị buộc phải bỏ điểm này bởi vì nghiệm của chúng ta, t^n , không xác định ở gốc tọa độ nếu n không phải là một số tự nhiên hay 0 (trong trường hợp này sẽ không có đơn đạo nào).

^[132] Chính xác hơn, không phải tất cả các biểu diễn của nhóm cơ bản trong ${}^L G$ đều có thể nhận được từ các oper, và trong sơ đồ này chúng ta hạn chế chỉ xét những biểu diễn mà có thể thu được như vậy. Về những biểu diễn khác, đây vẫn là câu hỏi còn bỏ ngỏ.

^[133] Edward Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop groups*, Cambridge University Press, 2007. Phiên bản điện tử có sẵn tại:

<http://xnath.berkeley.edu/~frenkel>.

Chương 16. ĐỐI NGẪU LƯỢNG TỬ

^[134] Bạn có thể bắn khoản tự hỏi điều gì đã diễn ra từ giữa năm 1991 tới 2003. Chuyện là thế này, trong cuốn sách này mục tiêu chính của tôi là kể cho các bạn nghe về các khía cạnh của Chương trình Langlands mà tôi thấy là thú vị nhất và về những khám phá trong lĩnh vực này, trong đó tôi may mắn được góp mặt, đã được tạo ra như thế nào. Tôi không cố gắng kể lại chi tiết toàn bộ câu chuyện của cuộc đời mình tính đến lúc này. Nhưng nếu bạn tò mò, thì trong những năm tháng ấy, tôi đã đưa gia đình mình từ Nga tới Mỹ, chuyển từ bờ Tây

sang Berkeley, California, yêu rồi lại thất tình, kết hôn và ly dị, hướng dẫn vài ba nghiên cứu sinh, đi du lịch và thuyết giảng ở nhiều nơi trên thế giới, xuất bản một cuốn sách và hàng chục bài báo. Tôi cố gắng vén lên bức màn bí ẩn của Chương trình Langlands trong những lĩnh vực khác nhau: từ hình học tới các hệ khả tích, từ nhóm lượng tử tới vật lý. Tôi sẽ để dành phần này trong hành trình của mình ở một cuốn sách khác.

^[135] Xem [http:// www.darpa.mil/Our_Work](http://www.darpa.mil/Our_Work).

^[136] G.H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, 2009, p. 135.

^[137] R.R. Wilson's Congression Testimony, 17 tháng 4 năm 1969, trích từ: [http:// history.fnal.gov/testimony.html](http://history.fnal.gov/testimony.html)

^[138] Các phương trình Maxwell trong chân không có dạng:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

với

$$\vec{E}$$

là ký hiệu điện trường và

$$\vec{B}$$

ký hiệu từ trường (để đơn giản hóa các công thức, chúng ta đã chọn một hệ đơn vị mà trong đó vận tốc ánh sáng bằng 1). Rõ ràng là nếu chúng ta gửi:

$$\vec{E} \mapsto \vec{B}, \quad \vec{B} \mapsto -\vec{E}$$

thì các phương trình bên phải bên trái sẽ trở thành các phương trình phía bên phải và ngược lại. Do vậy mỗi phương trình đều thay đổi nhưng cả hệ phương trình thì không.

^[139] Không nên nhầm lẫn nhóm chuẩn $SU(3)$ này với một nhóm $SU(3)$ khác mà đã thảo luận trong chương 2, và cũng là nhóm mà Gell-Mann những nhà vật lý khác đã sử dụng để phân loại các hạt cơ bản (nó cũng được gọi là “nhóm mùi”). Nhóm chuẩn $SU(3)$ có liên quan tới những đặc tính của quark mà người ta gọi là “màu”. Hóa ra mỗi quark có thể có ba màu khác nhau, và nhóm chuẩn $SU(3)$ làm thay đổi những màu đó. Bởi vậy, lý thuyết chuẩn mô tả tương tác của các quark được gọi là sắc động lực học lượng tử. David Gross, David Politzer, và Frank Wilczek đã được trao giải Nobel nhờ khám phá tuyệt diệu của họ về cái gọi là tự do tiệm cận trong sắc động lực học lượng tử (và những lý thuyết chuẩn không giao hoán khác), giúp ta giải thích được hành vi bí ẩn của các quark.

^[140] D.Z. Zhang, *C.N. Yang and contemporary mathematics*, Mathematical Intelligencer (Người đưa tin Toán học), tập 15, số 4, 1993, trang 13-21.

^[141] Albert Einstein, *Geometry and Experience*, gửi tới viện Hàn lâm Khoa học Phổ ở Berlin, 27 tháng 1 năm 1921. Dịch trong G.Jeffrey và W.Perrett, *Geometry and Experience in, Sidelights on Relativity*, Methuen, 1923.

^[142] Eugene Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics, số 13, năm 1990, trang 1-14.

^[143] C. Montonen và D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles?*, Physics Letters B, số 72, 1977, trang 117-120.

^[144] P. Goddard, J. Nuyts, và D. Olive, *Gauge theories and magnetic charge*, Nuclear Physics B, số 125, 1977, trang 1-28.

^[145] S_e là tập của các biểu diễn phức một chiều của tuyến cực đại của G , và S_m là nhóm cơ bản của tuyến cực đại của G . Nếu G là nhóm đường tròn, thì tuyến cực đại của nó là chính nhóm đường tròn, và mỗi một trong hai tập hợp này tương ứng 1-1 với tập các số nguyên.

Chương 17. PHÁT HIỆN NHỮNG KẾT NỐI ẨN GIẤU

^[146] Không gian $M(X, G)$ có thể được miêu tả theo nhiều cách, chẳng hạn, như là không gian nghiệm của một hệ phương trình vi phân trên X , và Hitchin là người đầu tiên nghiên cứu về vấn đề này (chi tiết hơn, xem bài báo ở chú thích 19 dưới đây). Một mô tả cũng có thể hữu ích đối với chúng ta trong chương này đó là $M(X, G)$ là không gian moduli của những biểu diễn của nhóm cơ bản của diện Riemann S trong phức hóa của nhóm G (xem chú thích 10, chương 15). Điều này có nghĩa là một biểu diễn như thế được gán với mỗi điểm thuộc $M(X, G)$.

^[147] Xem video các bài giảng của Hitchin ở viện Fields:

<http://www.fields.utoronto.ca/video-archive/2012/10/108-690>

^[148] Ở đây tôi xin nhắc tới công trình gần đây của Ngô Bảo Châu, đó là chứng minh “bổ đề cơ bản” của Chương trình Langlands. Tham khảo bài nghiên cứu sau: David Nadler, *The geometric nature of the fundamental lemma*, Bulletin of the American Mathematical Society, số 49, 2012, trang 1-50.

^[149] Cần nhớ rằng trong mô hình sigma, mọi thứ được tính toán bằng cách lấy tổng trên tất cả các ánh xạ từ một diện Riemann cố định Σ tới đa tạp đích S , như chúng ta thường làm trong mô hình sigma, tức là cũng cộng hết tất cả các diện Riemann Σ khả dĩ (đa tạp đích S vẫn cố định trong suốt quá trình này). Đặc biệt, chúng ta lấy tổng trên các diện Riemann có giống bất kỳ.

^[150] Chi tiết hơn về lý thuyết dây, xem Brian Greene, *The Elegant Universe*, Vintage Books, 2003 (*Bản dịch tiếng Việt của Phạm Văn Thiều, nhan đề Giai điệu dây và bản giao hưởng vũ trụ*); *The Fabric of the Cosmos: Space, Time and Texture of Reality*, Vintage Book, 2005.

^[151] Chi tiết hơn về các đa tạp Calabi-Yau và vai trò của nó trong lý thuyết siêu dây, tham khảo Shing-Tung Yau và Steve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, 2010, chương 6.

^[152] Một xuyên về căn bản cũng có hai tham số liên tục: đó là các bán kính R_1 và R_2 mà chúng ta thảo luận trong chương này, nhưng ở đây chúng ta sẽ tạm bỏ qua không xét các tham số đó.

^[153] Gần đây, nổi lên một giải pháp mới được thảo luận rất sôi nổi, đó là ý tưởng cho rằng mỗi một đa tạp này khởi sinh một vũ trụ của riêng nó với những định luật vật lý riêng của mình. Ý tưởng này sau đó kết hợp với phiên bản của nguyên lý vị nhân: trong số những vũ trụ ấy, sở dĩ vũ trụ của chúng ta được lựa chọn là bởi thực tế rằng các định luật vật lý trong đó cho phép tồn tại sự sống có trí tuệ (do vậy một câu hỏi lại nảy sinh: “tại sao vũ trụ của chúng ta lại có thể như thế?”) Tuy nhiên, ý tưởng này, được gán cho cái tên “cảnh quan lý thuyết siêu dây” hay “đa vũ trụ”, đã bị hoài nghi rất nhiều cả về phương diện khoa học lẫn triết học.

^[154] Rất nhiều tính chất thú vị của các lý thuyết trường lượng tử với số chiều khác nhau đã được khám phá hay giải thích bằng cách kết nối những lý thuyết này với lý thuyết siêu dây, thông qua phép rút gọn số chiều hoặc nghiên cứu các màng. Theo một nghĩa nào đó thì lý thuyết

siêu dây đã được sử dụng như một nơi sản xuất và phân tích các lý thuyết trường lượng tử (hầu hết đều là siêu đối xứng). Chẳng hạn, bằng cách này ta thu được một giải thích đẹp đẽ cho đối ngẫu điện từ của lý thuyết chuẩn siêu đối xứng bốn chiều. Do vậy, mặc dù chúng ta vẫn không biết liệu lý thuyết siêu dây có thể mô tả vật lý của vũ trụ của chúng ta hay không (và chúng ta vẫn chưa hoàn toàn hiểu lý thuyết siêu dây là gì), nhưng nó đã sản sinh ra nhiều nhận thức sâu sắc và mạnh mẽ đối với lý thuyết trường lượng tử. Nó cũng dẫn tới nhiều tiến bộ trong toán học.

[155] Chiều của không gian moduli Hitchin $M(X, G)$ bằng tích của chiều thuộc nhóm G (cũng chính là số chiều của ${}^L G$) và $(g - 1)$, với g là ký hiệu giống của diện Riemann X .

[156] Về các màng, mời tham khảo, Lisa Randall, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe Hidden Dimensions*, Harper Perennial, 2006; đặc biệt là chương 4.

[157] Chính xác hơn, những A-màng trên $M(X, G)$ là các vật của một phạm trù, khái niệm mà chúng ta đã thảo luận trong chương 14. Các B-màng trên $M(X, {}^L G)$ là các vật của một phạm trù khác. Mệnh đề của đối xứng gương đồng điều đó là hai phạm trù này là tương đương với nhau.

[158] Anton Kapustin và Edward Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands Program*, Communications in Number Theory and Physics, số 1, 2007, trang 1-236.

[159] Về T-đối ngẫu, xem thêm ở chương 7 cuốn sách của Yau và Nadis, đã dẫn ở chú thích 6.

[160] Về giả thuyết SYZ, xem chương 7 cuốn sách của Yau và Nadis, đã dẫn ở chú thích 6.

[161] Chính xác hơn, mỗi thớ là một tích của n đường tròn, với n là một số tự nhiên chẵn, do vậy nó là sự tương tự n -chiều của một xuyên hai chiều. Chú ý rằng chiều của phân thớ Hitchin và chiều của mỗi thớ xuyên luôn bằng nhau.

^[162] Trong chương 15, chúng ta đã thảo luận một cách xây dựng khác, trong đó ta thu được các bó tự đẳng cấu từ những biểu diễn của các đại số Kac-Moody. Người ta hy vọng rằng hai cách xây dựng này là có liên quan với nhau, nhưng ở thời điểm tôi viết những dòng này, mối liên hệ này vẫn chưa được biết tới.

^[163] Edward Frenkel và Edward Witten, *Geometric endoscopy and mirror symmetry*, Communications in Number Theory and Physics, số 2, 2008, trang 113-283, có thể tìm thấy trên Internet tại:

[http:// arxiv.org/pdf/0710.5939.pdf](http://arxiv.org/pdf/0710.5939.pdf)

^[164] Edward Frenkel, *Gauge theory and Langlands duality*, Astérisque, Số 332, 2010, trang 369-403, có thể tìm thấy trên Internet tại: [http:// arxiv.org/pdf/0906.2747.pdf](http://arxiv.org/pdf/0906.2747.pdf)

^[165] Henry David Thoreau, *A week on the Concord and Merrimack Rivers*, Penguin Classics, 1998, trang 291.

Chương 18. ĐI TÌM CÔNG THỨC CỦA TÌNH YÊU

^[166] C.P. Snow, *The Two Cultures*, Cambridge University Press, 1998.

^[167] Thomas Farber và Edward Frenkel, *The Two-Body Problem*, Andrea Young Arts, 2012. Chi tiết hơn, xem tại:

[http:// www.thetwobodyproblem.com](http://www.thetwobodyproblem.com)

^[168] Micheal Harris, *Further investigations of the mind-body problem*, một chương của cuốn sách sắp xuất bản, có thể tìm thấy trên Internet tại:

[http:// www.math.jussieu.fr/~harris/MmdBody.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~harris/MmdBody.pdf)

^[169] Henry David Thoreau, *A week on the Concord and Merrimack River*, Penguin Classics, 1998, trang 291.

^[170] E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, 1986, trang 16.

^[171] Robert Langlands, *Is there beauty in mathematical theories?* trong *The Many Faces of Beauty*, ed. Vittorio Hosle, University of Notre Dame Press, 2013, có thể tìm thấy trên Internet tại:

<http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf>

^[172] Yuri I. Manin, *Mathematics as Metaphor: Selected Essays*, American Mathematical Society, 2007, trang 4.

^[173] Các nhà triết học đã tranh luận về bản thể luận của toán học trong nhiều thế kỷ. Quan điểm mà tôi tán thành trong cuốn sách này thường được gọi là chủ thuyết Platon toán học. Tuy nhiên chú ý rằng có nhiều kiểu Platon khác nhau, và cũng có những cách giải thích triết học khác của toán học. Chẳng hạn, tham khảo Mark Balaguer, *Mathematical Platonism*, trong *Proof and other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, Bonnie Gold và Roger Simons (biên tập), Mathematics Association of America (Liên Hiệp hội Toán học Mỹ), trang 179-204, và những nguồn tham khảo trong đó.

^[174] Roger Penrose, *The Road to Reality*, Vintage Book, 2004, trang 15.

^[175] Sđd, trang 13, 14.

^[176] Kurt Godel, *Selected Works*, tập 3, Oxford University Press, 1995, trang 320.

^[177] Sđd, trang 323.

^[178] Roger Penrose, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, 1994, mục 8.47

^[179] Trong quyết định có tính cột mốc trong vụ *Gottschalk v. Benson*, 409 U.S 63 (1972), Tòa án tối cao nước Mỹ đã tuyên bố rằng: “Một chân lý khoa học, hay một diễn giải toán học của nó, không phải là một phát minh có thể cấp bằng sáng chế được... Một nguyên lý, theo

nghĩa trừu tượng, là một chân lý cơ bản; một nguyên nhân nguyên thủy, một động cơ (*motive*); những thứ này đều không thể được cấp bằng sáng chế, vì không ai có thể tuyên bố độc quyền với bất kỳ thứ nào trong số chúng... Một người khám phá ra một hiện tượng của tự nhiên chưa từng được biết đến không thể tuyên bố độc quyền đối với nó, điều mà đạo luật thừa nhận.”

^[180] Chúng ta xét mô hình cơ học lượng tử siêu đối xứng trên mặt cầu (ở đây ký hiệu bởi P^1) và hàm tương quan giữa hai đại lượng có thể quan sát được, ký hiệu bởi F và w . Hàm tương quan này được định nghĩa trong lý thuyết của chúng tôi là tích phân xuất hiện ở vế bên trái của công thức. Tuy nhiên, lý thuyết ấy cũng đã dự đoán một cách biểu diễn khác cho nó: một tổng trên những “trạng thái trung bình” xuất hiện ở vế phải. Sự nhất quán trong lý thuyết của chúng tôi đòi hỏi rằng hai vế này phải bằng nhau. Và quả thật chúng đúng là như vậy; đó là ý nghĩa của công thức đó.

^[181] Laura Spiney, *Erotic equations: Love meets mathematics on film*, New Scientist, 13 tháng 4 năm 2010, có thể tìm thấy trên Internet tại: [http:// ritesoflovenandmath.com](http://ritesoflovenandmath.com)

^[182] Hervé Lehning, *La dualité entre l'amour et les maths*, Tangente Sup, số 55, tháng 5-6, 2010, có thể tìm thấy trên Internet tại: [http:// ritesoflovenandmath.com](http://ritesoflovenandmath.com)

^[183] Norma Farber, *A Desperate Thing*, The Plowshare Press Incorporated, 1973, trang 21.

^[184] Lá thư của Einstein gửi Phyllis Wright, 24 tháng 1 năm 1936, được trích lại trong Walter Isaacson, *Einstein: His Life and Universe*, Simon & Schuster, 2007, trang 388.

^[185] David Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, Vol. 2, Adamant Media Corporation, 2001 (in lại bản in năm 1855 của Thomas Constable và Co.), trang 407.

LỜI KẾT

^[186] Edward Frenkel, Robert Langlands và Ngô Bảo Châu, *Formule des Traces et Fonctorialite: le Debut d'un Programme*, Annales des Sciences Mathématiques du Quebec 34 (2010), 199-243, có thể tìm thấy trên Internet tại: [http:// arxiv.org/pdf/1003.4578.pdf](http://arxiv.org/pdf/1003.4578.pdf)

Edward Frenkel, *Langlands Program, trace formulas, and their geometrization*, Bullentin of AMS, tập 50 (2013) 1-555, có thể tìm thấy trên Internet tại: [http:// arxiv.org/pdf/1202.2110.pdf](http://arxiv.org/pdf/1202.2110.pdf)

THUẬT NGỮ

Ánh xạ từ một tập hợp (hay đa tập) M vào một tập (hay đa tập) N . Là một quy tắc gán một điểm thuộc N vào mỗi điểm thuộc M . (Một ánh xạ đôi khi được hiểu là một sự tạo ảnh).

Biểu diễn của một nhóm. Một quy tắc gán một đối xứng của một không gian vector cho mỗi phần tử trong một nhóm cho trước sao cho một số tính chất tự nhiên được thỏa mãn. Tổng quát hơn, một biểu diễn của một nhóm G trong một nhóm H khác là một quy tắc gán một phần tử của H cho mỗi phần tử của G , thỏa mãn một số tính chất tự nhiên.

Bó. Một quy tắc gán một không gian vector cho mỗi điểm thuộc một đa tập cho trước, thỏa mãn một số tính chất tự nhiên nào đó.

Bó tự đẳng cấu. Một bó thay thế cho hàm tự đẳng cấu trong quan hệ Langlands hình học ở cột bên phải trên phiên đá Rosetta của Weil.

Chiều. Số các tọa độ cần có để mô tả các điểm của một vật thể cho trước. Ví dụ, đường thẳng và đường tròn thì có số chiều là một, còn mặt phẳng và mặt cầu thì lại có số chiều là hai.

Dạng modular. Một hàm số trên đĩa đơn vị thỏa mãn các tính chất biến đổi đặc biệt như là một nhóm con của nhóm đối xứng của đĩa đơn vị (gọi là nhóm modular).

Đa tạp. Một dạng hình học trơn, như là đường tròn, mặt cầu, hay bề mặt của một chiếc xăm ô tô.

Đa thức một biến. Một biểu thức có dạng:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

với x là biến, còn $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ là các số. Đa thức nhiều biến được định nghĩa tương tự.

Đại số Kac-Moody. Đại số Lie của nhóm vòng của một nhóm Lie cho trước, được mở rộng bởi một đường thẳng bổ sung.

Đại số Lie. Không gian tiếp xúc của một nhóm Lie ở điểm tương ứng với phần tử đơn vị của nhóm Lie đó.

Định lý cuối cùng của Fennat. Mệnh đề khẳng định rằng với bất kỳ số tự nhiên n lớn hơn 3 nào, cũng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho $x^n + y^n = z^n$.

Đối ngẫu. Sự tương đương giữa hai mô hình (hay hai lý thuyết) trong sự trao đổi các đối tượng và các tham số được quy định trước.

Đối xứng. Phép biến đổi một vật cho trước mà bảo toàn những tính chất của vật đó, như là hình dạng và vị trí của nó.

Đường cong trên một trường hữu hạn. Một đối tượng đại số bao gồm tất cả các nghiệm của một phương trình đại số hai biến (như một phương trình cubic), nhận giá trị trong một trường hữu hạn có p phần tử và tất cả các mở rộng của nó.

Đường tròn. Một đa tạp có thể được mô tả như tập hợp của tất cả các điểm trên mặt phẳng cùng cách đều một điểm cho trước.

Giả thuyết Shimura-Taniyama-Weil. Mệnh đề nói rằng có một tương ứng 1-1 giữa các phương trình bậc ba và các dạng modular thỏa mãn một số tính chất nhất định. Qua tương ứng này, số các nghiệm của phương trình bậc ba, theo modun các số nguyên tố bằng các hệ số của dạng modular.

Giải tích điều hòa. Một ngành toán học nghiên cứu phân tích hàm số thành các thành phần điều hòa, như là các hàm sin hay cos, chẳng hạn.

Hàm số. Một quy tắc gán một số cho mỗi điểm thuộc một tập hoặc một đa tạp cho trước.

Hàm tự đẳng cấu. Một loại hàm số đặc biệt xuất hiện trong giải tích điều hòa.

Hợp thành (của hai đối xứng). Đối xứng của một vật thu được bằng cách áp dụng lần lượt hai đối xứng của vật đó.

Không gian moduli Hitchin. Không gian (hay đa tạp) có các điểm của nó là những biểu diễn của nhóm cơ bản của một diện Riemann cho trước trong một nhóm Lie cho trước.

Không gian vector. Tập hợp tất cả các vector trong một không gian phẳng n -chiều, kèm với các phép toán cộng vector hay nhân vector với các số, thỏa mãn một số tính chất tự nhiên nào đó.

Lý thuyết trường lượng tử. Thuật ngữ này có thể ngụ ý hai điều. Thứ nhất, nó có thể là một ngành của vật lý nghiên cứu những mô hình tương tác của các hạt và trường lượng tử. Thứ hai, nó có thể là một mô hình cụ thể thuộc kiểu này.

Lý thuyết. Một ngành đặc biệt của toán học hay vật lý (như là lý thuyết số) hay một mô hình cụ thể miêu tả mối liên hệ giữa các đối tượng (như là lý thuyết chuẩn với nhóm chuẩn $SO(3)$).

Mặt cầu. Một đa tạp mà có thể mô tả như là tập hợp tất cả các điểm trong một không gian ba chiều phẳng cùng cách đều một điểm cho trước.

Nhóm. Một tập hợp với phép toán (có thể được gọi là phép hợp thành, phép cộng hay phép nhân tùy bối cảnh) gán mỗi phần tử của tập hợp này với bất kỳ cặp phần tử khác. (Chẳng hạn, tập các số nguyên với phép cộng). Phép toán này phải thỏa mãn các tính chất: tồn tại phần tử đơn vị, với mỗi phần tử bất kỳ tồn tại phần tử nghịch đảo, và có tính kết hợp.

Nhóm aben. Một nhóm mà trong đó phép nhân giữa hai phần tử bất kỳ không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện. Chẳng hạn như nhóm đường tròn.

Nhóm chuẩn. Một nhóm Lie xuất hiện trong một lý thuyết chuẩn cho trước và đặc biệt là xác định các hạt và tương tác giữa chúng trong lý thuyết đó.

Nhóm cơ bản. Nhóm của tất cả những đường cong đóng trên một đa tạp mà bắt đầu và kết thúc cùng ở một điểm cho trước.

Nhóm đối ngẫu Langlands. Một nhóm Lie được gán cho một nhóm Lie G bất kỳ, bằng một thủ tục đặc biệt. Nó được ký hiệu là ${}^L G$.

Nhóm đường tròn. Nhóm các phép quay của bất kỳ vật thể nào có dạng tròn, chẳng hạn như một chiếc bàn tròn. Nó là một đường tròn với một điểm đặc biệt, chính là phần tử đơn vị của nhóm này. Nhóm đường tròn là một ví dụ đơn giản nhất cho một nhóm Lie.

Nhóm Galois. Nhóm các đối xứng của một trường số bảo toàn các phép toán nhân và cộng.

Nhóm không aben (không giao hoán). Một nhóm mà nói chung trong đó phép toán giữa hai phần tử phụ thuộc vào thứ tự thực hiện. Chẳng hạn như nhóm $SO(3)$.

Nhóm Lie. Một nhóm mà cũng là một đa tạp, sao cho phép toán trên nhóm đó là một ánh xạ trơn.

Phạm trù. Một cấu trúc đại số bao gồm các “vật” và “cấu xạ” giữa hai vật bất kỳ. Chẳng hạn, các không gian vector lập thành một phạm trù, và các bó trên một đa tạp cũng vậy.

Phương trình cubic. Một phương trình có dạng $P(y) = Q(x)$, trong đó $P(y)$ là một đa thức bậc hai còn $Q(x)$ là một đa thức bậc ba. Ví dụ như phương trình được nghiên cứu chi tiết trong cuốn sách này là phương trình $y^2 + y = x^3 - x^2$.

Phương trình đa thức. Một phương trình có dạng $P = 0$, với P là một đa thức một hay nhiều biến.

Quan hệ Langlands (hay tương ứng Langlands). Một quy tắc gán một hàm tự đẳng cấu (hay mỗi biểu diễn tự đẳng cấu) với một biểu diễn của một nhóm Galois.

Siêu đối xứng. Một dạng đối xứng trong một lý thuyết trường lượng tử hoán đổi các boson và các fermion.

$SO(3)$. Nhóm các phép quay của một mặt cầu.

Số nguyên. Là số bao gồm số tự nhiên, 0, và cả số đối của một số tự nhiên.

Số nguyên tố. Một số tự nhiên không chia hết cho bất kỳ số tự nhiên nào ngoài 1 và chính nó.

Số phức. Một số có dạng $a + b\sqrt{-1}$, với a, b là hai số thực.

Số tự nhiên. Số 1 hoặc bất kỳ số nào thu được bằng cách cộng 1 với chính nó nhiều lần.

Sự phân thớ. Giả sử rằng ta có hai đa tạp là M và B , và một ánh xạ từ M vào B . Với bất kỳ điểm nào thuộc B , ta cũng có tập hợp các điểm trong M ánh xạ tới điểm đó, gọi là “thớ” trên điểm đó. M được gọi là một sự phân thớ (hay bó thớ) trên “nền” B nếu tất cả các thớ này có thể được đồng nhất với nhau (và mỗi điểm trong B sẽ có một lân cận U mà tiền ảnh của nó trong M có thể được đồng nhất với tích của U và một thớ).

Tập hợp. Là một bộ các đối tượng, như là tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ với N là số tự nhiên nào đó.

Thuyết chuẩn. Một mô hình vật lý của bất kỳ một dạng cụ thể nào, miêu tả các trường xác định và mối quan hệ giữa chúng. Có một dạng thuyết như vậy cho bất kỳ nhóm Lie nào, gọi là một nhóm chuẩn. Chẳng hạn, một thuyết chuẩn tương ứng với nhóm đường tròn là thuyết điện từ.

Trường hữu hạn. Tập hợp các số tự nhiên nằm giữa 0 và $p-1$, với p là một số nguyên tố, hoặc mở rộng của nó thu được bằng cách gắn thêm nghiệm của một đa thức một biến.

Trường số. Một hệ thống số thu được bằng cách thêm vào các số hữu tỉ tất cả các nghiệm của một tập hợp hữu hạn các đa thức một biến mà hệ số của chúng là các số hữu tỉ.

Tương ứng. Một quan hệ giữa các vật thuộc hai loại khác nhau, hay một quy tắc gán các vật thuộc loại này với vật thuộc loại kia. Chẳng hạn như tương ứng 1-1.

Vòng. Một đường cong đóng, chẳng hạn như là một đường tròn.

Table of Contents

1. [Lời giới thiệu](#)
2. [LỜI TỰA](#)
3. [MỘT HƯỚNG DẪN CHO ĐỘC GIẢ](#)
4. [Chương 1 MỘT QUÁI VẬT BÍ ẨN](#)
5. [Chương 2 BẢN CHẤT CỦA ĐỐI XỨNG](#)
6. [Chương 3 BÀI TOÁN SỐ NĂM](#)
7. [Chương 4 KEROSINKA](#)
8. [Chương 5 NHỮNG MANH MỐI CỦA LỜI GIẢI](#)
9. [Chương 6 NHÀ TỌÁN HỌC TẬP SỰ](#)
10. [Chương 7 LÝ THUYẾT THỐNG NHẤT LỚN](#)
11. [Chương 8 NHỮNG CON SỐ THẦN KỲ](#)
12. [Chương 9 PHIẾN ĐÁ ROSETTA](#)
13. [Chương 10 CÙNG HỘI CÙNG THUYỀN](#)
14. [Chương 11 CHINH PHỤC ĐỈNH CAO](#)
15. [Chương 12 CÂY TRI THỨC](#)
16. [Chương 13 LỜI MỜI TỪ HARVARD](#)
17. [Chương 14 BUỘC LẠI CÁC BÓ TRI THỨC](#)
18. [Chương 15 MỘT VŨ ĐIỀU DUYÊN DÁNG](#)
19. [Chương 16 ĐỐI NGẪU LƯỢNG TỬ](#)
20. [Chương 17 PHÁT HIỆN NHỮNG KẾT NỐI ẨN GIẤU](#)
21. [Chương 18 ĐI TÌM CÔNG THỨC CỦA TÌNH YÊU](#)
22. [Lời kết](#)
23. [Lời cảm ơn](#)
24. [CHÚ THÍCH](#)
25. [THUẬT NGỮ](#)

Table of Contents

Lời giới thiệu

LỜI TỰA

MỘT HƯỚNG DẪN CHO ĐỘC GIẢ

Chương 1 MỘT QUÁI VẬT BÍ ẨN

Chương 2 BẢN CHẤT CỦA ĐỐI XỨNG

Chương 3 BÀI TOÁN SỐ NĂM

Chương 4 KEROSINKA

Chương 5 NHỮNG MANH MỐI CỦA LỜI GIẢI

Chương 6 NHÀ TỐÁN HỌC TẬP SỰ

Chương 7 LÝ THUYẾT THỐNG NHẤT LỚN

Chương 8 NHỮNG CON SỐ THẦN KỲ

Chương 9 PHIẾN ĐÁ ROSETTA

Chương 10 CÙNG HỘI CÙNG THUYỀN

Chương 11 CHINH PHỤC ĐỈNH CAO

Chương 12 CÂY TRI THỨC

Chương 13 LỜI MỜI TỪ HARVARD

Chương 14 BUỘC LẠI CÁC BÓ TRI THỨC

Chương 15 MỘT VŨ ĐIỆU DUYÊN DÁNG

Chương 16 ĐỐI NGẪU LƯỢNG TỬ

Chương 17 PHÁT HIỆN NHỮNG KẾT NỐI ẨN GIẤU

Chương 18 ĐI TÌM CÔNG THỨC CỦA TÌNH YÊU

Lời kết

Lời cảm ơn

CHÚ THÍCH

THUẬT NGỮ