

Phạm Khánh Tùng

Giáo trình Lý thuyết mạch

Mục lục

Chương 1: Khái niệm cơ bản về mạch điện.....	8
1. 1. Đại lượng cơ bản trong mạch điện	8
1.1.1. Đại lượng điện và hệ đơn vị SI	8
1.1.2. Lực, công và công suất	9
1.1.3. Điện tích và dòng điện.....	10
1.1.4. Điện thế.....	11
1.1.5. Năng lượng và công suất điện.....	12
1.1.6. Hằng số và hàm số.....	12
1.2. Phần tử cơ bản của mạch điện.....	12
1.2.1. Phần tử thụ động và tích cực.....	12
1.2.2. Quy ước về dấu.....	13
1.2.3. Quan hệ dòng điện và điện áp	14
1.2.4. Điện trở R.....	15
1.2.5. Cuộn cảm L	16
1.2.6. Tụ điện C.....	17
1.2.7. Sơ đồ mạch điện	18
1.2.8. Điện trở phi tuyến.....	18
CHƯƠNG 2: Phương pháp phân tích mạch điện.....	21
2.1. Định luật mạch điện	21
2.1.1. Định luật Kirchhoff về điện áp.....	21
2.1.2. Định luật Kirchhoff về dòng điện	21
2.1.3. Mạch điện các phần tử mắc nối tiếp.....	22
2.1.4. Mạch điện các phần tử mắc song song.....	23
2.1.5. Điện trở phân (chia) điện áp và phân dòng điện.....	24
2.2. Phân tích mạch điện	25
2.2.1. Phương pháp dòng nhánh	25
2.2.2. Phương pháp dòng mắt lưới.....	26
2.2.3. Phương pháp ma trận và định thức.....	27
2.2.4. Phương pháp điện thế nút	29
2.3. Phân rẽ mạch điện.....	30

2.3.1. Điện trở vào và điện trở ra	30
2.3.2. Điện trở chuyển đổi	31
2.3.3. Qui tắc phân rã mạch điện	32
2.3.4. Qui tắc xếp chồng.....	34
2.4. Định lý mạch điện.....	35
2.4.1. Định lý Thevenin và Norton	35
2.4.2. Định lý truyền công suất cực đại.....	37
Chương 3: Mạch khuếch đại và khuếch đại thuật toán.....	39
3.1. Mạch khuếch đại	39
3.1.1. Khuếch đại tín hiệu.....	39
3.1.2. Sơ đồ khuếch đại hồi tiếp.....	40
3.2. Khuếch đại thuật toán.....	42
3.2.1. Khái niệm khuếch đại thuật toán.....	42
3.2.2. Mạch điện có khuếch đại thuật toán lý tưởng.....	45
3.2.3. Mạch khuếch đại đảo	46
3.2.4. Mạch khuếch đại không đảo	47
3.2.5. Mạch khuếch đại cộng tín hiệu	49
3.2.6. Mạch điện áp theo.....	50
3.2.7. Mạch chứa nhiều bộ khuếch đại OA	51
3.3. Mạch khuếch đại vi phân – tích phân	52
3.3.1. Vi phân và khuếch đại vi phân.....	52
3.3.2. Tích phân và mạch tích phân	54
3.4. Mạch ứng dụng khuếch đại thuật toán	57
3.4.1. Mạch tính tương tự	57
3.4.2. Mạch lọc tần số thấp	59
3.4.3. Bộ so sánh	59
Chương 4: Dạng sóng và tín hiệu	61
4.1. Hàm chu kỳ	61
4.1.1. Khái niệm hàm chu kỳ.....	61
4.1.2. Hàm sin	62
4.1.3. Dịch thời gian và dịch góc pha:	63

4.1.4. Hàm chu kỳ hỗn hợp.....	65
4.1.5. Giá trị trung bình và giá trị hiệu dụng.....	65
4.2. Hàm không chu kỳ.....	68
4.2.1. Hàm bước đơn vị (hàm step).....	68
4.2.2. Hàm xung đơn vị (hàm dirac)	70
4.2.3. Hàm mũ.....	72
4.2.4. Hàm sin tắt dần.....	75
4.2.5. Tín hiệu ngẫu nhiên	76
Chương 5: Quá độ trong mạch điện.....	78
5.1. Quá độ trong mạch điện cấp một.....	78
5.1.1. Quá độ trong mạch RC	78
5.1.2. Quá độ trong mạch RL.....	81
5.1.3. Hàm mũ cơ số tự nhiên.....	83
5.1.4. Mạch bậc một phức tạp RL và RC	85
5.1.5. Trạng thái ổn định một chiều trong mạch RL và RC	88
5.1.6. Quá độ khi chuyển mạch.....	90
5.2. Đáp ứng của mạch bậc một.....	91
5.2.1. Đáp ứng với tác động của hàm bước.....	91
5.2.2. Đáp ứng mạch RC và RL với tác động hàm xung đơn vị	93
5.2.3. Đáp ứng của mạch RC và RL với kích thích hàm mũ	96
5.2.4. Đáp ứng của mạch RC và RL với kích thích hàm sin.....	97
5.2.5. Mạch bậc một chủ động.....	98
5.3. Mạch điện bậc cao	100
5.3.1. Mạch RLC nối tiếp không nguồn.....	100
5.3.2. Mạch RLC song song không nguồn	104
5.3.3. Mạch điện có hai vòng mắt lưới.....	107
5.4. Quá độ của mạch điện trong miền tần số.....	108
5.4.1. Tần số phức	108
5.4.2. Trở kháng tổng quát của mạch RLC trong miền tần số s.....	109
5.4.3. Hàm biến đổi mạch điện	111
5.4.4. Đáp ứng cưỡng bức	113

5.4.5. Đáp ứng tự nhiên	115
5.4.6. Biến đổi tỉ lệ biên độ và tần số.....	116
Chương 6: Mạch điện xoay chiều	120
6.1. Phân tích mạch xoay chiều ở trạng thái ổn định (điều hòa)..	120
6.1.1. Đáp ứng của các phần tử.....	120
6.1.2. Véc tơ biểu diễn đại lượng sin	123
6.1.3. Trở kháng và dẫn nạp	125
6.1.4. Phương pháp dòng mắt lưới.....	128
6.1.5. Phương pháp điện thế nút	131
6.1.6. Các định lý mạch trong miền tần số.....	132
6.2. Nguồn điện xoay chiều một pha	133
6.2.1. Nguồn xoay chiều trong miền thời gian	133
6.2.2. Công suất của đại lượng sin trong trạng thái ổn định	136
6.2.3. Công suất trung bình hoặc công suất tác dụng	137
6.2.4. Công suất phản kháng.....	138
6.2.5. Công suất phức, công suất biểu kiến và tam giác công suất	141
6.2.6. Công suất của các mạch song song	144
6.2.7. Nâng hệ số công suất pf.....	145
6.2.8. Truyền công suất cực đại.....	146
6.2.9. Xếp chồng nguồn xoay chiều sin	147
6.3. Nguồn xoay chiều nhiều pha	148
6.3.1. Hệ thống nguồn xoay chiều hai pha	149
6.3.2. Hệ thống nguồn xoay chiều ba pha	150
6.3.3. Tải ba pha đối xứng	153
6.3.4. Tải ba pha không đối xứng	157
6.3.5. Công suất nguồn ba pha – đo công suất	160
Chương 7: Đáp ứng tần số, lọc và cộng hưởng.....	163
7.1. Đáp ứng tần số	163
7.1.1. Khái niệm đáp ứng tần số	163
7.1.2. Mạch thông cao tần và thông thấp tần.....	164
7.1.3. Tần số tới hạn, tần số nửa công suất và dải tần	168

7.1.4. Tổng quát hóa mạch hai cửa hai phần tử.....	169
7.1.5. Đáp ứng tần số và hàm biến đổi mạch điện.....	170
7.1.6. Đáp ứng tần số xác định theo giản đồ cực-zero	171
7.2. Mạch lọc.....	172
7.2.1. Mạch lọc lý tưởng và mạch lọc thực tế	172
7.2.2. Mạch lọc thụ động và chủ động.....	174
7.2.3. Bộ lọc thông dải tần và cộng hưởng.....	175
7.2.4. Tần số tự nhiên và hệ số tắt dần.....	177
7.3. Cộng hưởng.....	177
7.3.1. Mạch RLC nối tiếp, cộng hưởng nối tiếp	177
7.3.2. Mạch RLC song song, cộng hưởng song song	180
7.3.3. Mạch cộng hưởng LC song song thực tế.....	181
7.3.4. Biến đổi tương đương nối tiếp – song song.....	182
7.3.5. Giản đồ Locus	183
7.3.6. Thang tần số đáp ứng của mạch lọc.....	Error! Bookmark not defined.
Chương VIII: Mạng hai cửa.....	187
8.1. Khái niệm và thông số mạng hai cửa.....	187
8.1.1. Bộ số Z	187
8.1.2. Mạch T tương đương của mạch hai cửa tương hỗ	188
8.1.3. Bộ số Y.....	189
8.1.4. Mạch π tương đương của mạch hai cửa tương hỗ.....	191
8.1.5. Qui đổi giữa bộ số Z và bộ số Y	192
8.1.6. Các bộ số lai và bộ số truyền tải	193
8.2. Kết nối các mạch hai cửa	195
8.2.1. Kết nối nối tiếp	195
8.2.2. Kết nối song song	196
8.2.3. Kết nối khâu chuỗi.....	197
8.2.4. Lựa chọn bộ số phù hợp.....	197
Chương 9: Hồ cảm	199
9.1. Khái niệm hồ cảm.....	199

9.1.1. Hiện tượng hồ cảm	199
9.1.2. Hệ số cặp hồ cảm.....	201
9.1.3. Phân tích cặp hồ cảm	202
9.2. Máy biến áp	206
9.2.1. Máy biến áp tuyến tính	206
9.2.2. Máy biến áp lý tưởng.....	209
9.2.3. Máy biến áp tự ngẫu	210

Chương 1: Khái niệm cơ bản về mạch điện

1. 1. Đại lượng cơ bản trong mạch điện

1.1.1. Đại lượng điện và hệ đơn vị SI

Hệ đơn vị quốc tế (SI) được sử dụng trong cả cuốn sách này. Bốn đại lượng cơ bản và đơn vị của chúng được trình bày trong bảng 1-1. Các đại lượng liên quan và đơn vị của chúng không được trình bày ở bảng trên là nhiệt độ ở thang kelvin (K), lượng vật chất trong phân tử (mol) và mật độ ánh sáng ở đơn vị candela (cd).

Bảng 1-1.

Đại lượng	Ký hiệu	Đơn vị (hệ SI)	Viết tắt
Chiều dài	L, l	mét	m
Khối lượng	M, m	kilogam	kg
Thời gian	T, t	giây	s
Dòng điện	I, i	ampe	A

Tất cả các đại lượng khác đều có nguồn gốc từ 7 đại lượng cơ bản nói trên. Các đại lượng và ký hiệu thường dùng trong phân tích mạch điện được trình bày trong bảng 1-2.

Bảng 1-2

Đại lượng	Ký hiệu	Đơn vị (hệ SI)	Viết tắt
Điện tích	Q, q	coulomb	C
Điện thế	V, v	vôn	V
Điện trở	R	Ohm	Ω
Điện dẫn	G	siemen	S
Điện cảm	L	henry	H
Điện dung	C	fara	F
Tần số	f	hertz	Hz
Lực	F	newton	N
Công, năng lượng	W, w	joule	J
Công suất	P, p	watt	W
Từ thông	Φ	Weber	Wb
Từ cảm (mật độ từ thông)	B	tesla	T

Hai đại lượng bổ xung là góc phẳng (còn gọi là góc pha trong phân tích mạch) và góc khối. Đơn vị trong hệ SI tương ứng của chúng là radian (rad) và steradian (sr).

Đơn vị “độ” được sử dụng nhiều để biểu diễn góc pha trong các đại lượng sin, ví dụ: $\sin(\omega t + 30^\circ)$, trong đó: ωt có đơn vị radian, còn $\omega t + 30^\circ$ gọi là đơn vị hỗn hợp.

Bội số và ước số của đơn vị hệ SI được trình bày trong bảng 1-3.

Bảng 1-3.

Tên gọi	Hệ số nhân	Viết tắt
Pico	10^{-12}	p
Nano	10^{-9}	n
Micro	10^{-6}	μ
Milli	10^{-3}	m
Centi	10^{-2}	c
Deci	10^{-1}	d
Kilo	10^3	k
Mega	10^6	M
Giga	10^9	G
Tera	10^{12}	T

Ví dụ: mV là ký hiệu viết tắt của millivolt bằng 10^{-3} V, và MW là của đơn vị megawatt bằng 10^6 W.

1.1.2. Lực, công và công suất

Đại lượng có nguồn gốc từ phương trình toán học với quan hệ: “lực bằng khối lượng nhân với gia tốc”, như vậy, theo định nghĩa newton (N) lực tác động tạo ra gia tốc 1 m/s^2 cho vật có khối lượng 1 kg. Như vậy $N = \text{kg.m/s}^2$

Công là kết quả của lực tác dụng trong quãng đường. Joule là công của lực 1 N trong quãng đường 1 m ($1 \text{ J} = 1 \text{ N.m}$). Công và năng lượng có cùng đơn vị.

Công suất đại lượng đo công hoàn thành trong thời gian hoặc năng lượng truyền từ vật này sang vật khác. Đơn vị công suất là watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$).

Ví dụ 1–1: Chuyển động thẳng của vật 10-kg có gia tốc 2 m/s^2 . (a) Tìm lực tác động F. (b) Nếu như vật bắt đầu chuyển động từ thời điểm $t = 0$, $x = 0$, hãy xác định vị trí, động năng và công suất khi $t = 4\text{s}$.

(a) $F = m.a = 10(\text{kg}).2(\text{m/s}^2) = 20(\text{kg.m/s}^2) = 20(\text{N})$

(b) Tại thời điểm $t = 4\text{s}$.

$$x = \frac{1}{2} a.t^2 = \frac{1}{2} 2(m/s^2)(4s)^2 = 16(m)$$

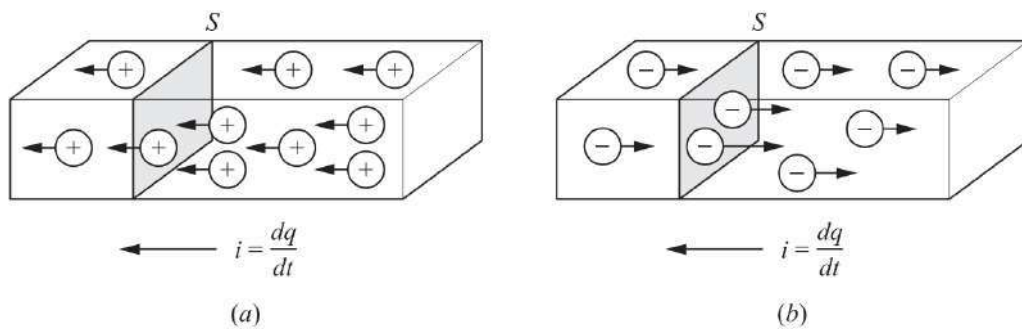
$$KE = F.x = 20(N).16(m) = 3200(N.m) = 3,2(kJ)$$

$$p = \frac{KE}{t} = \frac{3200(J)}{4s} = 800(J/s) = 0,8(kW)$$

1.1.3. Điện tích và dòng điện

Đơn vị của dòng điện, Ampe (A), được định nghĩa là dòng điện không đổi trong hai dây dẫn có chiều dài vô hạn và tiết diện không đáng kể, đặt trong chân không ít nhất 1m, tạo nên một lực 2.10^{-7} (N) cho một mét chiều dài. Một định nghĩa khác được sử dụng nhiều hơn: dòng điện là kết quả của sự di chuyển điện tích và dòng điện 1 ampe tương đương với 1 coulomb (C) điện tích di chuyển qua mặt cắt của vật dẫn trong 1 giây. Như vậy, qua hàm biến thời gian $i(A) = dq/dt(C/s)$, đơn vị coulomb (C) có thể được định nghĩa bằng ampe-giây.

Điện tích tự do trong vật dẫn có thể dương hoặc âm. Điện tích dương chuyển động sang trái (hình 1-1a) làm nên dòng điện i cũng có hướng sang trái. Nếu như lượng điện tích 1 (C) đi qua tiết diện S trong khoảng thời gian 1s, dòng điện có giá trị 1 (A). Điện tích âm di chuyển sang phải (hình 1-1b) cũng tạo nên dòng điện sang phía trái.



Hình 1-1

Một trong những vấn đề quan trọng nhất khi phân tích mạch ở chỗ dòng điện trong các vật dẫn kim loại là dòng di chuyển của các điện tử lớp ngoài trong cấu trúc nguyên tử. Ví dụ đối với đồng, điện tử lớp ngoài có liên kết lỏng lẻo với hạt nhân và có thể di chuyển tự do từ nguyên tử này đến nguyên tử khác trong cấu trúc mạng tinh thể. Ở nhiệt độ thường, số lượng điện tử tự do đó là hằng số, có chuyển động ngẫu nhiên. Số lượng điện tử tự do (có thể tạo nên dòng điện đặc trưng bởi đại lượng điện dẫn) của kim loại đồng có thể xấp xỉ vào khoảng $8,5 \cdot 10^{28}$ trong 1 m^3 . Điện tích của điện tử $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} (C)$, như vậy dòng điện 1 (A) tương đương với số lượng $6,24 \cdot 10^{18}$ điện tử đi qua tiết diện của vật dẫn trong 1s.

Ví dụ 1–2: Vật dẫn có dòng điện 5 (A), hãy tính số lượng điện tử đi qua tiết diện trong vòng 1 phút?

Giải:

Lượng điện tích đi qua tiết diện trong 1 phút

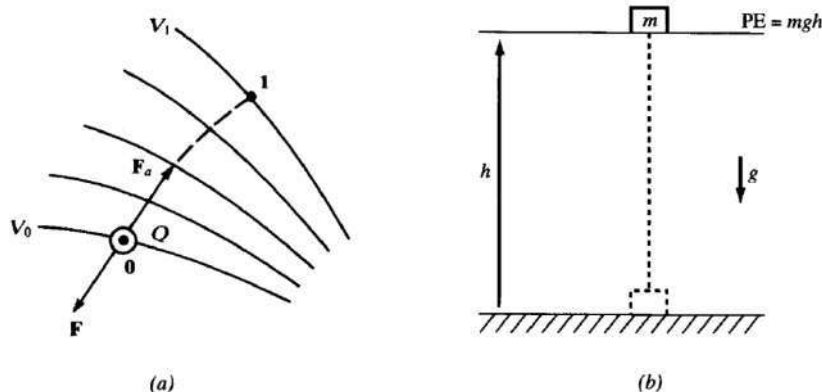
$$5(A) = 5(C/s)60(s/p) = 300(C/p)$$

Số lượng điện tử khi đó

$$n_e = \frac{300(C/p)}{1,602.10^{-19}(C)} = 1,87.10^{21}$$

1.1.4. Điện thế

Trong điện trường, các điện tích luôn chịu tác động của lực, sẽ đẩy nhanh các điện tích. Công để di chuyển điện tích ngược với lực điện trường được trình bày trên hình 1-2a. Nếu 1 (J) là công để di chuyển điện tích 1 (C) từ vị trí 0 đến vị trí 1, thì vị trí 1 có điện thế 1 (V) so với vị trí 0 ($1 V = 1 J/C$). Điện thế trong điện trường cũng có khả năng sinh công tương tự như khối lượng trong hình 1-2b, nếu nâng một vật ngược với lực trọng trường đến độ cao h trên mặt đất, thế năng của vật (m) có khả năng thực hiện một công khi được thả xuống. Thế năng đã biến thành động năng khi thả vật xuống.



Hình 1-2

Ví dụ 1–3: Trong mạch điện, cần một năng lượng 9,25 (μJ) để di chuyển một lượng điện tích 0,5 (μC) từ điểm a đến điểm b. Hiệu số điện thế giữa hai điểm bằng bao nhiêu.

Giải:

$$V = \frac{9,25.10^{-6}(J)}{0,5.10^{-6}(C)} = 18,5(V)$$

1.1.5. Năng lượng và công suất điện

Năng lượng điện (tính theo joules) sẽ được nhắc tới trong các phần sau khi xét các đại lượng điện dung, điện cảm tương ứng với khả năng tích trữ năng lượng điện của điện trường và từ trường. Để đánh giá quá trình thực hiện công 1 (J) trong 1s, khi năng lượng được truyền đi là công suất điện (W). Hơn nữa, tích của điện thế và dòng điện cũng chính là công suất điện:

$$p = v.i \text{ (1W = 1V.1A) hoặc: } V.A = J/C \cdot C/s = J/s = W$$

Ý nghĩa cơ bản hơn, công suất chính là đạo hàm theo thời gian: $p = dw/dt$, như vậy công suất tức thời thường là hàm số theo thời gian. Các giá trị công suất trung bình P_{avg} , hoặc công suất hiệu dụng P_{rms} , được áp dụng khi dòng điện và điện áp biểu diễn ở dạng hàm sin.

Ví dụ: 1–4. Điện trở có hiệu điện thế 50V và có 120C đi qua trong 1 phút, hãy xác định công suất điện biến đổi thành nhiệt năng?

$$120 \text{ (C/min)} / 60 \text{ (s/min)} = 2 \text{ (A)}$$

$$P = 2 \text{ (A)} \cdot 50 \text{ (V)} = 100 \text{ (W)}$$

Với $W = 1 \text{ J/s}$, điện năng biến thành nhiệt năng của điện trở là 100 J/s.

1.1.6. Hằng số và hàm số

Để phân biệt giữa các đại lượng hằng số và biến số theo thời gian người ta sử dụng chữ cái in hoa cho các hằng số, và chữ cái thường cho biến số. Ví dụ: dòng điện không đổi có giá trị 10A, được viết $I = 10(A)$, trong khi dòng điện 10A biến thiên theo thời gian, được viết $i = 10.f(t)$.

Các đại lượng biến đổi thường được sử dụng trong phân tích mạch điện có dạng hàm tuần hoàn sin $i = 10\sin \omega t \text{ (A)}$, và dạng hàm số mũ $v = 12e^{-at} \text{ (V)}$.

1.2. Phần tử cơ bản của mạch điện

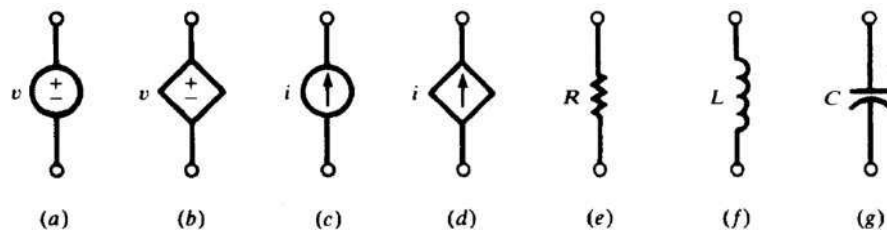
1.2.1. Phần tử thụ động và tích cực

Mọi thiết bị điện đều có thể biểu diễn bằng mạch, sơ đồ hoặc mạng được hình thành từ việc liên kết nối tiếp hoặc song song các phần tử có hai đầu kết nối. Phân tích mạch, sơ đồ có thể thấy trước được cách thức hoạt động của thiết bị thực tế. Phần tử có hai đầu kết nối (phần tử) trong hình (1-3), ký hiệu bằng hình (chữ nhật) và 2 đầu kết nối A và B. Phần tử tích cực là nguồn áp hoặc nguồn dòng, đặc trưng khả năng cấp năng lượng cho mạch. Điện trở, điện cảm và điện dung là các phần tử thụ động, nhận năng lượng từ nguồn và chúng biến đổi thành các dạng năng lượng khác hoặc tích trữ dưới dạng năng lượng điện từ trường.



Hình 1-3

Trong hình 1-4 vẽ ký hiệu của 7 phần tử cơ bản trong mạch điện. Phần tử (a) và (b) – nguồn điện áp, (c) và (d) – nguồn dòng điện. Nguồn điện áp không bị ảnh hưởng của mạch điện là nguồn độc lập được ký hiệu bằng hình tròn (hình 1-4a). Nguồn điện áp phụ thuộc chịu ảnh hưởng từ mạch điện được ký hiệu bằng hình thoi (hình 1-4b). Nguồn dòng điện cũng tương tự gồm loại không bị ảnh hưởng từ mạch điện – nguồn dòng độc lập và loại chịu ảnh hưởng – nguồn phụ thuộc (hình 1-4 c,d). Ba phần tử thụ động: điện trở, cuộn cảm và tụ điện được ký hiệu bằng các biểu tượng (hình 1-4 e, f, g)

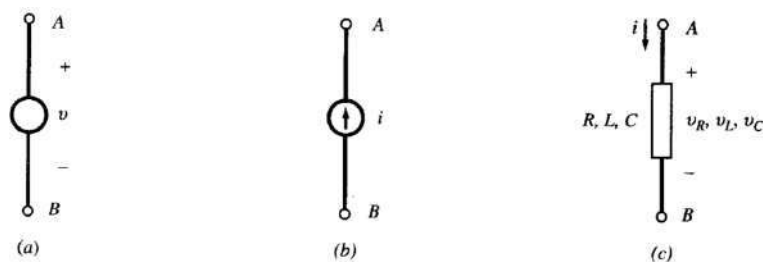


Hình 1-4

Trong mạch điện có thuật ngữ tham số gộp, một phần tử có thể biểu diễn bằng các thông số điện trở, điện cảm hoặc điện dung. Ví dụ: một cuộn dây có rất nhiều vòng cách điện với nhau có điện trở của cả chiều dài dây như vậy có thể biểu diễn bằng điện trở nối tiếp hoặc song song.

1.2.2. Quy ước về dấu

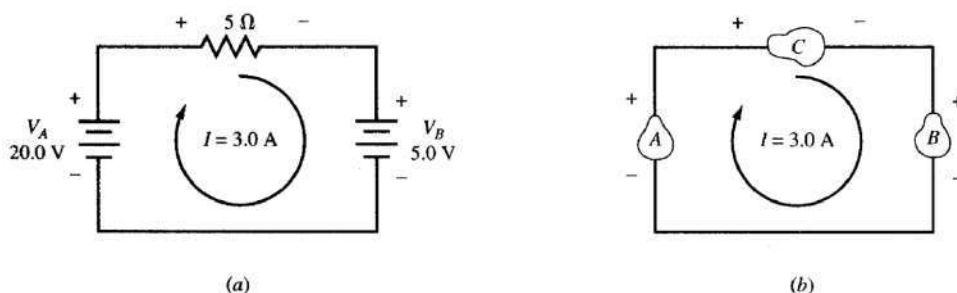
Cực tính của nguồn áp được ký hiệu bằng các dấu (+) và (-) đặt gần các đầu cực. Ví dụ: nguồn áp có biểu thức $v = 10\sin \omega t$ (hình 1-5a) khi đó cực A có điện thế dương so với cực B khi $\omega t = 0 \div \pi$ và cực B có điện thế dương hơn so với cực A khi $\omega t = \pi \div 2\pi$, trong chu kỳ đầu tiên của hàm.



Hình 1-5:

Tương tự như vậy, nguồn dòng điện cần ký hiệu chiều dòng điện bằng mũi tên trong hình 1-5b. Các phần tử thụ động R, L, C (hình 1-5c) cực có dòng điện đi vào thường ký hiệu dương (+) và ký hiệu âm (–) nơi dòng điện đi ra.

Dấu của công suất được thể hiện trên hình 1-6a với các nguồn áp không đổi $V_A = 20V$ và $V_B = 5V$, điện trở 5Ω . Kết quả, dòng điện $3A$ có chiều thuận kim đồng hồ. Bây giờ ta xét hình 1-6b, công suất được hấp thụ ở phần tử mà dòng điện đi vào cực dương. Công suất $V.I$ hoặc I^2R , được hấp thụ cả ở điện trở và nguồn V_B , tương ứng $45W$ và $15W$. Dòng điện đi vào cực âm của nguồn V_A , phần tử này cấp nguồn cho mạch $P = V.I = 60W$, qua đó có thể khẳng định công suất tiêu thụ tại nguồn V_B và điện trở được nguồn V_A cấp.



Hình 1-6:

1.2.3. Quan hệ dòng điện và điện áp

Các phần tử thụ động của mạch điện: điện trở R, cuộn dây L và tụ điện C được xác định theo cách thức dựa trên quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên phần tử. Ví dụ, nếu điện áp và dòng điện của một phần tử có quan hệ tỉ lệ không đổi thì phần tử đó là điện trở. Giá trị điện trở R là hệ số tỷ lệ $v = Ri$. Tương tự, khi điện áp tỷ lệ với đạo hàm theo thời gian của dòng điện thì phần tử đó là điện cảm, giá trị điện cảm L là hệ số tỷ lệ $v = L(di/dt)$. Cuối cùng, nếu dòng điện tỷ lệ với đạo hàm theo thời gian của điện áp thì phần tử đó là tụ điện. Giá trị điện dung là hệ số tỷ lệ $i = C(dv/dt)$.

Bảng 1–4 tổng hợp quan hệ dòng áp đối với 3 phần tử thụ động của mạch điện. Chú ý chiều của dòng điện tương ứng với cực tính của điện áp.

Phần tử	Đơn vị	Điện áp	Dòng điện	Công suất
Điện trở R	Ohm (Ω)	$v = Ri$ (định luật Ohm)	$i = \frac{v}{R}$	$p = v.i = Ri^2$
Điện cảm L	Henri (H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = v.i = Li \frac{di}{dt}$
Điện dung C	Fara (F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = v.i = Cv \frac{dv}{dt}$

1.2.4. Điện trở R

Tất cả các thiết bị tiêu thụ điện năng đều có thành phần điện trở trong mô hình mạch điện. Cuộn dây và tụ điện có khả năng tích trữ điện năng, nhưng sau đó phát lại năng lượng đó cho nguồn hoặc những phần tử khác của mạch. Công suất trên điện trở tính theo $p = v.i = Ri^2 = v^2 / R$ luôn dương như trong ví dụ dưới đây. Điện năng trên điện trở được xác định bằng tích phân của công suất tức thời.

$$w_R = \int_{t_1}^{t_2} p dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt$$

Ví dụ 1-5: Trên điện trở 4Ω có dòng điện $i = 2,5\sin \omega t$ (A). Hãy xác định điện áp, công suất và điện năng tiêu thụ trong một chu kỳ với $\omega = 500\pi$ rad/s

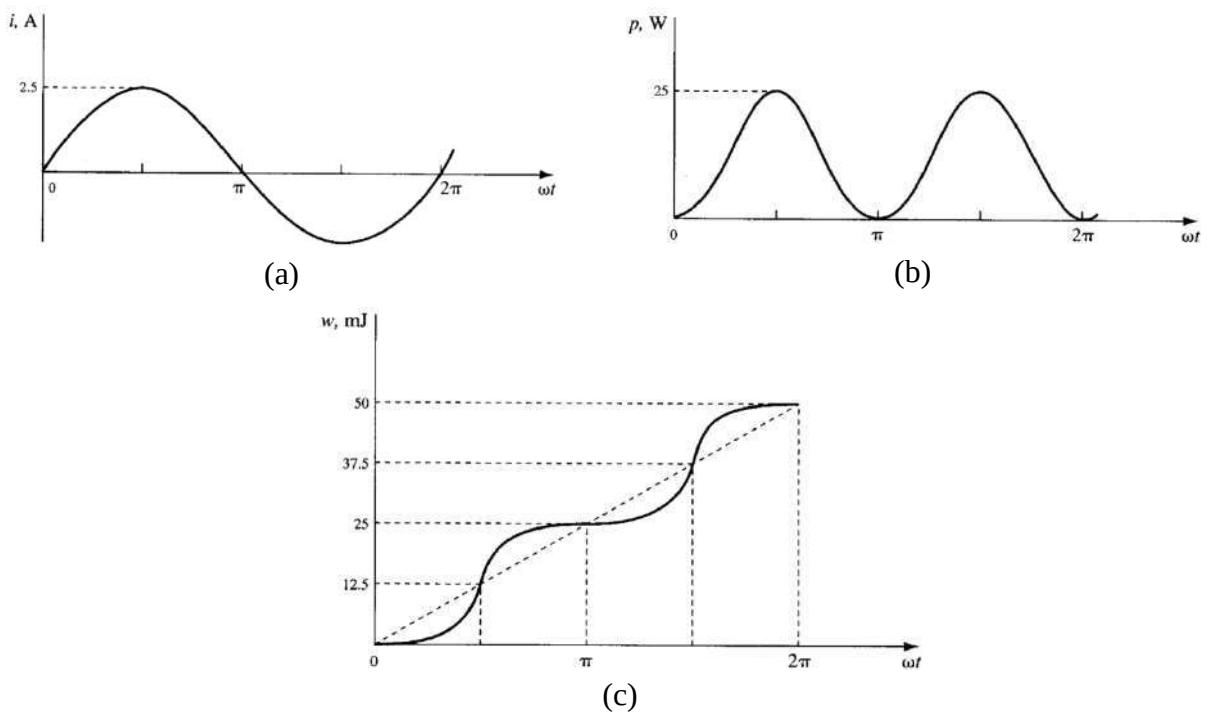
Giải:

$$v = R.i = 10\sin \omega t \text{ (V)}$$

$$p = Ri^2 = 25\sin^2 \omega t \text{ (W)}$$

$$w = \int_0^t p dt = 25 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right] \text{ (J)}$$

Đồ thị giá trị tức thời của v , p và w được vẽ trên hình 1-7, theo đó có thể thấy công suất của điện trở luôn dương và điện năng tiêu thụ tăng theo thời gian.



Hình 1-7

1.2.5. Cuộn cảm L

Phần tử trong mạch điện có khả năng tích trữ điện năng dưới dạng năng lượng từ trường được gọi là cuộn cảm (điện cảm). Với dòng điện biến thiên theo chu kỳ, điện năng được tích trữ trong một phần chu kỳ và phần khác năng lượng được phát trả cho nguồn và các phần tử khác. Khi ngắt điện cảm khỏi nguồn điện thì từ trường biến mất, nói cách khác không có điện năng lưu trữ khi không kết nối với nguồn. Dạng tương đương cuộn cảm có thể thấy trong động cơ điện, máy biến áp và những thiết bị có điện cảm trong thành phần mạch của chúng. Ngay cả các dây dẫn song song cũng có điện cảm và cần được tính đến với phổ các tần số. Công suất và điện năng được tính theo:

$$p = v.i = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L i^2 \right]$$

$$w_L = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} L i di = \frac{1}{2} L [i_2^2 - i_1^2]$$

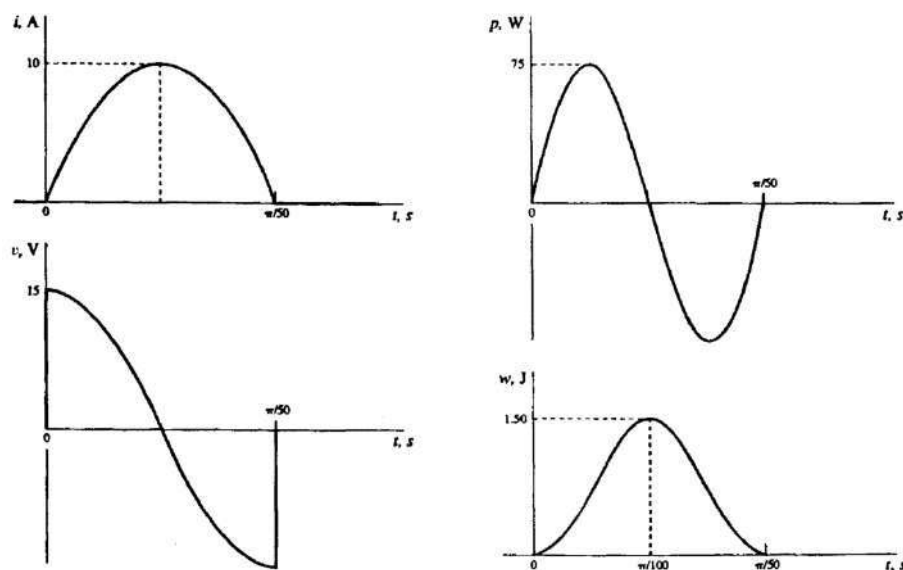
Điện năng tích lũy dưới dạng năng lượng từ trường $w_L = \frac{1}{2} L i^2$

Ví dụ 1-6: trong khoảng $t = 0 \div \pi/50$ s, điện cảm 30-mH có dòng điện $i = 10 \sin 50t$ (A). Hãy tính điện áp, công suất và năng lượng của điện cảm.

$$v = L \frac{di}{dt} = 15 \cos 50t \text{ (V)}$$

$$p = v.i = 75 \sin 100t \text{ (W)}$$

$$w = \int_0^t p dt = 0,75(1 - \cos 100t) \text{ (J)}$$



Hình 1-8

Như trên hình 1-8, năng lượng của cuộn cảm bằng 0 khi $t = 0$ và $t = \pi/50$ s. Sự trao đổi năng lượng diễn ra trong khoảng thời gian này, ban đầu tích lũy trong khoảng $(0 \rightarrow \pi/100)$ và phát trả lại mạch ngoài $(\pi/100 \rightarrow \pi/50)$.

1.2.6. Tụ điện C

Phần tử của mạch tích lũy điện năng dưới dạng năng lượng điện trường được gọi là tụ điện (điện dung). Khi điện áp biến thiên theo chu kỳ, điện năng được tích lũy trong một phần chu kỳ và phát ra trong phần còn lại cho nguồn và các phần tử khác. Trong khi cuộn cảm không còn từ trường khi ngắt khỏi nguồn, tụ điện vẫn còn điện tích và điện trường vì thế vẫn giữ nguyên. Điện tích này vẫn được giữ nguyên cho đến khi thiết lập đường xả và khi đó năng lượng được giải phóng. Điện tích $q = C.v$ tác dụng của điện trường trong chất điện môi, chính là cơ chế của sự tích lũy điện năng. Trong tụ điện đơn giản có hai bản cực song song, một lượng điện tích trên một bản cực còn trên bản cực còn lại không có điện tích, sự cân bằng có được khi xả tụ. Công suất và năng lượng trên tụ điện có quan hệ sau:

$$p = v.i = C.v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C v^2 \right]$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} C.v dv = \frac{1}{2} C (v_2^2 - v_1^2)$$

Điện năng tích lũy dưới dạng năng lượng điện trường $w_C = \frac{1}{2} C.v^2$

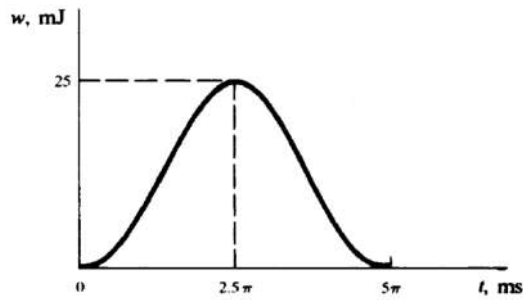
Ví dụ 1-7: trong khoảng thời gian $t = 0 \div 5\pi$ ms, một tụ điện 20 - mF có điện áp biến thiên $v = 50 \sin 200t$ (V). Hãy tính điện tích, công suất và năng lượng điện trên tụ với năng lượng ban đầu $w_C = 0$ khi $t = 0$.

$$q = C.v = 1000 \sin 200t \text{ (}\mu\text{C)}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0,2 \cos 200t \text{ (A)}$$

$$p = v.i = 5 \sin 400t \text{ (W)}$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = 12,5(1 - \cos 400t) \text{ (mJ)}$$

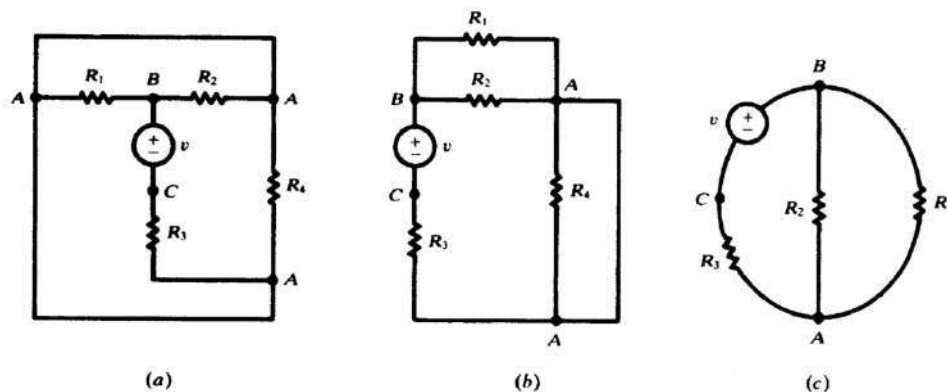


Hình 1-9

Trong khoảng $0 < t < 2,5\pi$ ms, điện áp và điện tích trên tụ tăng từ 0 đến các giá trị tương ứng 50V và 1000 mC. Hình 1-9 cho thấy năng lượng tích lũy tăng tới giá trị 25mJ sau đó trở về 0 khi tụ phát trả nguồn.

1.2.7. Sơ đồ mạch điện

Mỗi mạch điện có thể được cấu trúc theo một số phương án có vẻ khác nhau nhưng thực tế giống hệt nhau. Sơ đồ mạch có thể không phù hợp với một số phương pháp phân tích mạch, bởi vậy cần phải xét cấu trúc sơ đồ mạch trước khi quyết định phương pháp phân tích, hoặc có thể cần phải vẽ lại cho phù hợp. Một ví dụ cho thấy sự khác nhau bên ngoài nhưng thực chất hoàn toàn giống nhau. Trong hình 1-10a, có 3 nút A, được vẽ như 2 nút trong hình 1-10b. Hơn nữa điện trở R_4 bị nối tắt nên có thể bỏ nên trong hình 1-10c chỉ có 1 nút A với 3 nhánh nối vào.



Hình 1-10

1.2.8. Điện trở phi tuyến

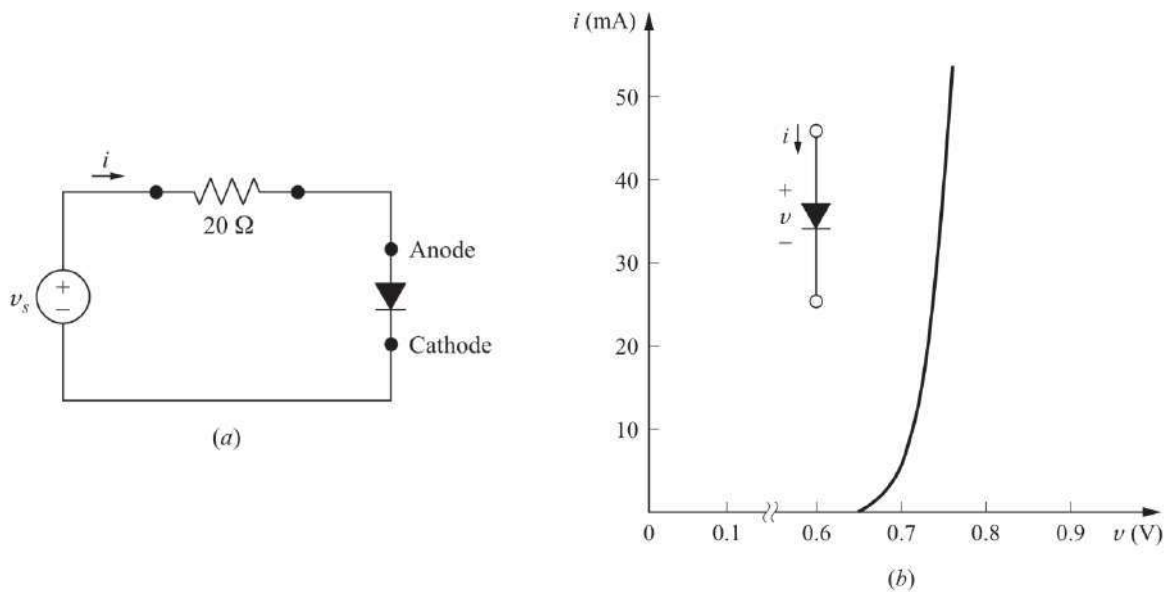
Quan hệ dòng-áp của một phần tử có thể ở dạng tức thời nhưng không nhất thiết phải tuyến tính. Những phần tử đó được mô hình hóa dưới dạng điện trở phi tuyến. Một ví dụ về phần tử loại này: đèn sợi, với điện áp càng cao dòng điện càng nhỏ. Một ví dụ nữa về điện trở phi tuyến – diode. Diode có dạng phần tử 2 cực, khả năng dẫn điện theo chiều (anode đến cathode, chiều thuận) tốt hơn nhiều so với chiều ngược lại (từ cathode đến anode, chiều ngược). Ký hiệu trong mạch điện của diode như trên hình 1-11a, mũi tên theo chiều từ anode đến

cathode và chỉ chiều thuận ($i > 0$). Với điện áp dương nhỏ trên các cực diode theo chiều thuận có thể dẫn được dòng điện lớn, còn điện áp âm trên cực diode theo chiều ngược chỉ cho dòng điện nhỏ đi qua (dòng rò) mặc dù điện áp có thể lớn. Trên hình 1-11b đặc tính vôn-ampe của diode lý tưởng.

$$v = 0 \quad \text{khi } i \geq 0$$

$$i = 0 \quad \text{khi } v \leq 0$$

Giá trị điện trở tĩnh của phần tử phi tuyến tại trạng thái dòng-áp (I, V) được tính theo: $R = V / I$, còn giá trị điện trở động $r = \Delta V / \Delta I$, chính là nghịch đảo độ dốc của dòng điện và so với điện áp. Cả hai giá trị tĩnh và động của điện trở phi tuyến phụ thuộc vào trạng thái làm việc.



Hình 1-11

Ví dụ 1-8: Đặc tính dòng-áp của diode bán dẫn được đo và ghi lại:

v (V)	0,5	0,6	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75
i (mA)	$2 \cdot 10^{-4}$	0,11	0,78	1,2	1,7	2,6	3,9	5,8	8,6	12,9	19,2	28,7	42,7

Chiều ngược (khi $v < 0$), dòng điện $i = 4 \cdot 10^{-15}$ (A). Sử dụng dữ liệu trong bảng hãy tính giá trị tĩnh và động (R và r) điện trở phi tuyến của diode khi làm việc với dòng điện 30 (mA) và công suất tiêu thụ khi đó.

Giải:

Từ bảng dữ liệu

$$R = \frac{V}{I} \approx \frac{0,74}{28,7 \cdot 10^{-3}} = 25,8 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$r = \frac{\Delta V}{\Delta I} \approx \frac{0,75 - 0,73}{(42,7 - 19,2) \cdot 10^{-3}} = 0,85 \text{ } (\Omega)$$

$$p = V \cdot I \approx 0,74 \cdot 28,7 \cdot 10^{-3} = 21,38 \text{ (mW)}$$

Ví dụ 1–9: Đặc tính dòng-áp của bóng đèn sợi wonfram được đo và ghi lại trong bảng. Điện áp một chiều có giá trị trong trạng thái ổn định được duy trì đủ lâu để có được sự cân bằng nhiệt.

v (V)	0,5	1	1,5	2	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
i (mA)	4	6	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	18	19	20

Hãy tìm giá trị tĩnh và động điện trở phi tuyến của đèn và công suất tiêu thụ với các điểm làm việc (a) $i = 10 \text{ mA}$; (b) $i = 15 \text{ mA}$.

Giải:

$$R = \frac{V}{I}; \quad r = \frac{\Delta V}{\Delta I}; \quad p = V \cdot I$$

$$(a) \quad R \approx \frac{2,5}{10 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ } (\Omega)$$

$$r \approx \frac{3 - 2}{(11 - 9) \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ } (\Omega)$$

$$p \approx 2,5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 25 \text{ (mW)}$$

$$(b) \quad R \approx \frac{5}{15 \cdot 10^{-3}} = 333 \text{ } (\Omega)$$

$$r \approx \frac{5,5 - 4,5}{(16 - 14) \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ } (\Omega)$$

$$p \approx 5 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 75 \text{ (mW)}$$

CHƯƠNG 2: Phương pháp phân tích mạch điện

2.1. Định luật mạch điện

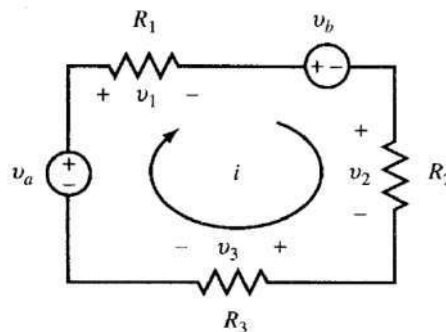
Mạch (mạng) điện chứa nhiều phần tử đơn lẻ kết nối với nhau và trong đó có ít nhất một nguồn áp hoặc nguồn dòng. Cách thức bố trí các phần tử mang lại quan hệ giữa dòng và áp. Những ràng buộc mới và phương trình biểu diễn chúng tạo nên quan hệ dòng-áp mới đối với một phần tử là lời giải của mạch điện.

Mục đích cơ bản của xác định các phần tử và kết nối chúng vào mạch điện và giải phương trình chính là thể hiện được hoạt động của các thiết bị điện như động cơ, máy phát điện, máy biến áp và thiết bị điện tử.

2.1.1. Định luật Kirchhoff về điện áp

Đối với bất kỳ vòng kín nào của mạch điện, định luật Kirchhoff về điện áp (KA) được phát biểu: tổng đại số của các điện áp bằng không. Điện áp có thể là nguồn hoặc do dòng điện chạy trên phần tử thụ động gây nên điện áp (đôi khi còn gọi là điện áp rơi). Định luật áp dụng tốt cho các mạch điện có nguồn không đổi, một chiều, hoặc nguồn biến đổi theo thời gian, $v(t)$ và $i(t)$. Phương pháp dòng điện vòng được dựa trên định luật Kirchhoff về điện áp.

Ví dụ: viết phương trình định luật Kirchhoff điện áp cho mạch sau:



Hình 2-1

$$-v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 = 0$$

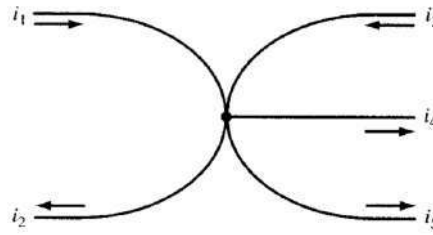
$$-v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 = 0$$

$$v_a - v_b = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

2.1.2. Định luật Kirchhoff về dòng điện

Điểm kết nối của hai phần tử hoặc nhiều hơn được gọi là nút. Kết nối giữa hai phần tử gọi là nút đơn, kết nối với 3 phần tử hoặc nhiều hơn được gọi là nút chính (nút). Định luật Kirchhoff về dòng điện được phát biểu: tổng đại số các dòng điện của một nút bằng không. Một cách phát biểu khác: tổng các dòng điện

đến nút bằng tổng các dòng điện đi khỏi nút. Phương pháp phân tích mạch theo điện áp nút dựa trên định luật này. Cơ sở của định luật là luật bảo toàn điện tích.



Hình 2-2

Ví dụ: viết phương trình định luật Kirchhoff dòng điện cho mạch điện hình 2-2.

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

2.1.3. Mạch điện các phần tử mắc nối tiếp

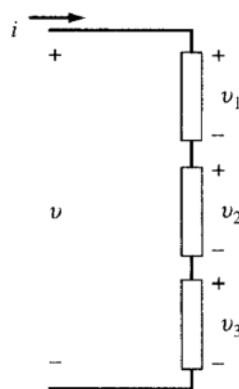
Các phần tử thụ động mắc nối tiếp (hình 2-3) có cùng dòng điện đi qua, điện áp rơi trên các phần tử lần lượt v_1 , v_2 và v_3 . Điện áp tổng v trên toàn đoạn mạch:

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

$$v = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

$$v = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$v = iR_{td}$$



Hình 2-3

Trong đó: R_{td} – điện trở tương đương thay cho 3 điện trở mắc nối tiếp, quan hệ dòng áp lúc đó cũng tương tự.

Với số lượng tùy ý điện trở nối tiếp:

$$R_{td} = R_1 + R_2 + \dots$$

Nếu các phần tử mắc nối tiếp là điện cảm:

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt}$$

$$v = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt}$$

$$v = L_{td} \frac{di}{dt}$$

Với số lượng tùy ý điện cảm nối tiếp:

$$L_{td} = L_1 + L_2 + \dots$$

Nếu ba phần tử trong mạch nối tiếp là điện dung, chấp nhận điều kiện ban đầu không, thì ta có hằng số của kết quả tích phân cũng sẽ bằng không.

$$v = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \frac{1}{C_3} \int idt$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int idt$$

$$v = \frac{1}{C_{td}} \int idt$$

Điện dung tương đương của các tụ điện mắc nối tiếp:

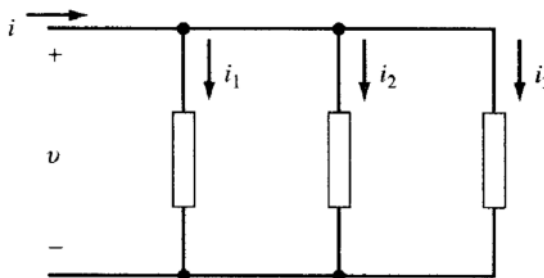
$$\frac{1}{C_{td}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Lưu ý: khi trong hai tụ mắc nối tiếp, một tụ có điện dung rất lớn hơn tụ còn lại, điện dung tương đương bằng giá trị của tụ nhỏ.

2.1.4. Mạch điện các phần tử mắc song song

Ba phần tử thụ động mắc song song (hình 2-4), theo định luật Kirchhoff dòng điện, dòng điện đến nút chính bằng tổng các dòng điện đi khỏi nút chính trên các nhánh.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$



Hình 2-4

Nếu trên các nhánh là điện trở, ta có:

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = v \frac{1}{R_{td}}$$

Các điện trở mắc song song, điện trở tương đương:

$$\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

Đặc biệt, chỉ có hai điện trở mắc song song:

$$R_{td} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Hoặc n điện trở bằng nhau mắc song song

$$R_{td} = \frac{R}{n}$$

Các điện cảm mắc song song, điện cảm tương đương:

$$\frac{1}{L_{td}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots$$

Đặc biệt, chỉ có hai điện cảm mắc song song:

$$L_{td} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Các tụ điện mắc song song, điện dung tương đương:

$$C_{td} = C_1 + C_2 + \dots$$

2.1.5. Điện trở phân (chia) điện áp và phân dòng điện

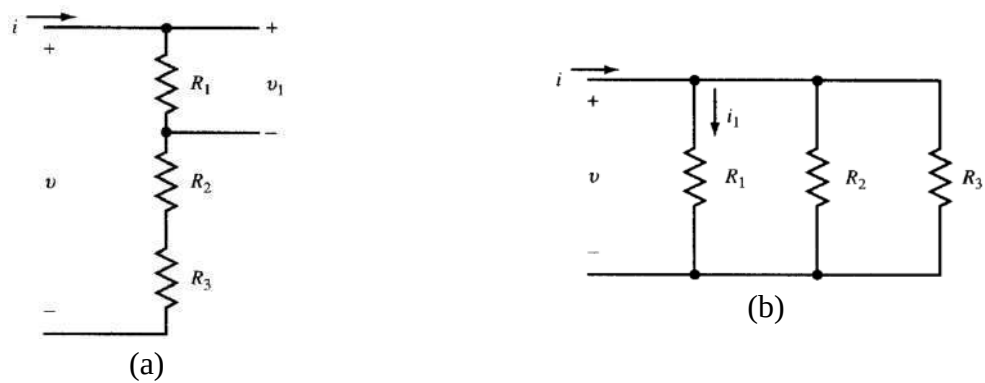
Bộ các điện trở mắc nối tiếp (hình 2-5a) có thể đóng vai trò bộ phân (chia) điện áp, còn bộ điện trở mắc song song (hình 2-5b) là bộ phân (chia) dòng điện.

Ta có:

$$v_1 = iR_1 \text{ và } v = i(R_1 + R_2 + R_3) \rightarrow v_1 = v \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$$

$$i_1 = \frac{v}{R_1} \text{ và } i = v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \rightarrow i_1 = \frac{v/R_1}{v/R_1 + v/R_2 + v/R_3}$$

$$i_1 = i \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$



Hình 2-5

Trường hợp có hai nhánh:

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

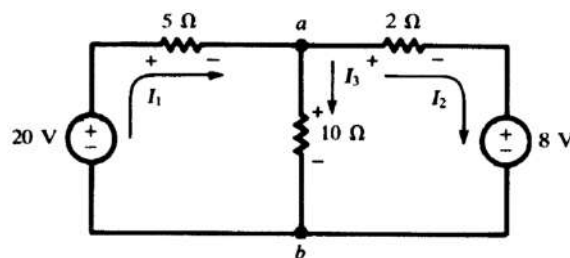
Có thể phát biểu qui luật sau: tỉ lệ dòng điện trên nhánh của mạch hai nhánh song song bằng tỉ lệ điện trở của nhánh kia trên tổng điện trở hai nhánh.

2.2. Phân tích mạch điện

2.2.1. Phương pháp dòng nhánh

Với phương pháp dòng nhánh, dòng điện được gán cho mỗi nhánh trong mạch. Sử dụng định luật Kirchhoff về dòng cho tất cả các nút độc lập và điện áp dựa hai nút được tính theo dòng điện trên nhánh. Như vậy lập được hệ phương trình đồng thời và kết quả dòng điện nhánh có được khi giải hệ trên.

Ví dụ: Giải mạch trong hình 2-6 tìm dòng điện trên các nhánh.



Hình 2-6

Các dòng điện I_1 , I_2 , I_3 được gán cho các nhánh như trong hình vẽ.

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho nút a:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

Điện áp V_{ab} có thể tính theo các biểu thức của áp trên các nhánh: $V_{ab} = 20 - I_1(5)$; $V_{ab} = I_3(10)$; $V_{ab} = I_2(2) + 8$. Từ đó có thể viết được các phương trình:

$$20 - 5I_1 = 10I_3 \quad (2)$$

$$20 - 5I_1 = 2I_2 + 8 \quad (3)$$

Giải các phương trình (1), (2) và (3) tìm được các giá trị dòng điện: $I_1 = 2A$; $I_2 = 1A$ và $I_3 = 1A$.

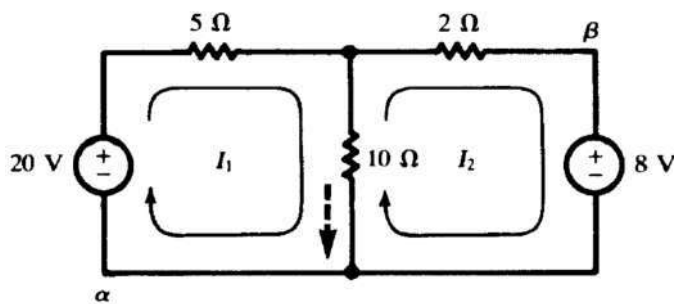
Dòng điện trên nhánh có thể chọn theo chiều ngược lại và kết quả chỉ cần đơn giản đổi dấu thích hợp.

Với các mạch điện phức tạp hơn phương pháp dòng điện nhánh khó áp dụng được bởi vì không có sự gợi ý xác định điểm bắt đầu và tiến trình hợp lý để lập đủ số lượng các phương trình cần thiết. Bên cạnh đó số phương trình độc lập cũng nhiều hơn so với phương pháp dòng vòng và điện thế nút.

2.2.2. Phương pháp dòng mắt lưới

Trong phương pháp dòng mắt lưới, dòng điện được gán cho mỗi cửa sổ mắt lưới của mạch điện, trong đó dòng điện khép kín mạch. Cách gọi khác của phương pháp này: dòng vòng. Mỗi phần tử và nhánh khi đó có dòng điện độc lập. Nếu nhánh có đồng thời hai dòng mắt lưới, dòng điện thực sẽ là tổng đại số của chúng. Chiều của dòng mắt lưới có thể thuận chiều kim đồng hồ hoặc ngược, tuy nhiên để thuận lợi nên gán tất cả dòng điện mắt lưới theo chiều kim đồng hồ. Khi đã gán tất cả dòng điện cho các mắt lưới, dùng định luật Kirchhoff về áp viết đủ số phương trình cần thiết.

Ví dụ: Tìm dòng điện trên các nhánh của mạch hình 2-7, sử dụng phương pháp dòng mắt lưới.



Hình 2-7

Các dòng điện I_1 và I_2 được chọn như trên sơ đồ mạch. Áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho vòng bên trái xuất phát từ điểm α , vòng bên phải xuất phát từ điểm β :

$$-20 + 5.I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2.I_2 = 0 \quad (5)$$

Giải đồng thời hai phương trình (4) và (5) ta được $I_1 = 2A$ và $I_2 = 1A$. Dòng điện trong nhánh giữa bằng $I_1 - I_2 = 1A$, trên hình là mũi tên nét đứt.

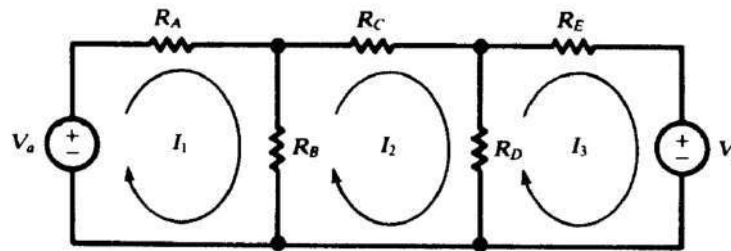
Các dòng điện không cần phải được giới hạn trong các cửa sổ để cho kết quả trong một hệ phương trình đồng thời như trong phương pháp dòng mắt lưới

đang xét. Qui tắc áp dụng của phương pháp này là mỗi phần tử trên nhánh đều có dòng hoặc các tổ hợp các dòng mắt lưới và hai phần tử trên hai nhánh không thể được gán cùng một dòng điện hoặc tổ hợp các dòng điện.

2.2.3. Phương pháp ma trận và định thức

Với mạch điện tổng quát có n mắt lưới, hệ n phương trình có thể viết ở dạng ma trận.

Ví dụ: Khi áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho sơ đồ mạch điện hình 2-8, ta có được 3 phương trình:



Hình 2-8

$$\begin{aligned} (R_A + R_B)I_1 - R_B I_2 &= V_a \\ -R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 - R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_b \end{aligned}$$

Đưa các phương trình vào dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}$$

Trong đó: ma trận ẩn là ma trận cột của các dòng mắt lưới, ma trận hệ số chứa các giá trị điện trở được gọi là ma trận điện trở và ma trận cột vế phải phương trình là các nguồn áp của mỗi mắt lưới.

Các phần tử của ma trận điện trở có thể định chỉ số như sau:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Phần tử R_{11} (hàng 1, cột 1) là tổng các điện trở trong mắt lưới có dòng I_1 đi qua, trong hình 2-7, $R_A + R_B$. Tương tự, các phần tử R_{22} và R_{33} là tổng điện trở có trong mắt lưới dòng I_2 và I_3 đi qua.

Phần tử R_{12} (hàng 1, cột 2) là tổng các điện trở chung của của hai dòng mắt lưới I_1 và I_2 đi qua. Dấu của R_{12} là (+) nếu hai dòng cùng chiều trên mỗi điện trở và dấu (-) trong trường hợp ngược chiều dòng điện. Trong hình 2–7, chỉ có R_B có chung các dòng mắt lưới I_1 và I_2 và chiều của chúng ngược nhau trên R_B do đó có dấu âm. Tương tự với các phần tử R_{21} , R_{23} , R_{13} và R_{31} là tổng các điện trở có chung hai dòng mắt lưới xác định theo chỉ số của phần tử, với dấu xác định như đối với R_{12} . Như vậy ta có thể thấy rằng với mọi giá trị i và j , $R_{ij} = R_{ji}$. Như vậy ta được ma trận đối xứng qua đường chéo chính.

Ma trận dòng điện không cần phải giải thích thêm, các phần tử của một cột duy nhất có chỉ số 1, 2, 3... để ký hiệu dòng mắt lưới tương ứng. Đây chính là ẩn số của phương pháp dòng mắt lưới phân tích mạch.

Phần tử V_1 trong ma trận điện áp là tổng các nguồn dòng có trong vòng mắt lưới dẫn dòng I_1 . Điện áp có giá trị dương trong tổng nếu dòng I_1 đi từ cực (-) đến cực (+) của nguồn, ngược lại có dấu âm. Nói cách khác, nguồn có dấu (+) nếu tạo ra dòng điện cùng chiều với dòng mắt lưới. Trong hình 2–8, mắt lưới 1 có nguồn V_a cùng chiều với I_1 ; mắt lưới 2 không có nguồn và mắt lưới 3 có nguồn V_b tạo dòng ngược chiều với I_3 nên có dấu âm.

Phương pháp ma trận phát triển từ phương pháp dòng mắt lưới có thể giải theo nhiều cách khác nhau. Một trong số đó là phương pháp sử dụng định thức được trình bày ở đây. Cần nói thêm rằng, các phương pháp giải phương trình ma trận khác có hiệu quả hơn đối với các mạch lớn.

Ví dụ: Giải phương trình ma trận (6) theo phương pháp định thức

Ẩn I_1 được tính theo tỉ số của hai định thức. Định thức mẫu số là định thức của ma trận điện trở, được ký hiệu Δ_R . Tử số là định thức của ma trận tương tự Δ_R , chỉ thay thế cột 1 bằng ma trận cột điện áp. Như vậy:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

Tương tự:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix} \quad I_3 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

Triển khai định thức tử số theo cột điện áp ta được các phương trình, qua đó có thể nhận được qui luật

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (7)$$

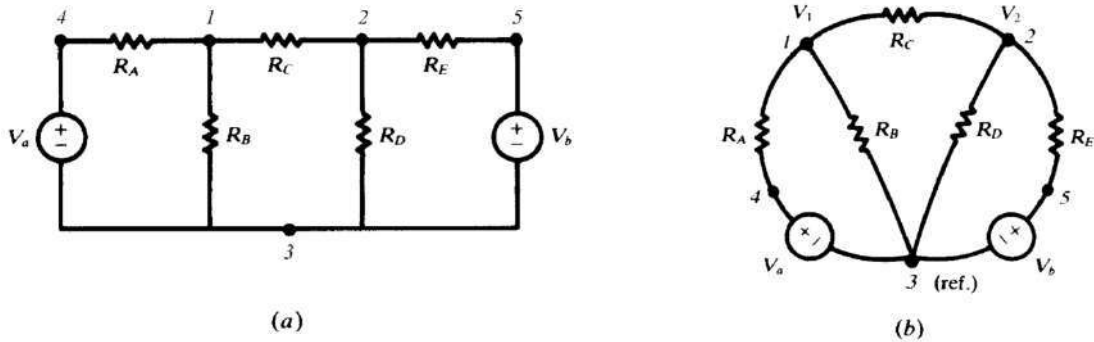
$$I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} \right) \quad (8)$$

$$I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} \right) \quad (9)$$

Trong đó: Δ_{ij} – định thức con của định thức của ma trận điện trở Δ_R , trong đó loại bỏ các phần tử hàng i và cột j .

2.2.4. Phương pháp điện thế nút

Mạch điện trong hình 2–9a có 5 nút trong đó các nút 4 và 5 là nút đơn giản còn nút 1, 2 và 3 là nút mạch. Phương pháp điện thế nút chọn một nút mạch làm gốc, các phương trình viết theo định luật Kirchhoff về dòng cho các nút mạch còn lại. Mỗi nút mạch (trừ nút gốc) được gán một điện thế, có thể coi là điện áp của nút đó so với nút gốc. Các điện thế này là ẩn số, giải các phương trình theo cách thích hợp ta được lời giải mạch điện.



Hình 2–9

Mạch điện được vẽ lại trên hình 2–9b, và 3 nút mạch được gán là nút gốc, các nút 1 và 2 có điện thế V_1 và V_2 tương ứng. Theo định luật Kirchhoff về dòng, tổng đại số các dòng điện tại nút 1 bằng không:

$$\frac{V_1 - V_a}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

Tương tự, tổng các dòng tại nút 2 cũng phải bằng không:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_b}{R_E} = 0$$

(Định luật Kirchhoff về dòng áp dụng ở dạng này theo qui tắc dòng điện đi ra khỏi nút. Ví dụ trên nhánh 1 – 2 ở hai phương trình chiều dòng điện khác nhau)

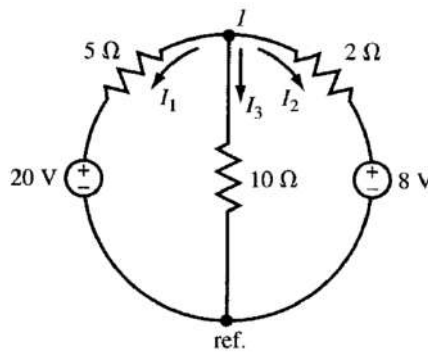
Nếu đặt 2 phương trình ẩn V_1 và V_2 vào dạng ma trận, ta có:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_a}{R_A} \\ \frac{V_b}{R_E} \end{bmatrix}$$

Ma trận đối xứng qua đường chéo chính. Phần tử 1,1 là tổng tất cả các nghịch đảo của điện trở nối với nút 1; phần tử 2,2 là tổng tất cả các nghịch đảo của điện trở nối với nút 2. Các phần tử 1,2 và 2,1 bằng tổng các nghịch đảo điện trở nối giữa nút 1 và 2 nhưng với dấu âm (trong ví dụ của chúng ta chỉ có một nhánh trong mạch). Vế phải của phương trình là ma trận dòng điện V_a/R_A và V_b/R_E . Cả hai giá trị đều dương bởi vì cả hai nguồn đều tạo ra dòng điện đến nút.

Ví dụ: Giải mạch điện trong hình 2-7 bằng phương pháp điện thế nút.

Mạch trong hình 2-7 được vẽ lại trong hình 2-10 với 2 nút và chỉ cần 1 phương trình. Giả thiết tất cả các dòng điện đều có hướng từ nút phía trên xuống nút phía dưới (nút gốc).



Hình 2-10

Phương trình lập được:

$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0$$

Nếu $V_1 = 10V$, khi đó $I_1 = (10 - 20)/5 = -2A$ (dấu âm cho biết dòng điện I_1 đi từ nút dưới đến nút trên); $I_2 = (10 - 8)/2 = 1A$ và $I_3 = 10/10 = 1A$.

2.3. Phân rã mạch điện

2.3.1. Điện trở vào và điện trở ra

Trong các mạch đơn nguồn, điện trở vào và điện trở ra rất được quan tâm. Như mạch điện trong hình 2-11, trong đó điện áp được gọi là V_1 và tương ứng là dòng điện I_1 . Nếu như chỉ có 1 nguồn V_1 , phương trình đối với dòng điện I_1 như sau:

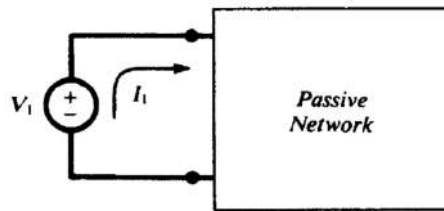
$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right)$$

Trong đó: Δ_R – định thức ma trận điện trở lập theo phương pháp dòng mắt lưới. Δ_{11} – định thức con khi loại bỏ hàng và cột có chỉ số tương ứng với mắt lưới có nguồn áp.

Điện trở vào của mạch là tỉ số giữa điện áp V_1 và dòng điện I_1 :

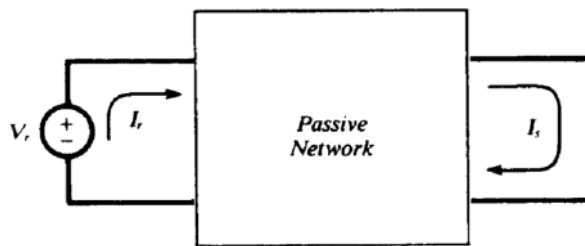
$$R_{\text{input1}} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

Có thể thấy rằng đơn vị của Δ_R/Δ_{11} có đơn vị là Ω .



Hình 2–11

Một nguồn điện áp cấp cho mạch gồm các phần tử thụ động (mạch thụ động) tạo ra điện áp giữa hai nút bất kỳ của mạch. Nếu thêm một điện trở vào hai nút của mạch, trên đó sẽ có dòng điện lấy ra từ mạch và thông thường làm giảm điện áp giữa hai nút nó mắc vào. Hiện tượng giảm áp này có nguyên nhân từ điện trở ra của mạch. Điện trở ra được tính bằng tỉ số giữa điện áp hở mạch và dòng điện ngắn mạch tại đầu ra của mạch.



Hình 2–12

2.3.2. Điện trở chuyển đổi

Một nguồn áp khi kết nối với bất cứ phần nào của mạch điện đều tạo ra dòng điện trên tất cả các nhánh. Ví dụ, một nguồn áp nối vào mạch thụ động tạo ra dòng điện đầu ra của mạch nơi có tải điện trở nối vào. Trong trường hợp này, mạch điện có hệ số chuyển đổi điện trở qua toàn mạch.

Hãy xét mạch thụ động trong hình 2–12, trong đó có một nguồn nối vào ký hiệu là V_r tạo ra dòng điện phía đầu ra I_s . Quan hệ giữa dòng điện I_s và điện áp V_r qua thông số của mạch thụ động (không nguồn). Nếu cần tính dòng điện I_s theo điện áp V_r (nguồn áp duy nhất), khi đó phương trình dòng điện mắt lưới

đối với I_s chỉ chứa một thành phần duy nhất liên quan đến V_r trong định thức tử số:

$$I_s = (0) \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_R} \right) + \dots + 0 + V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R} \right) + 0 + \dots \rightarrow I_s = V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R} \right)$$

Điện trở chuyển đổi của mạch điện là tỉ số giữa V_r và I_s :

$$R_{transferrs} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{rs}}$$

Ma trận điện trở đối xứng qua đường chéo chính $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$, nên ta có:

$$R_{transferrs} = R_{transfer sr}$$

Biểu thức này cho thấy một tính chất quan trọng của mạch tuyến tính: Nếu một nguồn áp ở mắt lưới r tạo ra dòng điện ở mắt lưới s , thì cũng nguồn đó ở mắt lưới s cũng tạo ra chính dòng điện có trị số không đổi trong mắt r . Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát với mạch n mắt lưới chứa một số nguồn nhất định. Dòng điện trong mắt lưới k được tính theo biểu thức:

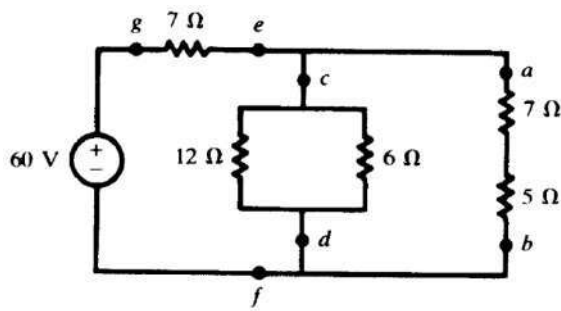
$$I_k = \frac{V_1}{R_{transfer1k}} + \dots + \frac{V_{k-1}}{R_{transfer(k-1)k}} + \frac{V_k}{R_{inputk}} + \frac{V_{k+1}}{R_{transfer(k+1)k}} + \dots + \frac{V_n}{R_{transfernk}}$$

Biểu thức dòng điện cho thấy nguyên lý chồng chất rất rõ ràng, cho thấy các điện trở ảnh hưởng đến sự tác động của các nguồn trên một mắt lưới cụ thể. Nguồn cách xa mắt lưới k sẽ có điện trở chuyển đổi đến mắt lưới lớn dẫn đến dòng điện do nguồn đó tạo ra là thành phần nhỏ trong dòng điện tổng I_k . Nguồn V_k , và các nguồn khác ở mắt lưới lân cận sẽ cho thành phần dòng điện lớn hơn trong I_k .

2.3.3. Quy tắc phân rã mạch điện

Phương pháp dòng mắt lưới và điện thế nút là các kỹ thuật chính để phân tích mạch điện. Tuy nhiên, điện trở tương đương của các nhánh nối tiếp hoặc song song kết hợp với các quy tắc phân chia điện áp và dòng điện tạo nên một phương pháp phân tích mạch khác. Phương pháp này thường phải vẽ lại thêm một số mạch điện bổ xung. Thậm chí, quá trình đơn giản hóa mạch điện dẫn đến những mạch rất đơn giản, có thể tính dễ dàng dòng, áp và công suất. Phân rã mạch điện bắt đầu bằng việc tìm kiếm các cụm điện trở nối tiếp và song song.

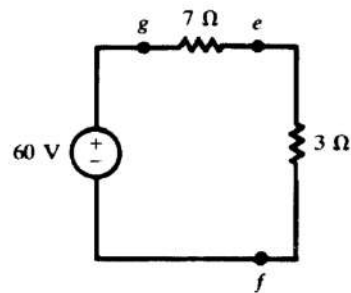
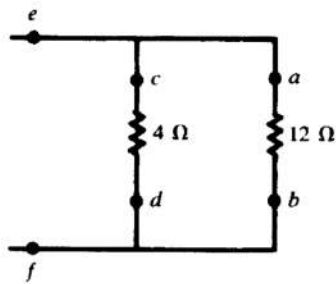
Ví dụ: Tính tổng công suất cung cấp từ nguồn 60V và công suất trên mỗi điện trở của mạch điện hình 2-13.



Hình 2-13

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$R_{cd} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4 \text{ (}\Omega\text{)}$$



Hình 2-14

Hai điện trở song song trên hình 2-14

$$R_{ef} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3 \Omega$$

Điện trở 3Ω nối tiếp với điện trở 10Ω, điện trở tương đương

$$R_{td} = 3 + 7 = 10 \Omega$$

Tổng công suất trên các điện trở bằng tổng công suất nguồn:

$$P_T = \frac{V^2}{R_{td}} = \frac{60^2}{10} = 360 \text{ W}$$

Công suất nguồn chia trên 2 điện trở R_{ef} và R_{ge} :

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7 + 3} P_T = 252 \text{ W}$$

$$P_{ef} = P_{3\Omega} = \frac{3}{7 + 3} P_T = 108 \text{ W}$$

Công suất P_{ef} chia trên hai điện trở R_{cd} và R_{ab} :

$$P_{cd} = \frac{12}{12 + 4} P_{ef} = 81 \text{ W}$$

$$P_{ab} = \frac{4}{12 + 4} P_{ef} = 27 \text{ W}$$

Cuối cùng công suất trên các điện trở riêng rẽ là:

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{12+6} P_{cd} = 27 \text{ W}$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{12+6} P_{cd} = 54 \text{ W}$$

$$P_{7\Omega} = \frac{7}{7+5} P_{ab} = 15,75 \text{ W}$$

$$P_{5\Omega} = \frac{5}{7+5} P_{ab} = 11,25 \text{ W}$$

2.3.4. Qui tắc xếp chồng

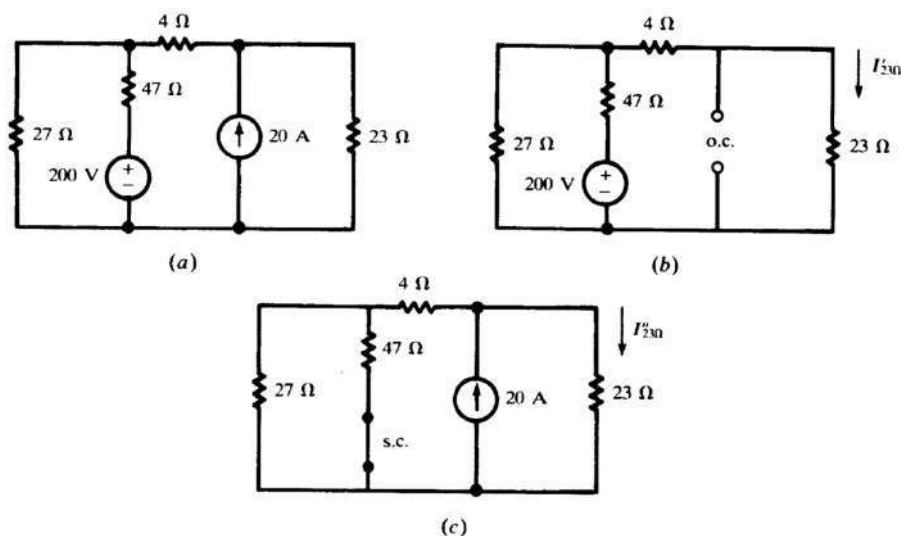
Mạch tuyến tính có chứa hai hoặc nhiều hơn nguồn độc lập có thể phân tích tìm giá trị điện áp và dòng điện nhánh bằng cách xét tác động riêng rẽ của từng nguồn và xếp chồng các kết quả. Nguyên tắc này được áp dụng do tính chất tuyến tính trong quan hệ dòng và áp. Với nguồn phụ thuộc, xếp chồng chỉ được áp dụng khi các thông số điều khiển nguồn nằm bên ngoài mạch chứa nguồn đang xét, hay có thể nói điều khiển nguồn không đổi như tất cả các nguồn cùng tác động. Các nguồn còn lại khi xét tác động của một nguồn được thay thế như sau: nguồn áp bị nối tắt và nguồn dòng bị hở mạch. Nguyên lý xếp chồng không áp dụng được khi tính toán công suất, bởi vì công suất trên phần tử tỉ lệ thuận với bình phương dòng điện hoặc điện áp, và quan hệ này là không tuyến tính.

Những minh họa tiếp theo về nguyên tắc xếp chồng có thể lấy từ ví dụ trước đây phương trình :

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (10)$$

Trong đó có bao gồm nguyên tắc xếp chồng. Vế phải là tổng của 3 thành phần tạo nên dòng điện I_1 , nếu chỉ có nguồn trên vòng mắt lưới 3, các vòng còn lại không có nguồn thì dòng điện I_1 chỉ có một thành phần.

Ví dụ: Hãy tính dòng điện trên điện trở 23Ω của mạch trong hình 2–15a bằng phương pháp xếp chồng.



Hình 2–15

Với nguồn 200V tác động một mình, nguồn 20A triệt tiêu $\rightarrow$ hờ mạch như trên hình 2-15b. Điện trở tương đương của mạch:

$$R_{td} = 47 + \frac{27(4 + 23)}{27 + 4 + 23} = 60,5 \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60,5} = 3,31 \text{ A}$$

$$I'_{23\Omega} = \left(\frac{27}{54} \right) 3,31 = 1,65 \text{ A}$$

Khi cho nguồn 20A tác động một mình, nguồn áp 200V được thay thế nối ngắn mạch như trong hình 2-15c. Điện trở tương đương của mạch:

$$R_{td} = 4 + \frac{27 \cdot 47}{27 + 47} = 21,15 \Omega$$

$$I''_{23\Omega} = \left(\frac{21,15}{21,15 + 23} \right) 20 = 9,58 \text{ A}$$

Dòng điện tổng trên điện trở 23Ω:

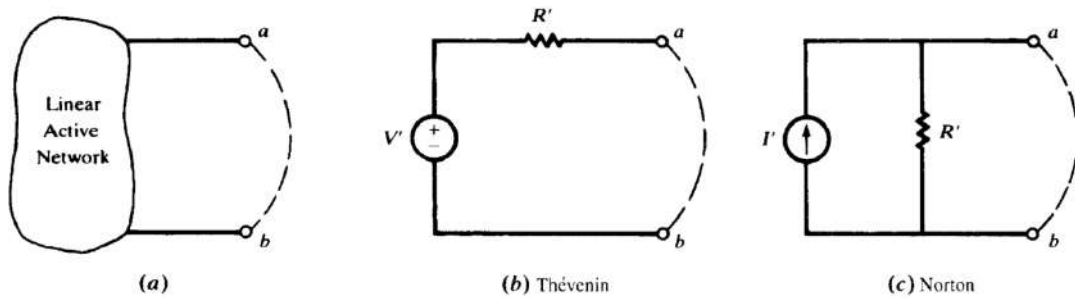
$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 1,65 + 9,58 = 11,23$$

2.4. Định lý mạch điện

2.4.1. Định lý Thevenin và Norton

Một mạch tuyến tính có chứa một hoặc nhiều nguồn áp, dòng có thể được thay thế bằng một nguồn áp nối tiếp điện trở (định lý Thevenin) hoặc một nguồn dòng song song điện trở (định lý Norton). Nguồn áp được gọi là nguồn áp tương đương Thevenin, V' và nguồn dòng được gọi là nguồn dòng tương đương Norton, I' . Hai điện trở trong nguồn áp Thevenin và nguồn dòng Norton hoàn toàn như nhau, R' . Khi hai cực ab trên hình 2-16a hờ mạch, xuất hiện điện áp giữa chúng (hình 2-16b), rõ ràng điện áp này phải bằng V' của sơ đồ tương đương Thevenin. Nếu giữa hai điểm đó nối ngắn mạch trên hình 2-14a (đường nét đứt) xuất hiện dòng điện, bằng dòng điện tương đương Norton (hình 2-14c). Như vậy sơ đồ mạch trên hình 2-14b và 2-14c tương đương với cùng mạch điện 2-14a, thì chúng tương đương với nhau.

Như vậy $I' = V' / R'$, còn nếu cả V' và I' được xác định từ mạch điện ban đầu thì ta có $R' = V' / I'$

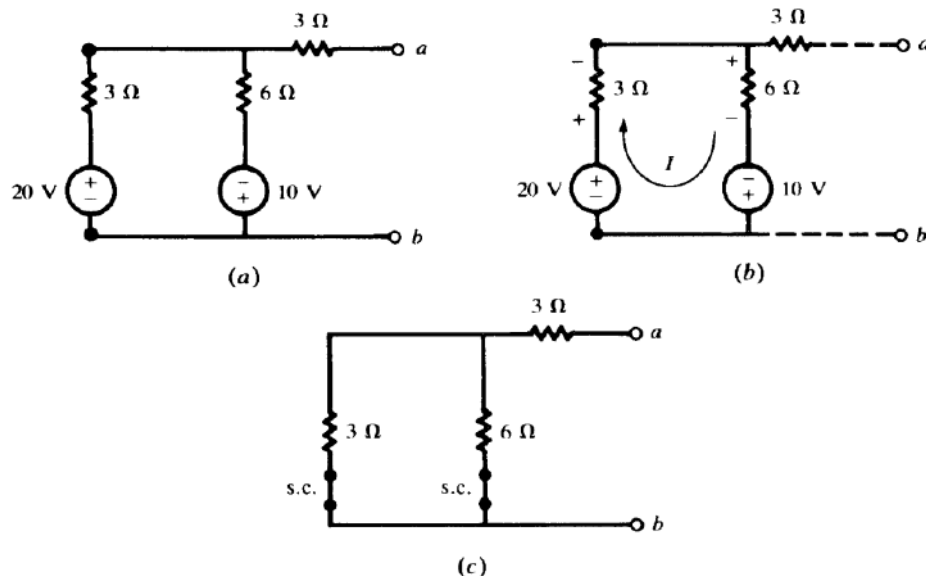


Hình 2-16

Ví dụ: Hãy tính mạch tương đương Thevenin và Norton cho mạch điện trong hình 1-25a.

Khi ab hở mạch, hai nguồn áp tạo thành mạch kín có dòng điện theo chiều kim đồng hồ qua các điện trở 3Ω và 6Ω (hình 1-25b)

$$I = \frac{20 + 10}{6 + 3} = \frac{30}{9} \text{ A}$$



Hình 2-17

Điện áp tương đương Thevenin:

$$V_{ab} = V' = 20 - \left(\frac{30}{9} \right) 3 = 10 \text{ V}$$

$$\text{Hoặc: } V_{ab} = V' = \left(\frac{30}{9} \right) 6 - 10 = 10 \text{ V}$$

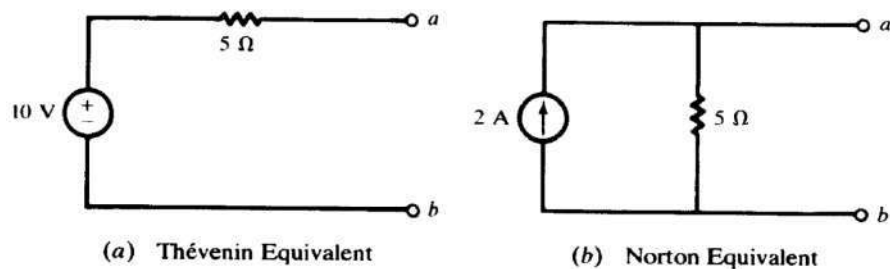
Điện trở R' là điện trở của mạch khi bỏ hết các nguồn (hình 1-25c), điện trở tương đương giữa hai cực a và b:

$$R' = 3 + \frac{3 \cdot 6}{9} = 5 \Omega$$

Khi ngắn mạch tại các cực ab, dòng điện I_{sc} do hai nguồn gây nên, xếp chồng các kết quả:

$$I_{sc} = I' = \left(\frac{6}{6+3} \right) \left(\frac{20}{3+\frac{3.6}{9}} \right) - \left(\frac{3}{3+3} \right) \left(\frac{10}{6+\frac{3.3}{6}} \right) = 2 \text{ A}$$

Hình 2-18 sơ đồ mạch điện tương đương Thevenin và Norton với các giá trị V' , R' và I' được tính riêng biệt. Theo định luật Ohm, nếu biết hai trong số đó có thể tìm được giá trị thứ ba.

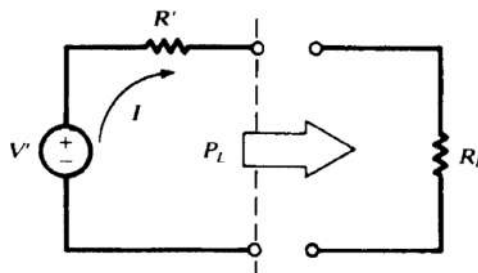


Hình 2-18

Các định lý Thevenin và Norton rất hữu dụng khi khảo sát một mạch điện với số lượng lớn các tải khác nhau. Sử dụng sơ đồ nguồn áp hoặc nguồn dòng tương đương kết nối lần lượt các tải ta có thể dễ dàng tính được các giá trị dòng áp, công suất trên tải.

2.4.2. Định lý truyền công suất cực đại

Có những thời điểm, cần phải tính được công suất cực đại truyền từ mạch có nguồn đến tải bên ngoài R_L . Giả thiết mạch có nguồn là tuyến tính, có thể phân rã thành mạch điện trên hình 2-19.



Hình 2-19

Khi đó:
$$I = \frac{V'}{R' + R_L}$$

Công suất tiêu thụ trên điện trở:

$$P_L = \frac{V'^2}{(R' + R_L)^2} R_L = \frac{V'^2}{4R'} \left[1 - \left(\frac{R' - R_L}{R' + R_L} \right)^2 \right]$$

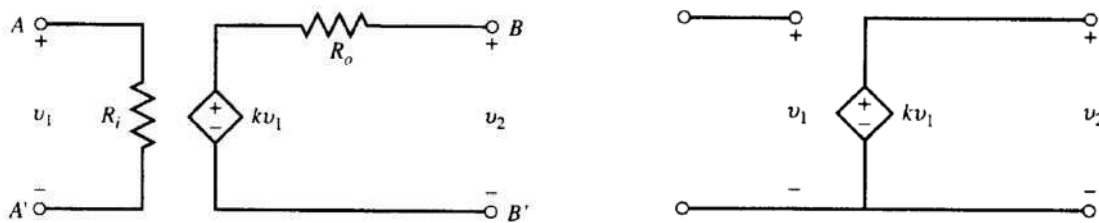
Trong biểu thức của P_L đạt giá trị tối đa $V'^2/4R'$ khi $R_L = R'$, trong trường hợp đó công suất trên R' cũng là có giá trị $V'^2/4R'$. Do đó hiệu suất truyền tải đạt cực đại 50 %.

Chương 3: Mạch khuếch đại và khuếch đại thuật toán

3.1. Mạch khuếch đại

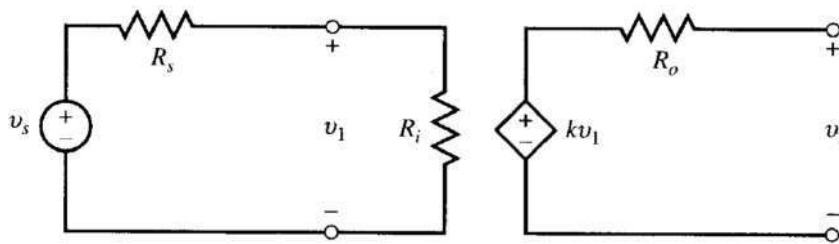
3.1.1. Khuếch đại tín hiệu

Mạch khuếch đại là thiết bị biến đổi tín hiệu vào thành tín hiệu ra. Bộ phận quan trọng khuếch đại là nguồn được điều khiển bởi tín hiệu vào. Mô hình đơn giản của khuếch đại được mô tả trong hình 3–1. Các cực đầu vào và đầu ra của khuếch đại thường nối chung và tạo nên cực chung. Khi đầu ra để hở mạch ta có điện áp $v_2 = k.v_1$ trong đó k là hệ số khuếch đại. Các điện trở R_i và R_o tương ứng là điện trở vào và ra của khuếch đại. Để hoạt động của khuếch đại tốt, các giá trị điện trở R_i cần phải cao và R_o cần phải thấp. Khuếch đại lý tưởng có $R_i = \infty$ và $R_o = 0$, như trong hình 3–1b



Hình 3–1

Ví dụ: Một nguồn thử nghiệm v_s với điện trở trong R được kết nối với đầu vào của khuếch đại điện áp có điện trở vào R_i như trong hình 3–2. Tìm tỉ số v_2 / v_s .



Hình 3–2

Điện áp vào của khuếch đại là v_1 được tính theo phân áp giữa R_i và R_s

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

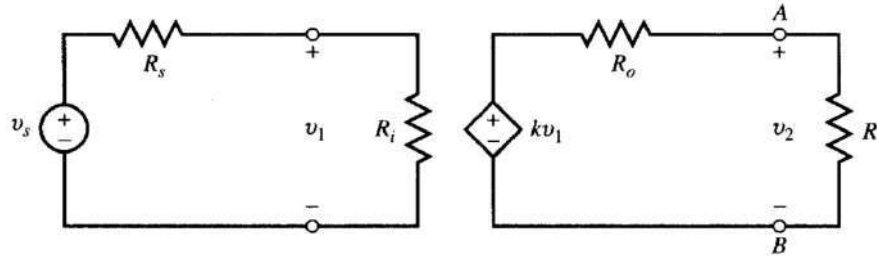
Điện áp ra v_2 được tính:

$$v_2 = k.v_1 = \frac{k.R_i}{R_i + R_s} v_s$$

$$\text{Từ đó: } \frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} k \quad (3-1)$$

Khuếch đại điện áp nguồn, độ lợi tín hiệu giảm đi một lượng $R_i/(R_i + R_s)$ so với hệ số biến đổi nguồn áp

Ví dụ: Trong hình 3-3, thử nghiệm nguồn v_s có điện trở trong R_s cấp nguồn cho tải R_L qua một khuếch đại với điện trở vào, ra là R_i và R_o . Hãy tìm tỉ số v_2/v_s .



Hình 3-3

Theo phân áp giữa R_i và R_s

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

$$v_2 = k \cdot v_1 \frac{R_L}{R_L + R_o} = k \frac{R_L \cdot R_i}{(R_L + R_o)(R_i + R_s)} v_s$$

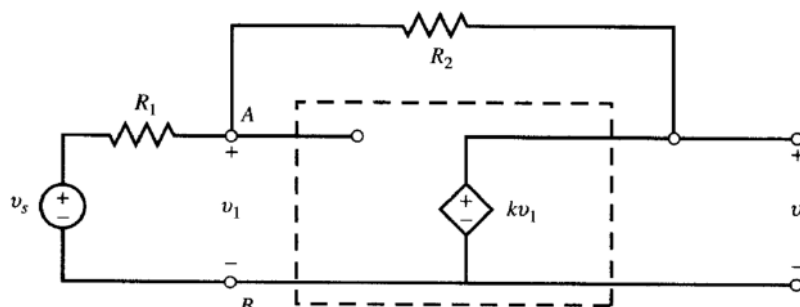
Hoặc:

$$\frac{v_2}{v_s} = k \frac{R_L}{R_L + R_o} \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (3-2)$$

Lưu ý rằng độ lợi tín hiệu giảm đi thêm một lượng $R_i/(R_i + R_s)$, từ đó làm cho điện áp đầu ra phụ thuộc vào tải.

3.1.2. Sơ đồ khuếch đại hồi tiếp

Độ lợi tín hiệu của khuếch đại có thể được kiểm soát bằng hồi tiếp, bằng cách lấy một phần tín hiệu đầu ra truyền về cho đầu vào, như được thực hiện trong khuếch đại lý tưởng hình 3-4, thông qua điện trở R_2 . Hệ số hồi tiếp $R_1/(R_1 + R_2)$ ảnh hưởng đến độ lợi chung của khuếch đại và làm cho các bộ khuếch đại ít nhạy với sự thay đổi hệ số khuếch đại k .



Hình 3-4

Ví dụ: Tìm v_2/v_s trong hình 3-4 và biểu diễn nó dưới dạng hàm tỉ lệ của $b = R_1/(R_1 + R_2)$

Từ mạch khuếch đại ta có:

$$v_2 = k.v_1 \rightarrow v_1 = v_2/k \quad (3-3)$$

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho nút A:

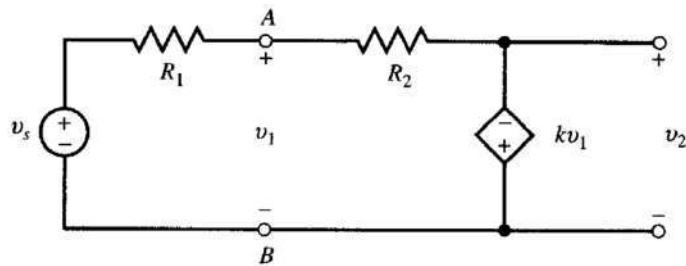
$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (3-4)$$

Thay $v_1 = v_2/k$ và biểu thức trên ta được:

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - R_1 k} = (1-b) \frac{k}{1-bk} \quad (3-5)$$

Trong đó: $b = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

Ví dụ: Trong hình 3-5, $R_1 = 1\text{k}\Omega$, và $R_2 = 5\text{k}\Omega$. (a) Tìm v_2/v_s như hàm của độ lợi k . (b) tính v_2/v_s với $k = 100$ và 1000 , nhận xét về kết quả.



Hình 3-5

(a): Hình 3-5 khác hình 3-4 chỉ ở cực tính của nguồn phụ thuộc, do đó để tìm tỉ số v_2/v_s ta dùng kết quả của ví dụ trước với sự thay đổi $-k$ trong biểu thức

$$\frac{v_2}{v_s} = (1-b) \frac{-k}{1-bk} \text{ trong đó } b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6+k}$$

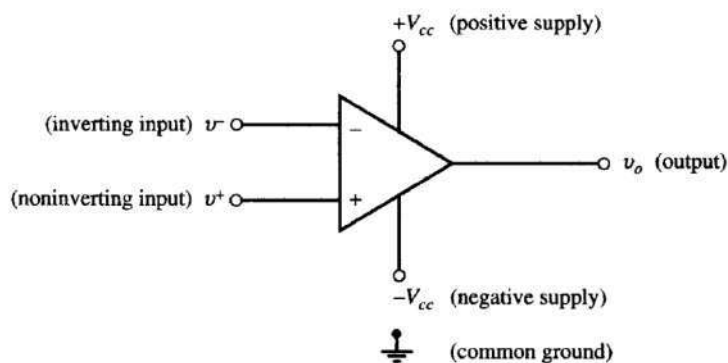
(b): Với $k = 100$, $v_2/v_s = -4,72$; và $k = 1000$, $v_2/v_s = -4,97$. Như vậy, với 10 lần tăng giá trị k , tỉ số v_2/v_s chỉ tăng 5,3% $(4,97 - 4,72)/4,72 = 5,3\%$.

Với các giá trị rất lớn của k , tỉ số v_2/v_s tiến tới $-R_2/(R_1+R_2)$ không phụ thuộc vào k .

3.2. Khuếch đại thuật toán

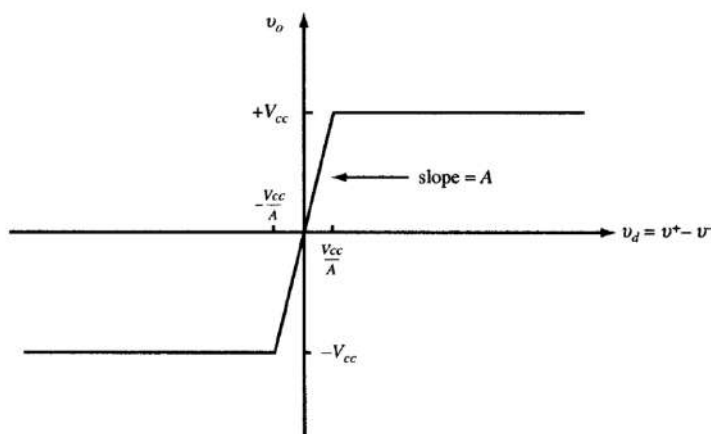
3.2.1. Khái niệm khuếch đại thuật toán

Khuếch đại thuật toán OA là thiết bị có hai đầu vào được ký hiệu bằng các cực (+) và cực (–) hoặc tương ứng là cực không đảo và cực đảo. Thiết bị được cấp nguồn một chiều dương và âm ($+V_{cc}$ và $-V_{cc}$). Cổng chung vào-ra, cấp nguồn cho OA được gọi là đất (hình 3–6)



Hình 3–6

Điện áp tín hiệu ra v_o phụ thuộc tín hiệu vào $v_d = v^+ - v^-$. Nếu bỏ qua các ảnh hưởng của điện dung, hàm truyền được mô tả trong hình 3–7. Phạm vi tuyến tính $v_o = A.v_d$ (trong đó A - hệ số khuếch đại hở, thường có giá trị rất cao). Tín hiệu v_o bão hòa và đạt giá trị $+V_{cc}$ và $-V_{cc}$ khi tín hiệu vào v_d vượt quá phạm vi tuyến tính $|v_d| \geq V_{cc} / A$

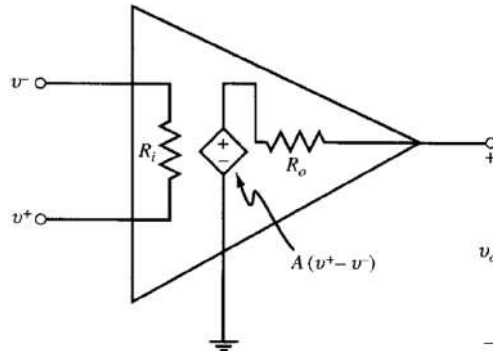


Hình 3–7

Trong hình 3–8 là cấu tạo của bộ khuếch đại thuật toán trong phạm vi tuyến tính và để đơn giản ta lược bỏ nguồn cấp. Trong thực tế, R_i có giá trị lớn, R_o có giá trị nhỏ và hệ số khuếch đại A trong khảng từ 10^5 đến vài triệu. Sơ đồ trên hình 3–8 sẽ hợp lệ nếu điện áp v_o nằm trong phạm vi từ $+V_{cc}$ đến $-V_{cc}$. Thông thường V_{cc} trong khoảng từ 5 đến 18 V.

Ví dụ: OA trong hình 3–8 có $V_{cc} = 15V$, $A = 10^5$, $v^- = 0$, hãy tìm giá trị giới hạn của v^+ để OA trong chế độ tuyến tính.

$$|v_o| = |10^5 v^+| < 15V \quad \rightarrow \quad |v^+| < 15 \cdot 10^{-5} = 150 \mu V$$



Hình 3–8

Ví dụ: Bộ OA, trong hình 3–8 có các thông số $V_{cc} = 5V$, $A = 10^5$, $v^- = 0$ và $v^+ = 100 \sin 2\pi t$ (μV). Tìm vẽ điện áp vòng mở v_o .

Điện áp vào của OA:

$$v_d = v^+ - v^- = (100 \sin 2\pi t) 10^{-6} V$$

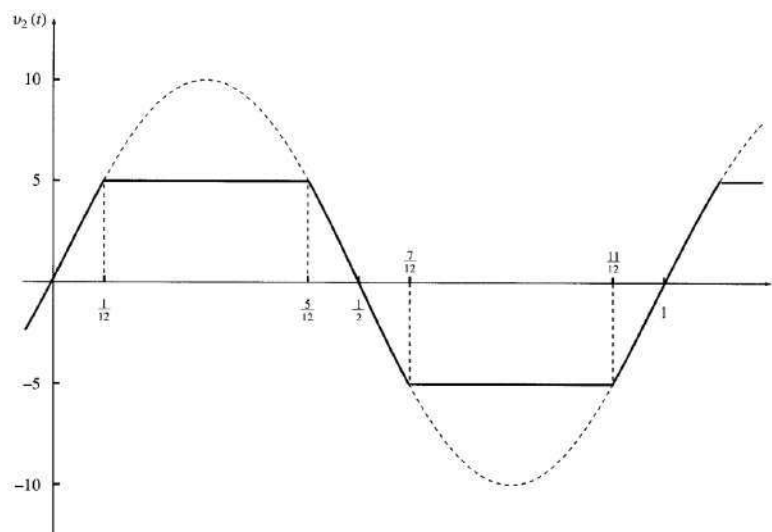
Khi OA làm việc ở chế độ tuyến tính:

$$v_o = 10^5 v_d = 10 \sin 2\pi t$$

Điện áp ra nằm trong phạm vi $+5V$ đến $-5V$ như trên hình 3–9.

Quá trình bão hòa bắt đầu khi $v_o = 10^5 v_d = 10 \sin 2\pi t$ đạt giá trị $5V$ tại thời điểm $t = 1/12$ s. OA ra khỏi trạng thái quá bão hòa tại thời điểm $t = 5/12$ s.

Hiện tượng tương tự cũng xảy ra với ngưỡng điện áp $-V_{cc}$: OA vào và ra khỏi trạng thái bão hòa tại các thời điểm $7/12$ và $11/12$ s.



Hình 3–9

Điện áp ra v_o trong 1 chu kỳ (1 s) biến thiên như sau:

$$v_o = \begin{cases} +5 & 1/12 < t < 5/12 \\ -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 10 \sin 2\pi t & \text{giá trị khác } t \end{cases}$$

Ví dụ: Nhắc lại ví dụ trên, bổ xung $v^+ = 50 \sin 2\pi t$ (μV) và $v^- = 25$ (μV).

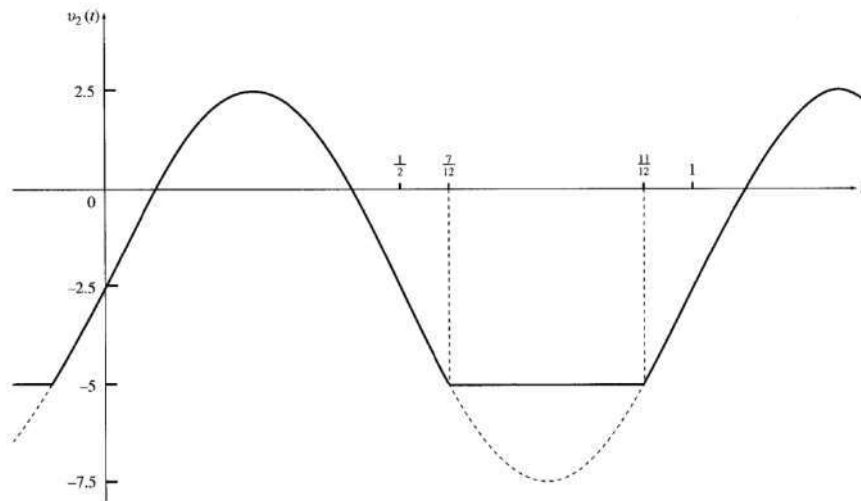
Điện áp vào OA:

$$v_d = v^+ - v^- = 50 \cdot 10^{-6} \sin 2\pi t - 25 \cdot 10^{-6} = 50(\sin 2\pi t - 1/2) 10^{-6} V$$

Khi OA ở chế độ tuyến tính ta có:

$$v_o = 10^5 v_d = 5(\sin 2\pi t - 1/2)$$

Điện áp v_o bão hòa khi đạt mức $-5V$ tại thời điểm $t = 7/12$ và ra khỏi bão hòa khi $t = 11/12$. Đồ thị tín hiệu v_o trên hình 3-10.



Hình 3-10

Điện áp ra v_o trong 1 chu kỳ (1 s) biến thiên như sau:

$$v_o = \begin{cases} -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 5 \sin 2\pi t & \text{khác } t \end{cases}$$

Ví dụ: Trong hình 3-11, các điện trở $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_i = 500 \text{ k}\Omega$, $R_o = 0$, và $A = 10^5$. Tìm tỉ số v_2/v_1 , giả thiết OA không bão hòa.

Tổng các dòng điện tại nút B bằng không, lưu ý $v_A = 0$ và $v_B = v_d$, ta có:

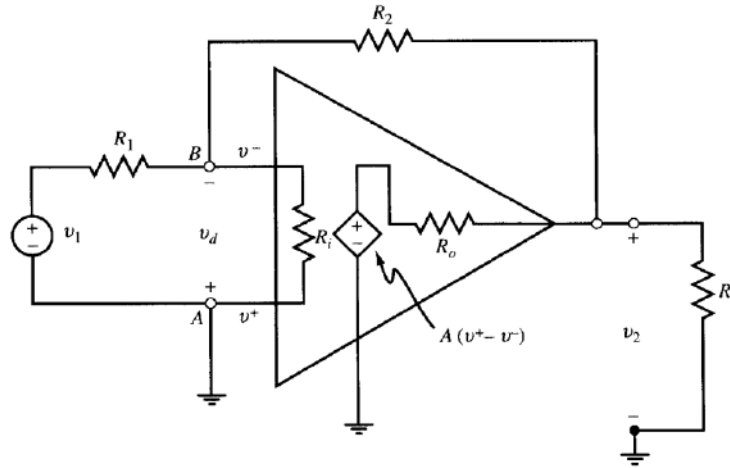
$$\frac{v_1 + v_d}{10} + \frac{v_d}{500} + \frac{v_2 + v_d}{50} = 0 \quad (3-6)$$

Khi $R_o = 0$, ta có:

$$v_2 = A v_d = 10^5 v_d \quad \rightarrow \quad v_d = 10^{-5} v_2 \quad (3-7)$$

Từ đây ta tìm được tỉ số v_2/v_1 :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{1 + 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-5} + 0,1 \cdot 10^{-5}} = -5$$

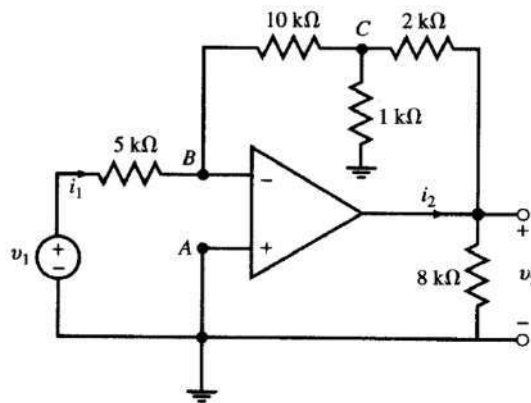


Hình 3-11

3.2.2. Mạch điện có khuếch đại thuật toán lý tưởng

Đối với OA lý tưởng, R_i và A hữu hạn và R_o bằng không. Dòng điện tại các cổng đảo và không đảo của OA bằng không, và nếu chế độ làm việc không bão hòa, hai đầu vào của OA có cùng điện áp. Trong phần này chúng ta chỉ xét OA lý tưởng và ở chế độ không bão hòa, ngoại trừ các trường hợp đặc biệt có chỉ dẫn riêng.

Ví dụ: OA trong hình 3-12 là lý tưởng và không bão hòa. Hãy tính (a) v_2/v_1 ; (b) điện trở vào v_1/i_1 ; và (c) i_1 , i_2 , p_1 (công suất của nguồn v_1) và p_2 (công suất tiêu hao trong điện trở) với $v_1 = 0,5V$.



Hình 3-12

(a): Cổng không đảo A nối đất nên $v_A = 0$. Đối với OA lý tưởng và không bão hòa $v_B = 0$. Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho các nút B và C, lưu ý dòng điện đầu vào của OA bằng không.

$$\text{Nút B: } \frac{v_1}{5} + \frac{v_C}{10} = 0 \quad \rightarrow v_C = -2v_1 \quad (3-8)$$

$$\text{Nút C: } \frac{v_C}{10} + \frac{v_C}{1} + \frac{v_C - v_2}{2} = 0 \quad \rightarrow v_2 = 3,2v_C \quad (3-9)$$

Thay (3–8) vào (3–9), ta có:

$$v_2 = -6,4v_1 \rightarrow v_2 / v_1 = -6,4$$

(b): Với $v_B = 0 \rightarrow i_1 = v_1 / 5000$

Điện trở vào: $v_1 / i_1 = 5000\Omega$

(c): Dòng điện vào $i_1 = v_1 / 5000$, nếu $v_1 = 0,5V$ thì $i_1 = 0,1mA$.

Để tìm dòng điện i_2 , áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại nút đầu ra của OA:

$$i_2 = \frac{v_2}{8000} + \frac{v_2 - v_C}{2000}$$

Với $v_2 = 3,2v_C$; $v_C = -1V$. Từ đó tính được $i_2 = 1,5mA$

Công suất của nguồn v_1 :

$$p_1 = v_1 i_1 = v_1^2 / 5000 = 50 \cdot 10^{-6} = 50 \mu W$$

Công suất trên các điện trở:

$$p_{1k\Omega} = v_C^2 / 1000 = 0,001 = 1000 \mu W$$

$$p_{2k\Omega} = (v_2 - v_C)^2 / 2000 = 0,00242 = 2420 \mu W$$

$$p_{5k\Omega} = v_1^2 / 5000 = 0,00005 = 50 \mu W$$

$$p_{8k\Omega} = v_2^2 / 8000 = 0,00128 = 1280 \mu W$$

$$p_{10k\Omega} = v_C^2 / 10000 = 0,0001 = 100 \mu W$$

Tổng công suất trên các điện trở:

$$p_2 = p_{1k\Omega} + p_{2k\Omega} + p_{5k\Omega} + p_{8k\Omega} + p_{10k\Omega}$$

$$p_2 = 1000 + 2420 + 50 + 1280 + 100$$

$$p_2 = 4850 (\mu W)$$

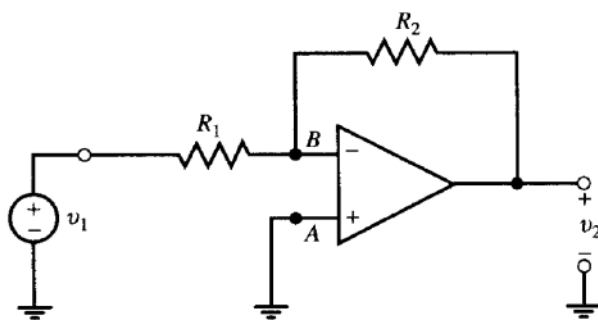
3.2.3. Mạch khuếch đại đảo

Trong mạch khuếch đại đảo, tín hiệu vào qua điện trở R_1 nối trực tiếp với cổng đảo, tại cổng ra tín hiệu hồi tiếp thông qua điện trở R_2 về cổng đảo. Cổng không đảo được tiếp đất (hình 3–13).

Để tìm hệ số khuếch đại v_2 / v_1 , áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại nút B:

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3-10)$$

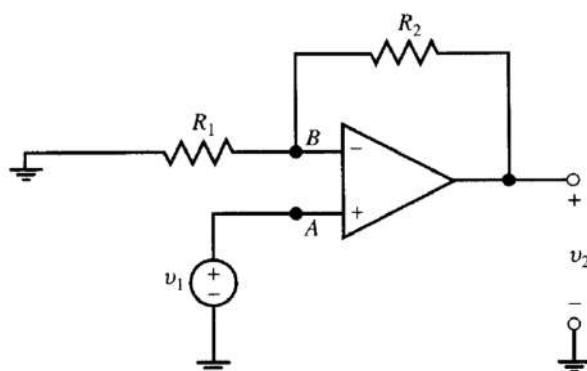
Hệ số khuếch đại có giá trị âm và chỉ phụ thuộc vào các giá trị điện trở R_1 và R_2 được lựa chọn. Điện trở vào của mạch là R_1 .



Hình 3-13

3.2.4. Mạch khuếch đại không đảo

Trong mạch khuếch đại không đảo, tín hiệu vào kết nối với cổng không đảo của OA. Cổng đảo nối với đầu ra qua điện trở R_2 và tiếp đất qua điện trở R_1 (hình 3-14).



Hình 3-14

Để tìm hệ số khuếch đại v_2/v_1 , áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại nút B, lưu ý, các nút A và B có cùng điện thế v_1 và OA không có dòng điện.

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (3-11)$$

Hệ số khuếch đại v_2/v_1 dương và lớn hơn 1. Điện trở vào của mạch hữu hạn được xác định theo điều kiện dòng điện OA bằng không.

Ví dụ: Tìm hệ số khuếch đại v_2/v_1 cho sơ đồ mạch hình 3-15.

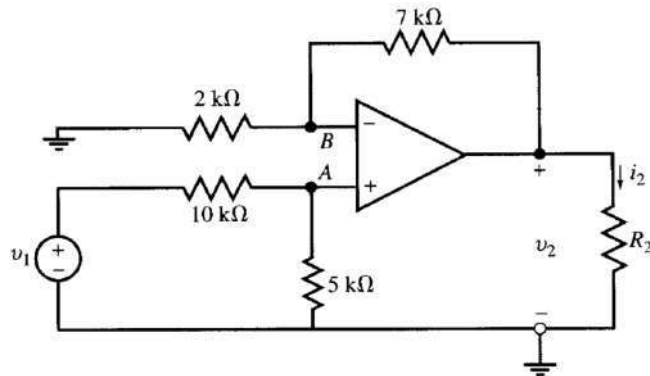
Điện thế v_A được xác định từ phân chia v_1 trên các điện trở $10\text{k}\Omega$ và $5\text{k}\Omega$

$$v_A = \frac{5}{10 + 5} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

Từ biểu thức hệ số khuếch đại:

$$v_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_A = \left(1 + \frac{7}{2}\right) v_A = \frac{9}{2} v_A = \frac{9}{2} \frac{1}{3} v_1 = 1,5 v_1$$

Hệ số khuếch đại $v_2 / v_1 = 1,5$



Hình 3-15

Cách khác:

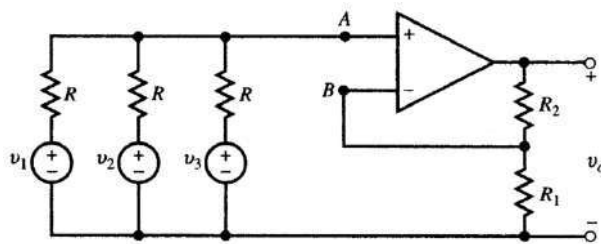
Nút B, điện thế v_B , chia điện thế v_2 trên các điện trở $7\text{k}\Omega$ và $2\text{k}\Omega$, và $v_B = v_A$:

$$v_B = \frac{2}{2+7} v_2 = \frac{2}{9} v_2$$

$$v_A = \frac{5}{10+5} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

Vì $v_B = v_A \rightarrow v_2 / v_1 = 1,5$

Ví dụ: Xác định điện áp v_o từ sơ đồ hình 3-16 với các điện áp v_1, v_2, v_3 và phân tử trong sơ đồ.



Hình 3-16

Xác định được điện thế nút A khi áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho nút này:

$$\frac{v_1 - v_A}{R} + \frac{v_2 - v_A}{R} + \frac{v_3 - v_A}{R} = 0 \rightarrow v_A = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

Từ biểu thức hệ số khuếch đại không đảo:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_A = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) (v_1 + v_2 + v_3)$$

3.2.5. Mạch khuếch đại cộng tín hiệu

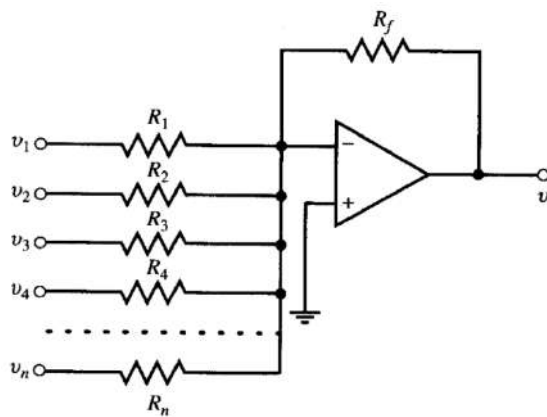
Cộng giá trị của các điện áp trong mạch có thể thực hiện trong mạch mô tả tại hình 1-41. Mạch này được gọi là mạch cộng tín hiệu, là trường hợp mở rộng của mạch khuếch đại đảo.

Để tìm điện áp ra, áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho công đảo:

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \dots + \frac{v_n}{R_n} + \frac{v_o}{R_f} = 0$$

Từ đó:

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n}v_n\right) \quad (3-12)$$



Hình 3-17

Ví dụ: Nếu trong sơ đồ mạch hình 3-17 có 4 đầu vào với các giá trị điện trở: $R_1 = 1\text{k}\Omega$; $R_2 = 0,5\text{k}\Omega$; $R_3 = 0,25\text{k}\Omega$ và $R_4 = 0,125\text{k}\Omega$, $R_f = 1\text{k}\Omega$. Điện áp vào được đặt một trong hai giá trị 1V và 0V. Tìm giá trị v_o trong các trường hợp điện áp v_4, v_3, v_2, v_1 nhận các giá trị:

(a) : $v_4 = 1\text{V}$; $v_3 = 0\text{V}$; $v_2 = 0\text{V}$; $v_1 = 1\text{V}$.

(b): $v_4 = 1\text{V}$; $v_3 = 1\text{V}$; $v_2 = 1\text{V}$; $v_1 = 1\text{V}$.

Giải:

Từ biểu thức điện áp ra:

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n}v_n\right) = -(8v_4 + 4v_3 + 2v_2 + v_1)$$

Thay các giá trị từ v_4 đến v_1 vào ta có

(a): $v_o = -9\text{V}$

(b): $v_o = -14\text{V}$

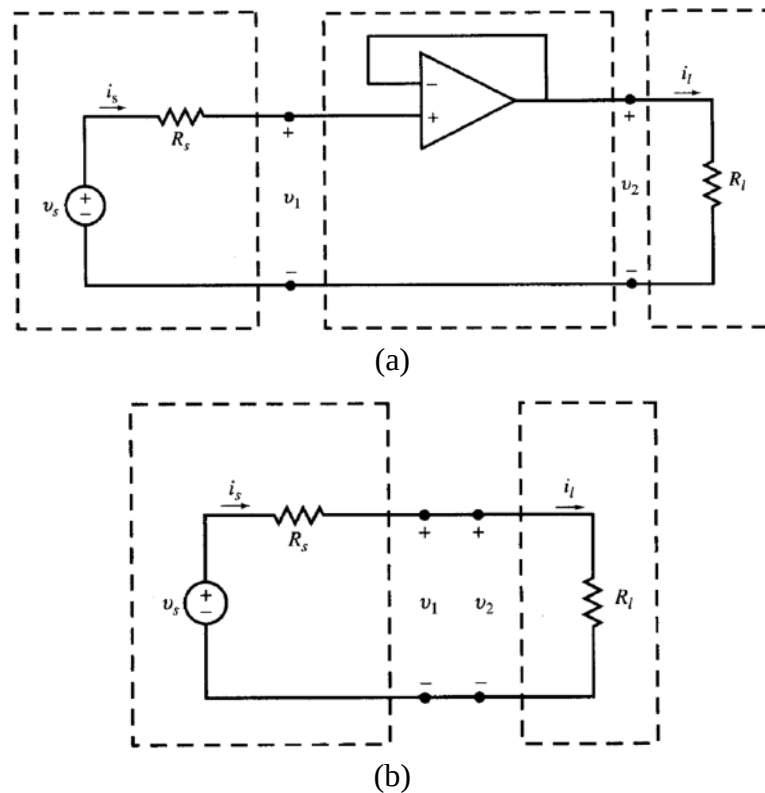
Tập hợp $\{v_4; v_3; v_2; v_1\}$ có dạng nhị phân chứa 4 bit giá trị cao (1V) hoặc thấp (0V). Mã nhị phân đầu vào các trường hợp (a) và (b) tương ứng là các số

nhị phân $(1001)_2 = (9)_{10}$ và $(1110)_2 = (14)_{10}$. Với các giá trị đầu vào ở mức 0V (thấp) hoặc 1V (cao), mạch khuếch đại biến đổi giá trị nhị phân tương ứng với các tổ hợp $\{v_4; v_3; v_2; v_1\}$ thành điện áp âm đo bằng V trong hệ đếm cơ số 10 tương ứng. Mạch khuếch đại tổng tín hiệu có thể làm bộ biến đổi số-tương tự.

3.2.6. Mạch điện áp theo

Mạch OA trên hình 3-18a có hệ số khuếch đại bằng một, trong đó $v_2 = v_1$, từ đây ta có $v_1 = v^+$, $v_2 = v^-$ và $v^+ = v^-$. Điện áp ra v_2 theo điện áp vào v_1 . Nếu nối thêm tải R_L , OA gây nên ảnh hưởng của dòng tải trên R_1 và điện áp nguồn. Lúc này OA làm việc như bộ đệm.

Ví dụ: (a) Tìm các giá trị: i_s , v_1 , v_2 và i_L trong sơ đồ hình 3-18a. (b) So sánh các kết quả tìm được với trường hợp nguồn nối trực tiếp với tải như trong hình 3-18b.



Hình 3-18

(a): Với sơ đồ OA trên hình 3-18a, ta có:

$$i_s = 0; v_1 = v_s; v_2 = v_1 = v_s$$

$$i_L = \frac{v_s}{R_L}$$

Do mạch OA có dòng điện bằng không, nên nguồn v_s được đưa đến trực tiếp trên tải R_L mà không bị suy giảm điện áp do dòng điện. Dòng điện trên tải được cấp từ OA.

(b): Loại bỏ OA, ta có:

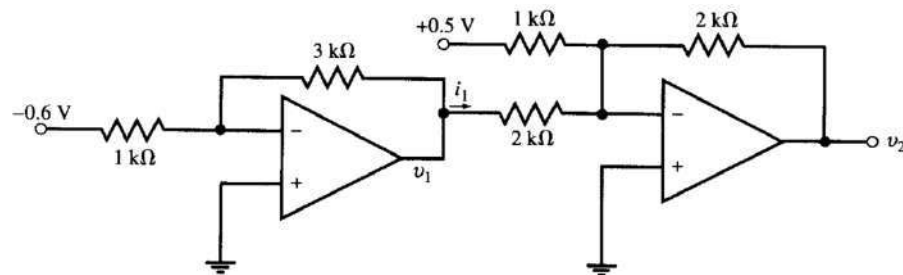
$$i_s = i_L = \frac{v_s}{R_s + R_L} \quad \text{và} \quad v_1 = v_2 = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s$$

Dòng điện đến R_L đi qua R_s và gây nên điện áp rơi trên R_s . Điện áp v_2 phụ thuộc vào tải R_L .

3.2.7. Mạch chứa nhiều bộ khuếch đại OA

Kết quả phân tích mạch chứa một khuếch đại đơn lẻ có thể áp dụng cho các mạch có chứa nhiều khuếch đại lý tưởng trong dạng liên tiếp hoặc lồng nhau do không có ảnh hưởng của tải.

Ví dụ: Tìm biểu thức của điện áp v_1 và v_2 trong mạch điện hình 3-19.



Hình 3-19

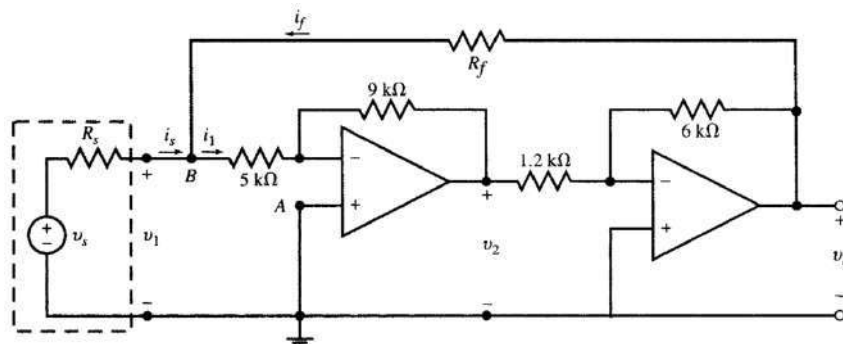
Khuếch đại thứ nhất trong mạch:

$$v_1 = -\frac{3}{1}(-0,6) = 1,8 \text{ V}$$

Khuếch đại thứ hai là mạch khuếch đại tổng:

$$v_2 = -\frac{2}{1}(0,5) - \frac{2}{2}(1,8) = -2,8 \text{ V}$$

Ví dụ: Cho $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ trong sơ đồ mạch hình 3-20, hãy tìm v_1 , v_2 , v_o , i_s , i_1 và i_f như hàm số của v_s với các giá trị của (a) $R_f = \infty$ và (b) $R_f = 40 \text{ k}\Omega$.



Hình 3-20

(a) $R_f = \infty$: dòng $i_f = 0$, hai bộ khuếch đại nối tiếp với $v^+ = 0$. Theo mạch phân áp đầu vào ta có:

$$v_1 = \frac{5}{5+1} v_s = \frac{5}{6} v_s$$

Theo biểu thức hệ số khuếch đại của các bộ OA ta có:

$$v_2 = -\frac{9}{5} v_1 = -\frac{9}{5} \frac{5}{6} v_s = -1,5 v_s$$

$$v_o = -\frac{6}{1,2} v_2 = -\frac{6}{1,2} (-1,5 v_s) = 7,5 v_s$$

$$i_s = i_1 = \frac{v_s}{1000 + 5000} = \frac{v_s}{6000} (A) = 0,166 v_s \text{ (mA)}$$

$$i_f = 0$$

(b) $R_f = 40 \text{ k}\Omega$:

Theo các biểu thức hệ số khuếch đại: $v_o = -5v_2$ và $v_2 = -(9/5)v_1$ do đó $v_o = 9v_1$. Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho các dòng điện rời khỏi nút B:

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_o}{40} = 0$$

Thay $v_o = 9v_1$ và giải theo v_s :

$$v_1 = v_s$$

$$v_2 = -\frac{9}{5} v_1 = -1,8 v_s$$

$$v_o = -\frac{6}{1,2} v_2 = \frac{6}{1,2} (-1,8 v_s) = 9 v_s$$

$$i_s = \frac{v_s - v_1}{6000} = 0$$

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho nút B:

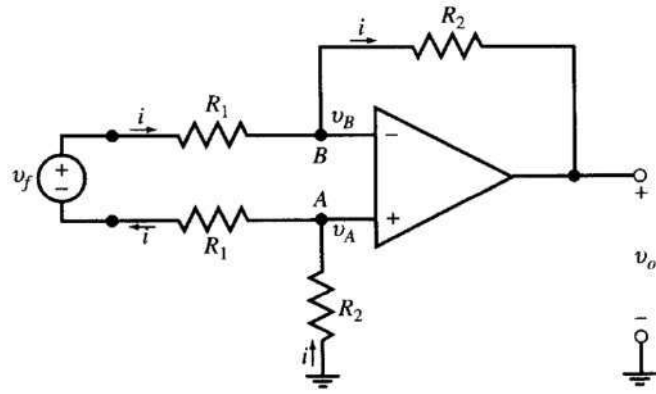
$$i_f = i_1 = \frac{v_s}{5000} (A) = 0,2 v_s \text{ (mA)}$$

Dòng điện i_1 trên điện trở vào $5\text{-k}\Omega$ được tạo nên bởi điện áp ra của OA thứ hai qua điện trở hồi tiếp $40\text{-k}\Omega$. Dòng điện i_s do nguồn v_s gây nên bằng không. Điện trở vào của mạch có giá trị vô hạn.

3.3. Mạch khuếch đại vi phân – tích phân

3.3.1. Vi phân và khuếch đại vi phân

Nguồn v_f không nối đất được gọi là nguồn nổi. Tín hiệu nguồn như vậy có thể được khuếch đại thông qua mạch trên hình 1-45.



Hình 3-21

Điện thế các cổng vào của OA như nhau ($v_A = v_B$), nên theo định luật Kirchhoff về áp ta có:

$$v_f = 2R_1 i \rightarrow i = \frac{v_f}{2R_1}$$

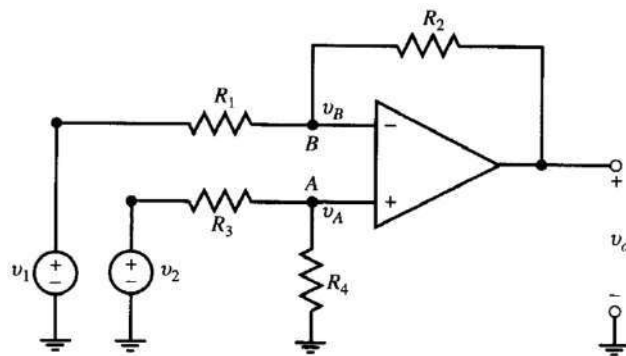
Vì OA không có dòng điện nên dòng đi qua R_2 cũng bằng i , áp dụng định luật Kirchhoff về áp, ta có:

$$v_o + R_2 i + R_2 i = 0 \rightarrow v_o = -2R_2 i = -\frac{R_2}{R_1} v_f \quad (3-15)$$

Trong trường hợp đặc biệt khi hai nguồn v_1 và v_2 có tiếp đất chung và tương ứng nối với cực đảo và không đảo của mạch OA, ta có $v_f = v_1 - v_2$ và:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} (v_1 - v_2) = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Ví dụ: Tìm biểu thức điện áp v_o như hàm số của v_1 và v_2 trong sơ đồ hình 3-22.



Hình 3-22

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại các nút A và B.

$$\text{Nút A: } \frac{v_A - v_2}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} = 0$$

$$\text{Nút B: } \frac{v_B - v_1}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0$$

Đặt $v_A = v_B$ trong các biểu thức định luật Kirchhoff về dòng ở trên:

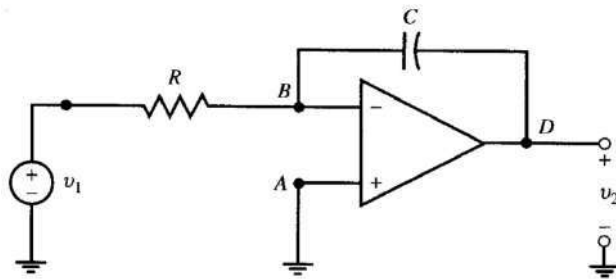
$$v_o = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)}v_2 - \frac{R_2}{R_1}v_1$$

Nếu $R_3 = R_1$ và $R_2 = R_4$, biểu thức v_o trở về dạng rút gọn ở trên.

3.3.2. Tích phân và mạch tích phân

Mạch tích phân

Thay điện trở hồi tiếp trong mạch vi phân bằng tụ điện ta có mạch tích phân cơ bản (hình 3–23) với kết quả:



Hình 3–23

Để xác định được quan hệ tín hiệu vào/ra, áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại công đảo:

$$\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC}v_1$$

$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt$$

Nói cách khác, tín hiệu ra bằng tín hiệu vào nhân với hệ số khuếch đại $-\frac{1}{RC}$

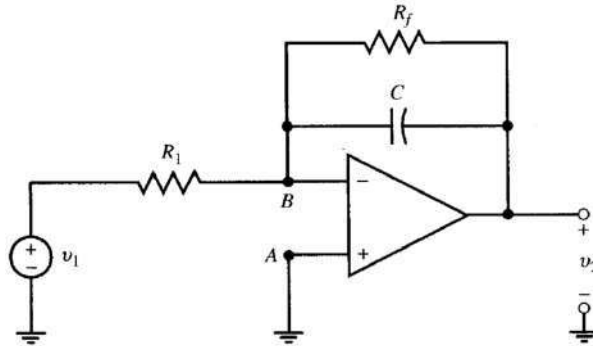
Ví dụ: Trong hình 3–23, cho biết $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$ và $v_1 = \sin 2000t$. Giả thiết $v_2(0) = 0$, hãy tìm v_2 với $t > 0$.

Điện áp ra:

$$v_2 = -\frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}} \int_0^t \sin 2000t \cdot dt = 0,5(\cos 2000t - 1)$$

Mạch tích phân Leaky

Mạch điện trên hình 3-24, được gọi là tích phân leaky, điện áp trên tụ luôn được xả thông qua điện trở hồi tiếp R_f . Điều này làm giảm hệ số khuếch đại $|v_2 / v_1|$ và dịch góc pha của v_2 .



Hình 3-24

Ví dụ: Trong hình 3-24, $R_1 = R_f = 1\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, và $v_1 = \sin 2000t$. Hãy tìm v_2 .

Cực đảo của OA có điện thế bằng không và tổng dòng điện đến nút bằng không.

$$\frac{v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_f} = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 + 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0$$

$$\text{Ta được: } 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -\sin 2000t$$

Giải phương trình tìm được v_2 có dạng hàm sin cùng tần số với v_1 nhưng khác biệt về biên độ và góc pha:

$$v_2 = A \cos(2000t + B)$$

Để tìm A và B, ta thay thế dv_2/dt và v_2 vào phương trình ():

$$\frac{dv_2}{dt} = -2000A \sin(2000t + B)$$

$$10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -2A \sin(2000t + B) + A \cos(2000t + B) = -\sin 2000t$$

$$10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -2A \sin(2000t + B) + A \cos(2000t + B) = -\sin 2000t$$

$$2A \sin(2000t + B) - A \cos(2000t + B) = \sin 2000t$$

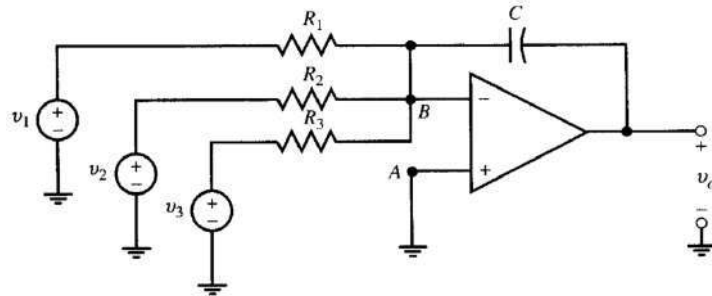
$$A\sqrt{5} \sin(2000t + B - 26,57^\circ) = \sin 2000t$$

$$\text{Từ đây suy ra: } A = \sqrt{5}/5 \text{ và } B = 26,57^\circ$$

$$\rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2000t + 26,57^\circ)$$

Mạch tích phân cộng tín hiệu

Mạch khuếch đại đơn, các tín hiệu vào khác nhau kết nối với cổng đảo và tụ điện hồi tiếp, như trên hình 1-50, có thể tạo ra tổng của các tích phân với hệ số (...).



Hình 1-50

Ví dụ: Tìm tín hiệu ra v_o trong mạch khuếch đại tích phân tổng, hình 1-50, với 3 tín hiệu vào.

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại cực đảo của OA:

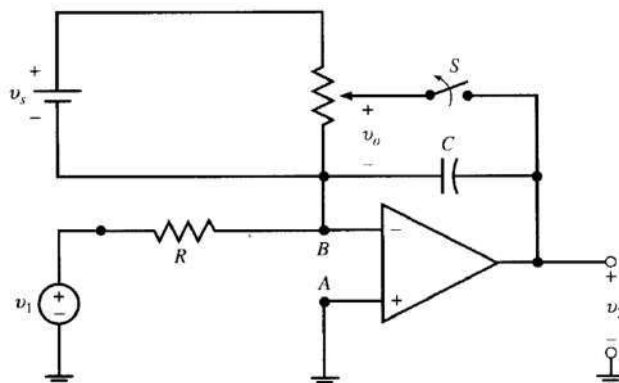
$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + C \frac{dv_o}{dt} = 0$$

$$v_o = - \int_{-\infty}^t \left(\frac{v_1}{R_1 C} + \frac{v_2}{R_2 C} + \frac{v_3}{R_3 C} \right) dt$$

$$\text{Hoặc: } v_o = - \frac{1}{R_1 C} \int_{-\infty}^t v_1 dt - \frac{1}{R_2 C} \int_{-\infty}^t v_2 dt - \frac{1}{R_3 C} \int_{-\infty}^t v_3 dt$$

Điều kiện đầu của tích phân (Initial Condition of Integration)

Điều kiện đầu mong muốn của v_o , trong mạch tích phân được thực hiện nhờ chuyển mạch như trong hình 1-51. Kết nối chuyển mạch trong giây lát rồi lập tức ngắt ở thời điểm $t = t_0$, điều kiện đầu của giá trị v_o được thiết lập thông qua tụ điện và xuất hiện trên điện áp v_2 .



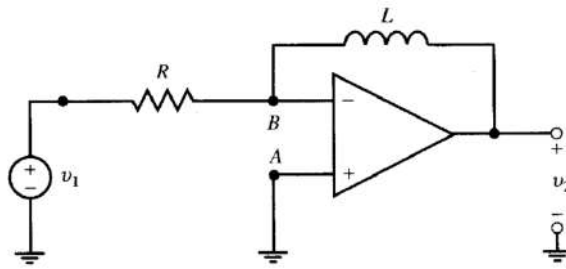
Hình 1-51

Với $t > t_0$, giá trị của điện áp ra thêm một lượng:

$$v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt + v_o$$

Mạch vi phân

Thay điện trở hồi tiếp bằng điện cảm của khuếch đại đảo ta có mạch vi phân, trong đó tín hiệu vào được biến đổi ở tín hiệu ra như trong hình 1-52. Để xác định quan hệ vào – ra, áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại nút cực đảo:



Hình 1-51

$$\frac{v_1}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_2 dt \rightarrow v_2 = -\frac{L}{R} \frac{dv_1}{dt}$$

3.4. Mạch ứng dụng khuếch đại thuật toán

3.4.1. Mạch tính tương tự

Các mạch khuếch đại đảo, cộng và tích phân được trình bày trong các phần trước được tích hợp thành khối ở dạng mạch tính tương tự để giải quyết các phương trình tuyến tính. Mạch vi phân không được dùng đến do có những yếu tố nhiều đáng kể.

Để thiết kế mạch tính tương tự, trước tiên phải biến đổi các phương trình vi phân bằng cách đưa đạo hàm bậc cao nhất hiện có của ẩn số mang muốn về một phía của phương trình. Bỏ xung các mạch tích phân theo cấu trúc nối tiếp hoặc mạch vòng được trình bày trong ví dụ dưới đây. Trong phần này ta sử dụng những lưu ý sau:

$$x' = dx/dt \text{ và } x'' = d^2x/dt^2$$

Ví dụ: thiết kế mạch với tín hiệu vào $x(t)$ cho tín hiệu ra $y(t)$, thỏa mãn phương trình sau:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

Giải:

Bước 1: chuyển lại phương trình

$$y'' = x - 2y' - 3y \quad ()$$

Bước 2: Sử dụng mạch tích phân tổng tín hiệu OA#1 để lấy tích phân hai về phương trình (). Sử dụng biểu thức quan hệ vào – ra của mạch để xác định các giá trị R_1 ; R_2 ; R_3 và C_1 , theo cách tín hiệu ra của OA#1 là $v_1 = y'$. Ta lấy $C_1 = 1\mu\text{F}$ để tìm các điện trở tương ứng:

$$R_1 C_1 = 1 \rightarrow R_1 = 1\text{M}\Omega$$

$$R_2 C_1 = 1/3 \rightarrow R_2 = 333\text{k}\Omega$$

$$R_3 C_1 = 1/2 \rightarrow R_3 = 500\text{k}\Omega$$

$$v_1 = -\int (x - 3y - 2y') dt = -\int y'' dt = -y'$$

Bước 3: Lấy tích phân $v_1 = -y'$ bằng mạch tích phân OA#2 để tìm giá trị y . Ta lấy giá trị $C_2 = 1\mu\text{F}$ và $R_4 = 1\text{M}\Omega$ để xác định được $v_2 = y$, tại đầu ra của OA#2.

$$v_2 = -\frac{1}{R_4 C_2} \int v_1 dt = \int y' dt = y$$

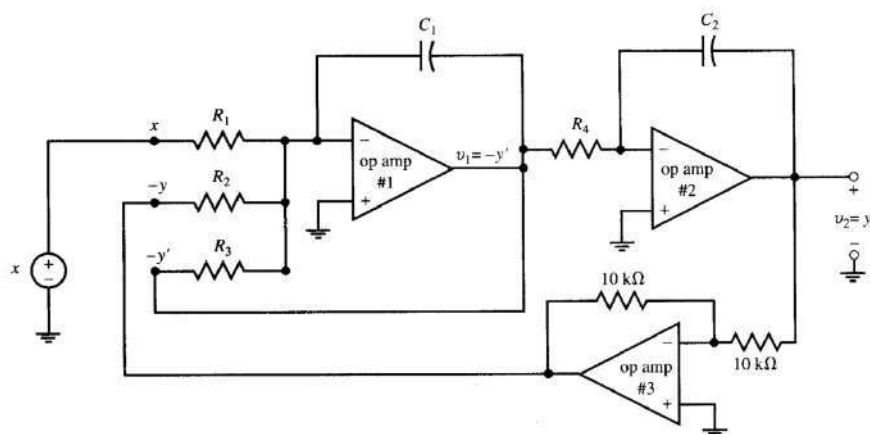
Bước 4: Thiết lập kết nối đầu vào cho OA#1 theo cách thức sau:

Hồi tiếp $v_1 = -y'$ trực tiếp tới cổng đảo của OA#1 thông qua điện trở R_3 .

Nối $v_2 = y$ qua bộ khuếch đại đảo bằng 1 (OA#3) để tạo ra tín hiệu $-y$, sau đó cấp vào cực đảo OA#1 thông qua R_2 .

Kết nối nguồn $x(t)$ vào cực đảo OA#1 thông qua điện trở R_1 .

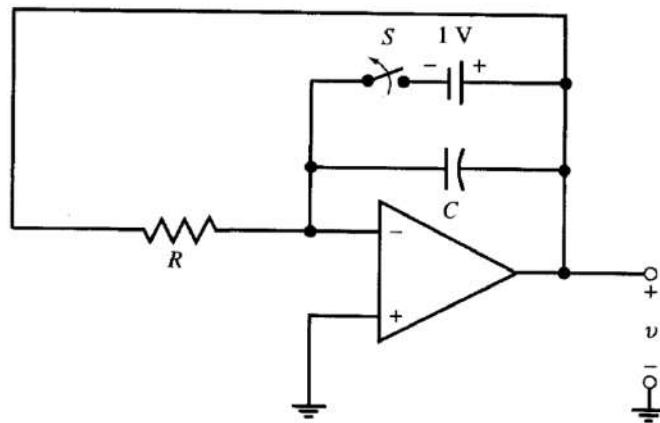
Sơ đồ hoàn chỉnh trên hình ().



Hình 1-52

Ví dụ: Thiết kế mạch OA như nguồn áp lý tưởng $v(t)$ thỏa mãn phương trình $v' + v = 0$. Với $v(0) = 1\text{V}$.

Các bước thực hiện như ở ví dụ trên, sơ đồ mạch như hình 1-53 với $RC = 1\text{s}$ được chọn. Điều kiện đầu khi chuyển mạch mở tại $t = 0$. Lời giải $v(t) = e^{-t}$ với $t > 0$ bằng tín hiệu ra:



Hình 1-53

3.4.2. Mạch lọc tần số thấp

Các giá trị tần số, mà với nó bộ khuếch đại sẽ có hệ số khuếch đại giảm từ giá trị nhất định xuống không. Tương đương với sóng sin có tần số trong khoảng từ không (một chiều) đến giá trị nhất định, bộ khuếch đại cũng có hệ số khuếch đại biến thiên tương tự, được gọi bộ lọc tần số thấp. Biến thiên của hệ số khuếch đại theo tần số được gọi là đáp ứng tần số.

Ví dụ 3-22 In Example 5.18 let $v_1 = \frac{1}{4} \sin \omega t$. Find $j v_2 / j$ for $\omega = 0; 10; 100; 103; 104; 105$ rad/s.

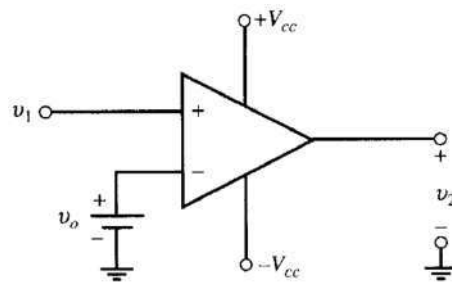
By repeating the procedure of Example 5.18, the frequency response is found and given in Table 5-1. The

response amplitude decreases with frequency. The circuit is a low-pass filter

3.4.3. Bộ so sánh

Sơ đồ mạch trên hình () so sánh điện thế v_1 và điện thế tham chiếu v_o . Với giá trị rất lớn của hệ số khuếch đại, OA cho tín hiệu ra v_2 ở các mức giá trị V_{cc} (nếu $v_1 > v_o$) hoặc $-V_{cc}$ (nếu $v_1 < v_o$). Có thể viết $v_2 = \text{sgn} [v_1 - v_o]$, trong đó sgn – dấu của biểu thức trong ngoặc. Nếu $v_o = 0$, thì ta có:

$$v_2 = \begin{cases} +V_{cc} & v_1 > 0 \\ -V_{cc} & v_1 < 0 \end{cases}$$



Hình 1-54

Chương 4: Dạng sóng và tín hiệu

Điện áp và dòng điện trong mạch có thể mô tả bằng ba loại hàm số sau: (i) hàm chu kỳ, (ii) hàm không chu kỳ và (iii) hàm ngẫu nhiên. Trong chương này các hàm được xét trong khoảng thời gian $-\infty < t < +\infty$, và các thuật ngữ hàm, dạng sóng và tín hiệu dùng thay thế lẫn cho nhau.

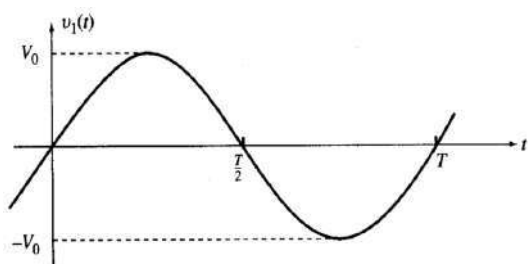
4.1. Hàm chu kỳ

4.1.1. Khái niệm hàm chu kỳ

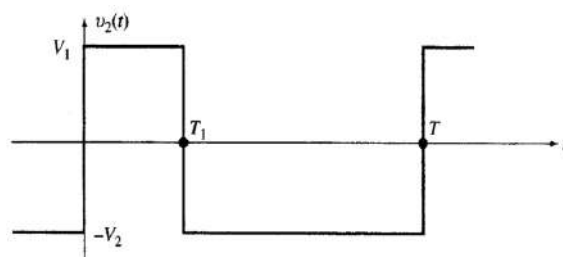
Một tín hiệu được gọi là chu kỳ nếu thỏa mãn $v(t) = v(t + T)$ với mọi giá trị t . Bốn dạng hàm chu kỳ, biểu diễn chu kỳ T được liệt kê dưới đây:

(a) Sóng sin: $v_1(t) = V_0 \sin(2\pi t / T)$ (hình 4-1a)

(b) Xung chu kỳ: $v_2(t) = \begin{cases} V_1 & 0 < t < T_1 \\ -V_2 & T_1 < t < T \end{cases}$ (hình 4-1b)



(a)



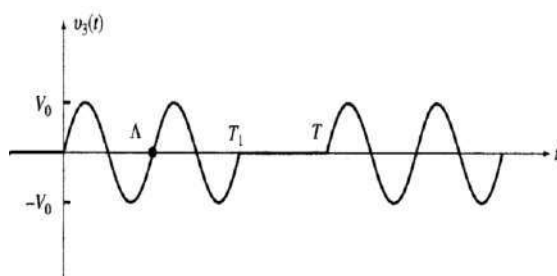
(b)

Hình 4-1

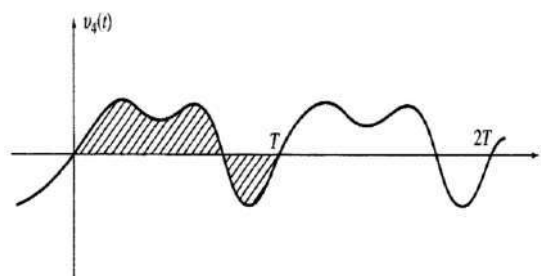
(c) Chu kỳ đột phát: $v_3(t) = \begin{cases} V_0 \sin 2\pi t / \Lambda & 0 < t < T_1 \\ 0 & T_1 < t < T \end{cases}$ (hình 4-1c)

Trong đó: $T = k\Lambda$, k – số nguyên

(d) Lặp lại dạng sóng theo chu kỳ T : $v_4(t)$ (hình 4-1d)



(c)



(d)

Hình 4-1

4.1.2. Hàm sin

Điện áp sin được biểu diễn bằng biểu thức $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$

Trong đó: V_0 – biên độ, ω – tốc độ góc (tần số góc), θ – góc pha.

Tốc độ góc ω có thể biểu diễn bằng thuật ngữ thời gian chu kỳ T hoặc tần số nhíp f , trong đó: $f = 1/T$. Tần số nhíp có đơn vị là Hetz (Hz) hoặc chu kỳ / giây.

Từ đặc điểm của hàm chu kỳ $\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi)$, như vậy ω và T có quan hệ sau: $\omega T = 2\pi$. Như vậy cần T (s) để hàm số $v(t)$ lặp lại giá trị cũ, cũng có nghĩa hàm số có $1/T$ chu kỳ trong 1 giây.

Tổng hợp, ta có một số quan hệ giữa tần số góc, tần số và thời gian chu kỳ dành cho hàm sin:

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot f$$

$$f = 1/T = \omega / 2\pi$$

$$T = 1/f = 2\omega / \pi$$

Ví dụ 4-1: Hãy xác định chu kỳ và tần số các hàm sau:

(a) $v_1(t) = \cos t$; (b) $v_2(t) = \sin t$; (c) $v_3(t) = 2 \cos 2\pi t$;

(d) $v_4(t) = 2 \cos (\pi t/4 - 45^\circ) = 2 \cos (\pi t/4 - \pi/4) = 2 \cos \pi(t - 1)/4$

(e) $v_5(t) = 5 \cos (10t + 60^\circ) = 5 \cos (10t + \pi/3) = 5 \cos 10(t + \pi/30)$

Giải:

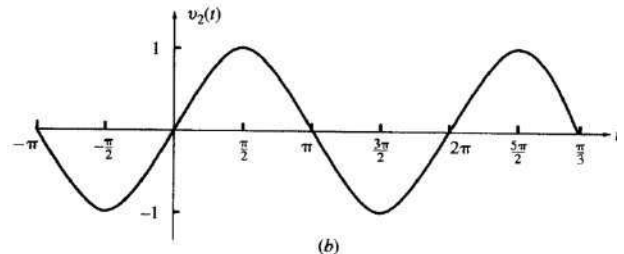
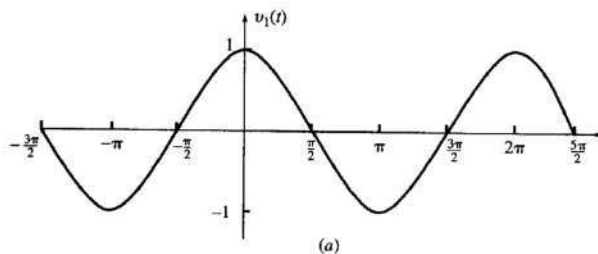
(a) Xem hình 4-2a: $T = 2\pi$ (s); $f = 1/T = 1/2\pi = 0,159$ (Hz)

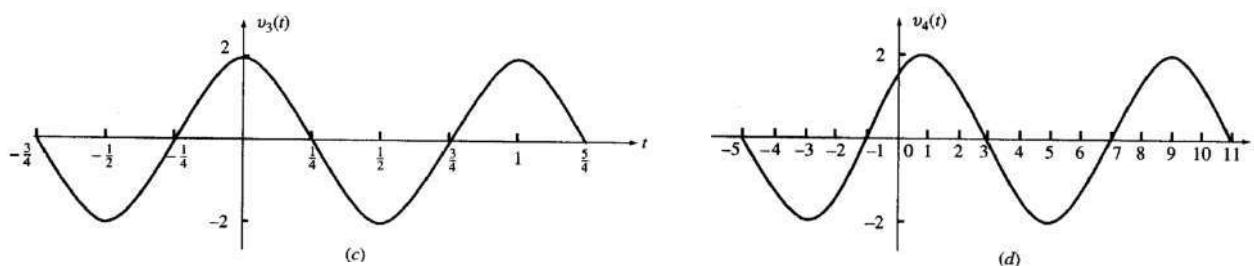
(b) Xem hình 4-2b: $T = 2\pi$ (s); $f = 1/T = 1/2\pi = 0,159$ (Hz)

(c) Xem hình 4-2c: $T = 2\pi / 2\pi = 1$ (s); $f = 1/T = 1$ (Hz)

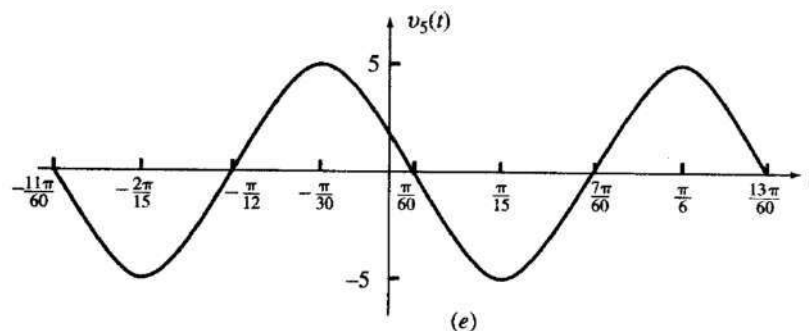
(d) Xem hình 4-2d: $T = 2\pi / \pi / 4 = 8$ (s); $f = 1/T = 0,125$ (Hz)

(e) Xem hình 4-2e: $T = 2\pi / 10 = 0,2\pi$ (s); $f = 1/T = 1,59$ (Hz)



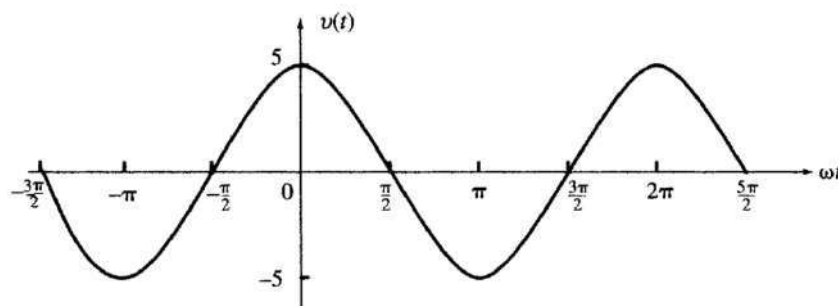


Hình 4-2



Hình 4-2

Ví dụ 4-2: Vẽ dạng sóng hàm $v(t) = 5\cos\omega t$ với đối số $\omega t \rightarrow$ hình 4-3



Hình 4-3

4.1.3. Dịch thời gian và dịch góc pha:

Nếu như hàm $v(t) = \cos \omega t$, bị chậm lại τ giây, ta có hàm:

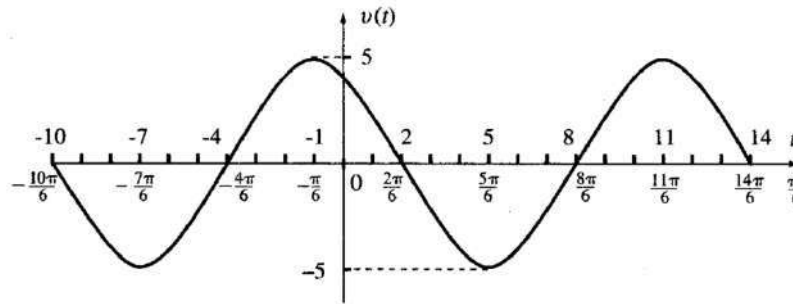
$$v(t - \tau) = \cos \omega (t - \tau) = \cos(\omega t - \theta)$$

Trong đó: $\theta = \omega \tau$

Khoảng chậm này dịch chuyển đồ thị hàm $v(t)$ sang phải theo trục hoành một khoảng thời gian τ , tương ứng dịch chậm pha một góc $\theta = \omega \tau = 2\pi f \tau$. Nếu như khoảng thời gian sớm τ , dịch chuyển đồ thị sang trái $v(t + \tau)$, kết quả góc pha tương ứng sớm θ , được gọi là sớm pha. Như vậy với một dịch chuyển góc pha nhất định, khi tần số cao thì thời gian dịch chuyển tương ứng sẽ nhỏ hơn.

Ví dụ 4-3: Vẽ dạng sóng tín hiệu $v(t) = 5\cos(5\pi/6 + \pi/6)$ theo t và $\pi/6$:

Giải: Đồ thị dạng sóng trên hình 4-4.



Hình 4-4

Ví dụ 4-4: Xét mạch tuyến tính có tín hiệu vào và ra đúng với mọi giá trị của A và ω : tín hiệu vào $v_i(t) = A \cos \omega t$; tín hiệu ra: $v_o(t) = A \cos(\omega t - \theta)$. Nếu biểu thức điện áp đầu vào $v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$. Hãy xác định biểu thức điện áp đầu ra $v_o(t)$ trong các trường hợp sau:

(a) $\theta = 10^{-6} \omega$ (góc lệch pha tỉ lệ với tần số)

(b) $\theta = 10^{-6}$ (góc lệch pha hằng số)

Giải:

(a) $\theta_1 = 10^{-6} \omega_1$; $\theta_2 = 10^{-6} \omega_2$. Tín hiệu đầu ra:

$$v_o(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

$$v_o(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6} \omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6} \omega_2)$$

$$v_o(t) = \cos \omega_1(t - 10^{-6}) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}) = v_i(t - 10^{-6}) = v_i(t - \tau)$$

Trong đó: $\tau = 10^{-6}$ (s) = 1 (μ s). Góc lệch pha tỉ lệ tần số góc ω (hình 4-5a) làm chậm tất cả các thành phần tần số của tín hiệu đầu vào một khoảng 1 (μ s). Tín hiệu đầu ra theo tín hiệu đầu vào không bị méo.

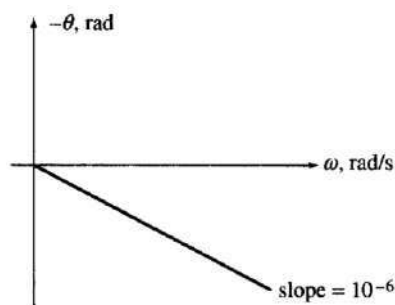
(b) $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$. Tín hiệu đầu ra:

$$v_o(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

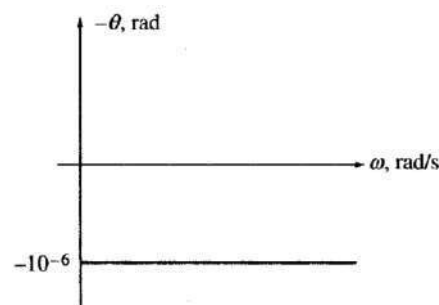
$$v_o(t) = \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6})$$

$$v_o(t) = \cos \omega_1(t - 10^{-6}/\omega_1) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}/\omega_2)$$

Góc lệch pha là hằng số (hình 4-5b) làm chậm các thành phần tần số của tín hiệu đầu vào với lượng khác nhau. Tín hiệu đầu ra bị méo so với tín hiệu đầu vào.



(a)



(b)

4.1.4. Hàm chu kỳ hỗn hợp

Tổng của hai hàm chu kỳ với chu kỳ tương ứng là T_1 và T_2 là hàm chu kỳ nếu chu kỳ chung T tính được theo biểu thức $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$, trong đó n_1 và n_2 là các số nguyên. Tức là tỉ số $T_1/T_2 = n_2/n_1$ có thể biểu diễn dưới dạng tỉ số giữa các số nguyên. Trường hợp ngược lại, hàm tổng sẽ không là hàm chu kỳ.

Ví dụ 4-5: Tìm chu kỳ của hàm sau $v(t) = \cos 5t + \sin(3t + 45^\circ)$

Chu kỳ của hàm $\cos 5t$ là $T_1 = 2\pi/5$; của hàm $\sin(3t + 45^\circ)$ là $T_2 = 2\pi/3$

Lấy giá trị $T = 2\pi = 5T_1 = 3T_2$, là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Ta thấy:

$$v(t + T) = \cos 5(t + 2\pi) + \sin(3(t + 2\pi) + 45^\circ) = \cos 5t + \sin(3t + 45^\circ)$$

$$v(t + T) = v(t)$$

Chu kỳ của hàm $v(t)$ là $T = 2\pi$.

Ví dụ 4-6: Kiểm tra tính tuần hoàn của hàm $v(t) = \cos t + \cos 2\pi t$

Chu kỳ của hàm $\cos t$ là $T_1 = 2\pi$; của hàm $\cos 2\pi t$ là $T_2 = 1$

Không tồn tại chu kỳ chung $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$, bởi vì tỉ số $T_1/T_2 = n_2/n_1 = 2\pi$ không là tỉ số giữa hai số nguyên, hàm $v(t)$ không chu kỳ.

Ví dụ 4-7: Cho $p = 3,14$ tìm chu kỳ của hàm $v(t) = \cos t + \cos 2pt$

Chu kỳ của hàm $\cos t$ là $T_1 = 2\pi$; của hàm $\cos 2pt$ là $T_2 = \pi/3,14$

Tỉ số $T_1/T_2 = 6,28$ có thể biểu diễn dạng tỉ số giữa 2 số nguyên $628/100$

Cặp số $n_1 = 25$ và $n_2 = 157$, thỏa mãn điều kiện $n_2/n_1 = T_1/T_2 = 628/100 = 157/25$

Hàm $v(t)$ có chu kỳ là: $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 50\pi$ (s).

Ví dụ 4-8: Biểu thức $v(t) = \cos 5t \sin(3t + 45^\circ)$ là tổng của hai hàm chu kỳ sin, tìm chu kỳ hàm tổng.

$$v(t) = \cos 5t \sin(3t + 45^\circ) = [\sin(8t + 45^\circ) - \sin(2t - 45^\circ)]/2$$

$$v(t) = [\cos(8t - 45^\circ) - \cos(2t + 45^\circ)]/2$$

Chu kỳ của hàm $v(t)$ là π

4.1.5. Giá trị trung bình và giá trị hiệu dụng

Hàm tuần hoàn $f(t)$ với chu kỳ T , có giá trị trung bình được tính bằng

$$F_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Giá trị hiệu dụng trong đúng chu kỳ đó được tính:

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}$$

Các giá trị trung bình và hiệu dụng thông thường được tính cho một chu kỳ của tín hiệu.

Ví dụ 4-9: Tìm giá trị trung bình và giá trị hiệu dụng của hàm sau $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$

$$V_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\sin(\omega t + \theta)]_0^T = 0$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] dt = \frac{V_m^2}{2}$$

$$V_{rms} = V_m / \sqrt{2} = 0,707V_m$$

Các biểu thức giá trị trung bình và hiệu dụng không phụ thuộc vào tần số. Nói cách khác giá trị trung bình và hiệu dụng của hàm sin luôn bằng tương ứng 0 và $0,707V_m$.

Ví dụ 4-10: Tìm giá trị trung bình và giá trị hiệu dụng của hàm sin nửa sóng

$$v(t) = \begin{cases} V_m & \sin \omega t > 0 \\ 0 & \sin \omega t < 0 \end{cases}$$

$$V_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin(\omega t) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\cos(\omega t)]_0^{T/2} = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} V_m^2 [1 - \cos 2(\omega t)] dt = \frac{V_m^2}{4}$$

$$V_{rms} = V_m / 2$$

Ví dụ 4-11: Tìm giá trị trung bình và giá trị hiệu dụng của hàm $v(t)$ trong khoảng thời gian chu kỳ T .

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & 0 < t < T_1 \\ -V_0 & T_1 < t < 3T_1 \end{cases}$$

$$\text{Chu kỳ } T = 3T_1$$

$$V_{avg} = \frac{V_0}{\omega T} [T_1 - 2T_1] = \frac{-V_0}{3}$$

$$V_{rms}^2 = \frac{V_0^2}{\omega T} [T_1 - 2T_1] = V_0^2$$

$$V_{rms} = V_0$$

Kết quả ví dụ trên có thể tổng kết như sau: Nếu $|v(t)| = V_0$ thì $V_{rms} = V_0$

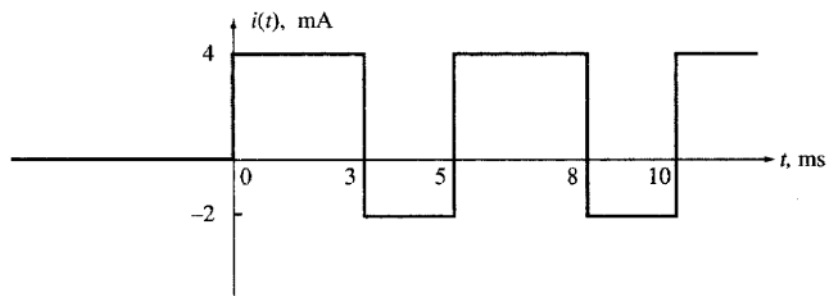
Ví dụ 4-12: Hãy tính giá trị trung bình công suất tiêu thụ trên điện trở có điện áp $v(t)$ trong khoảng thời gian từ 0 đến $T(s)$.

Thay $v(t)$ bằng điện áp dc không đổi V_{dc} . Tìm điện áp V_{dc} với điều kiện công suất trung bình trong một chu kỳ bằng không.

$$p = V.I = v^2 / R$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{RT} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{R} V_{eff}^2 = \frac{1}{R} V_{dc}^2$$

Ví dụ 4-15: Dòng điện $i(t)$, có dạng sóng như trong hình, đi qua tụ điện $1\mu F$. Hãy tìm (a) điện áp v_{ac} trên tụ các thời điểm $t = 5k \text{ ms}$ ($k = 0; 1; 2; 3; \dots$) và (b) giá trị dòng điện nguồn một chiều không đổi I_{dc} , có thể tạo ra điện áp đúng như vậy trên tụ điện tại thời điểm $t = 5k \text{ ms}$ khi $t > 0$. So sánh giá trị I_{dc} với $\langle i(t) \rangle$ trên hình 4-6 trong khoảng 5ms sau khi $t > 0$.



Hình 4-6

(a) Tại thời điểm $t = 5 \text{ ms}$

$$v_{ac} = \frac{1}{C} \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} i(t) dt = 10^6 \cdot 10^{-3} \left[\int_0^{3 \cdot 10^{-3}} 4 dt - \int_{3 \cdot 10^{-3}}^{5 \cdot 10^{-3}} 2 dt \right] = 12 - 4 = 8 \text{ V}$$

Đây là kết quả nạp điện áp lên tụ trong khoảng 5ms . Dòng điện $i(t)$ là tín hiệu chu kỳ 5ms , do đó mỗi khoảng 5ms , tụ lại được nạp thêm một lượng điện áp như trong 5ms đầu. Như vậy tại $t = 5k \text{ ms}$, tụ được nạp điện áp $v_{ac} = 8k \text{ V}$.

(b) Với dòng điện không đổi I_{dc} , điện áp trên tụ sau $5k \text{ ms}$ được nạp:

$$v_{dc} = \frac{1}{C} \int_0^{5k \cdot 10^{-3}} I_{dc} dt = 10^6 I_{dc} (5k \cdot 10^{-3}) = 10^3 \cdot 5k \cdot I_{dc} \text{ V}$$

Mà $v_{dc} = v_{ac}$ tại thời điểm $5k \text{ ms}$, ta có:

$$8k = 10^3 \cdot 5k \cdot I_{dc} \quad \rightarrow \quad I_{dc} = 8k / 5k \cdot 10^3 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

$$I_{dc} = 1,6 \text{ (mA)}$$

Dòng điện I_{dc} bằng giá trị trung bình của $i(t)$ trong mỗi chu kỳ 5 ms, từ thời điểm $t > 0$.

4.2. Hàm không chu kỳ

Hàm không chu kỳ là loại hàm tín hiệu mà không thể suy ra được giá trị trong toàn bộ thời gian chỉ nhờ biết được giá trị của nó trong một khoảng thời gian hữu hạn. Ví dụ về hàm không chu kỳ:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} & v_2(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \\ v_3(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases} & v_4(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t > 0 \end{cases} \\ v_5(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t/\tau} \cos \omega t & t > 0 \end{cases} & v_6(t) &= e^{-t/\tau} \\ v_7(t) &= e^{-a|t|} & v_8(t) &= e^{-a|t|} \cos \omega t \end{aligned}$$

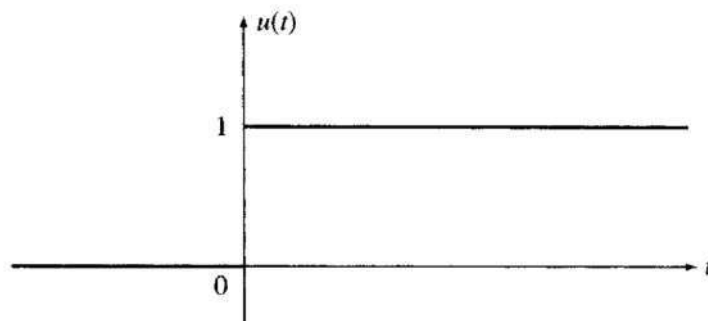
Một số hàm được dùng cho xây dựng mô hình toán học và sơ đồ khối của các tín hiệu thực trong phân tích và thiết kế mạch. Những ví dụ cụ thể sẽ được trình bày trong những phần sau.

4.2.1. Hàm bước đơn vị (hàm step)

Hàm nhảy bước đơn vị được định nghĩa:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm nhảy bước đơn vị trên hình 4-7, lưu ý, hàm không xác định tại điểm $t = 0$.

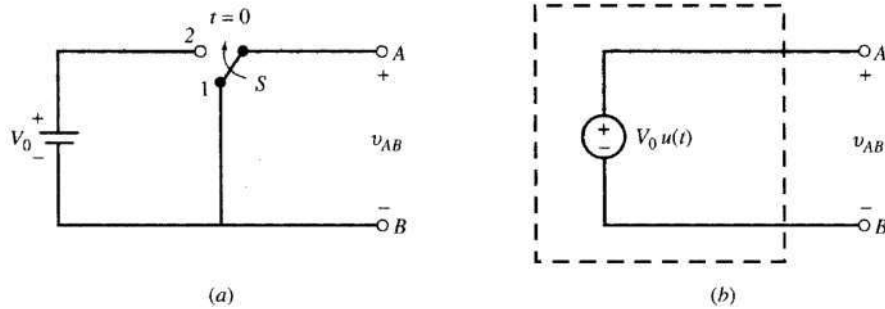


Hình 4-7

Để minh họa cách sử dụng hàm $u(t)$, giả thiết công tắc S , trong mạch điện trong hình 4–8a, có vị trí 1 khi $t < 0$ và chuyển sang vị trí 2 khi $t > 0$. Điện áp giữa A và B có thể được biểu diễn thông qua hàm $u(t)$ như sau:

$$v_{AB} = V_0 \cdot u(t)$$

Mạch điện tương đương của nguồn áp nhảy bước đơn vị trên hình 4–8b.



Hình 4–8

Ví dụ : Công tắc trong mạch hình 4–8a được bật sang vị trí 2 vào thời điểm $t = t_0$. Biểu diễn điện áp v_{AB} bằng hàm bước đơn vị.

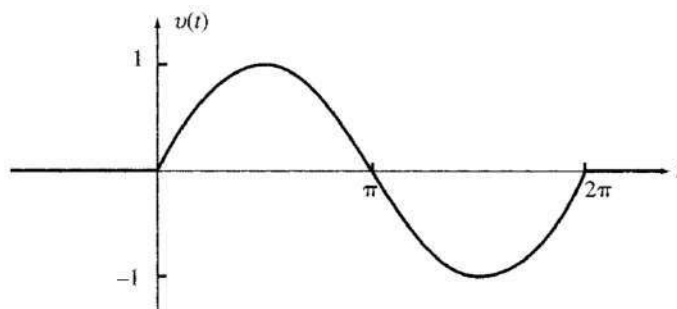
Điện áp V_0 xuất hiện giữa A và B bị chậm lại tới thời điểm $t = t_0$. Thay đổi số t trong hàm bước bằng đổi số $t - t_0$. Do đó ta có :

$$v_{AB} = V_0 u(t - t_0)$$

Ví dụ: Nếu công tắc trong mạch 4–8a bật sang vị trí 2 khi $t = 0$ và quay trở về vị trí 1 khi $t = 5$ s. Hãy biểu diễn v_{AB} bằng hàm bước đơn vị:

$$v_{AB} = V_0 [u(t) - u(t - 5)]$$

Ví dụ: Hãy biểu diễn hàm tín hiệu trên đồ thị hình 4–9, sử dụng hàm bước đơn vị:



Hình 4–9

$$v(t) = 0 \quad \text{khi } t < 0 \text{ và } t > 2\pi$$

$$v(t) = \sin t \quad \text{khi } 0 < t < 2\pi$$

$$v(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \sin t$$

4.2.2. Hàm xung đơn vị (hàm dirac)

Xem xét chức năng của hàm $s_T(t)$ trong hình 4–10a, khi $t < 0$ hàm có giá trị bằng không và tăng tuyến tính từ 0 lên 1 khi thời gian đến T (s). Đạo hàm của nó là xung có độ rộng T và độ cao $1/T$, như trên hình 4–10b.

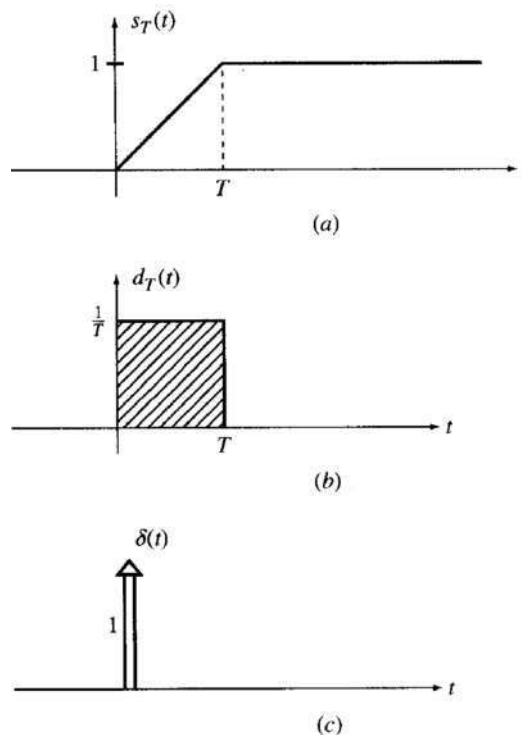
$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Nếu thời gian đạo hàm T nhỏ lại, xung trên hình 4–10b trở nên hẹp hơn và cao hơn, nhưng phần diện tích dưới xung vẫn là 1. Nếu ta cho thời gian T tiến đến 0, hàm $s_T(t)$ tiến tới hàm bước đơn vị và đạo hàm của nó tiến đến xung đơn vị $\delta(t)$ có độ rộng bằng không và độ cao không xác định. Xung đơn vị $\delta(t)$ trình bày trong hình 4–10c.

Xung đơn vị (hoặc hàm dirac) được định nghĩa:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{với } t \neq 0 \quad \text{và}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



Hình 4–10

Một xung có giới hạn độ rộng và diện tích A được biểu diễn bằng hàm dirac: $A\delta(t)$. Giá trị của A đôi khi được gọi là độ mạnh của xung. Hàm xung đơn vị tại thời điểm $t = t_0$ được biểu diễn $\delta(t - t_0)$.

Ví dụ 4–17: Điện áp trên hai cực của tụ điện 100-nF tăng tuyến tính từ 0V đến 10V, như dạng sóng hình 4–10a. Hãy tìm (a) điện tích trên tụ khi $t = T$ và (b) dòng điện $i_C(t)$ trên tụ trong cho các chu kỳ $T = 1\text{s}$; $T = 1\text{ms}$ và $T = 1\mu\text{s}$.

(a) Tại thời điểm $t = T$, $v_C = 10\text{V}$.

Điện tích trên tụ: $Q = C.v_C = 10^{-7}10 = 10^{-6}\text{C}$

(b) Dòng điện trên tụ: $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

Theo hình 4–10,

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 = 10^{-6}/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Với $T = 1\text{s} \rightarrow I_0 = 10^{-6}\text{A}$;

$T = 1\text{ms} \rightarrow I_0 = 10^{-3}\text{A}$;

$T = 1\mu \rightarrow I_0 = 1\text{A}$.

Trong tất cả các trường hợp, điện tích trên tụ khi kết thúc quá trình nạp được xác định theo biểu thức:

$$Q = \int_0^T i_C(t)dt = I_0.T = 10^{-6}\text{C}$$

Lượng điện tích trên tụ vào thời điểm $t = T$ không phụ thuộc vào T . Nó tạo ra điện áp $v_C = 10\text{V}$ trên tụ.

Ví dụ 4–18: Cho hàm $d_T(t - t_0)$ phát một xung hẹp có độ rộng T và độ cao $1/T$, vào thời điểm $t = t_0$. Xét hàm $f(t)$, liên tục trong khoảng t_0 đến $t_0 + T$ như trên hình 4–11a. Hãy tìm giới hạn của tích phân I khi $T \rightarrow 0$.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d_T(t) f(t)dt.$$

$$d_T(t - t_0) = \begin{cases} 1/T & t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \forall t \text{ khác} \end{cases}$$

Thay $d_T(t - t_0)$ vào biểu thức tích phân I :

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{S}{T}$$

Trong đó: S – diện tích phần dưới $f(t)$ trong khoảng t_0 đến $t_0 + T$ trong hình 4–11b. Giả thiết T đủ nhỏ, hàm $f(t)$ có thể xác định tương đối dựa vào đường nối A và B, S là diện tích hình thang.

$$S = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] T$$

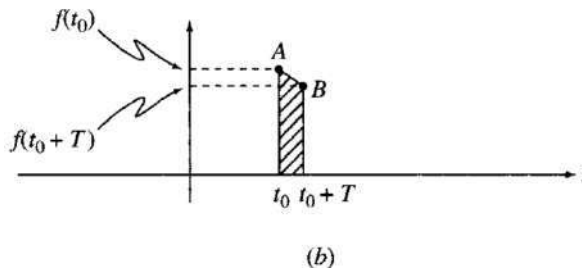
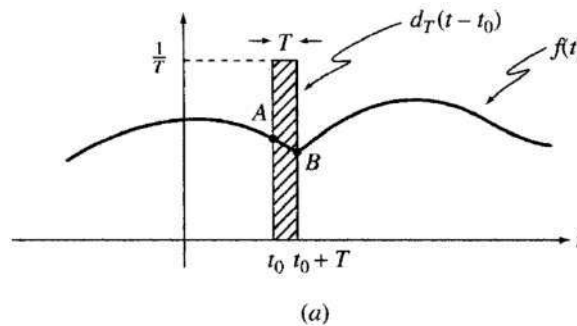
$$I = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)]$$

Như vậy $T \rightarrow 0$, $d_T(t - t_0) \rightarrow \delta(t - t_0)$ và $f(t_0 + T) \rightarrow f(t_0)$ từ biểu thức tích phân I ta có:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)]$$

Như đã giả thiết, $f(t)$ liên tục trong khoảng t_0 đến $t_0 + T$

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = f(t_0)$$



Hình 4-11

$$\text{Mặt khác: } \lim_{T \rightarrow 0} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt$$

$$\text{Nên: } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Đây là tính chất chọn lọc của hàm dirac, có thể dùng làm định nghĩa khác cho hàm này.

4.2.3. Hàm mũ

Hàm số $f(t) = e^{st}$ với s là hằng số phức được gọi là hàm mũ. Có giá trị giảm khi phần thực của s âm, và tăng khi phần thực của s dương. Chúng ta sẽ xét hàm mũ e^{at} khi a là hằng số thực.

Đại lượng nghịch đảo của a có đơn vị thời gian và được gọi là hằng số thời gian $\tau = 1/a$. Hàm suy giảm $e^{-t/\tau}$ theo đối số t có đồ thị được vẽ trên hình 4-12. Hàm mũ suy giảm giá trị bằng một, tại thời điểm $t = 0$, đến giá trị không, tại thời điểm $t = \infty$. Sau một khoảng thời gian τ (giây) hàm mũ suy giảm một lượng $e^{-1} = 0,368$. Với $\tau = 1$, hàm mũ e^{-t} được gọi là hàm mũ bình thường hóa, là hàm của đối số t/τ .

Ví dụ 4-19: Trong hình 4-12, biểu diễn tiếp tuyến của đồ thị hàm mũ $f(t) = e^{-t/\tau}$ tại $t = 0$ cắt trục hoành tại $t = \tau$.

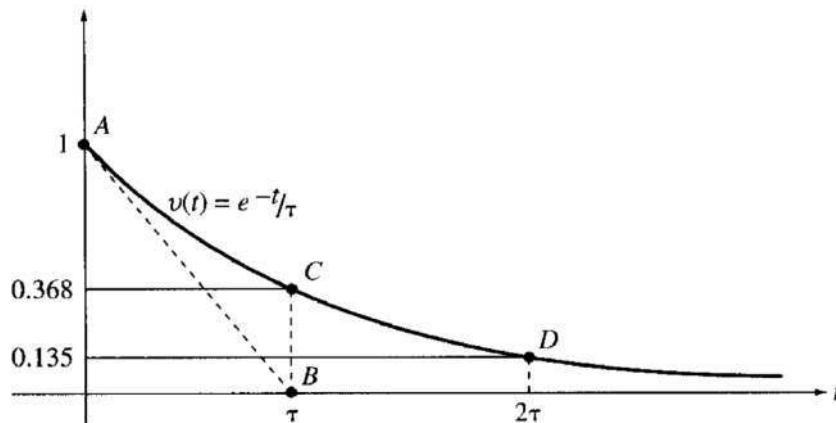
Tiếp tuyến bắt đầu tại điểm A ($v = 1, t = 0$) với độ dốc $de^{-t/\tau}/dt|_{t=0} = -1/\tau$. Phương trình đường thẳng $v_{\text{tan}}(t) = -t/\tau + 1$. Đường thẳng cắt trục hoành tại điểm B khi $t = \tau$. Như vậy ta có thể biết được cách vẽ các hàm mũ dựa vào điểm bắt đầu và tiếp tuyến với đồ thị hàm mũ tại điểm đó.

Ví dụ 4-20: Hãy vẽ gần đúng đồ thị của hàm mũ $v(t) = e^{-t/\tau}$ với $t > 0$.

Xác định điểm bắt đầu A ($t = 0; v = 1$) của đường cong và điểm giao cắt B của tiếp tuyến với trục hoành tại $t = \tau$. Vẽ đoạn thẳng AB.

Hai điểm tiếp theo C và D trên đồ thị tại các vị trí $t = \tau$ và $t = 2\tau$, với độ cao tương ứng $0,368$ và $0,368^2 = 0,135$.

Sử dụng thước cong ta có thể vẽ được đồ thị hàm mũ một cách tương đối chính xác như trên hình 4-12



Hình 4-12

Ví dụ 4-21: (a) Chứng minh tốc độ biến thiên theo thời gian của hàm mũ có biểu thức $v = A.e^{st}$ tại thời điểm bất kỳ tỉ lệ thuận với giá trị của chính hàm mũ tại thời điểm đó. (b) Chứng minh rằng, bất cứ tổ hợp tuyến tính nào của hàm mũ và đạo hàm bậc n của nó cũng tỉ lệ thuận với nhau. Tìm hệ số tỉ lệ này.

(a) Tốc độ biến thiên của hàm chính là đạo hàm của hàm số đó, với hàm mũ, ta có:

$$\frac{dv}{dt} = s.Ae^{st} = s.v$$

(b) Dùng kết quả chứng minh ở phần (a)

$$\frac{d^n v}{dt^n} = s^n . Ae^{st} = s^n . v$$

$$a_0 v + a_1 \frac{dv}{dt} + a_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) v = H.v$$

Trong đó: $H = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$

Xác định và vẽ đồ thị $f(t) = Ae^{-at} + B$

Ta thường gặp hàm mũ có dạng $f(t) = Ae^{-at} + B$

Hàm mũ này được xác định thông qua 3 số: A, B và a, trong đó: A – hiệu số giá trị đầu trừ giá trị cuối, B – giá trị cuối và a – nghịch đảo của hằng số thời gian. Hoặc một cách định nghĩa khác:

Giá trị đầu: $f(0) = A + B$;

Giá trị cuối: $f(\infty) = B$;

Hằng số thời gian: $1/a$

Ví dụ 4–22: Tìm hàm điện áp $v(t)$, có độ suy giảm theo cấp số nhân từ 5V tại $t = 0$, xuống 1V tại $t = \infty$, với hằng số thời gian 3s. Vẽ đồ thị hàm mũ bằng các kỹ thuật trong ví dụ 4–20.

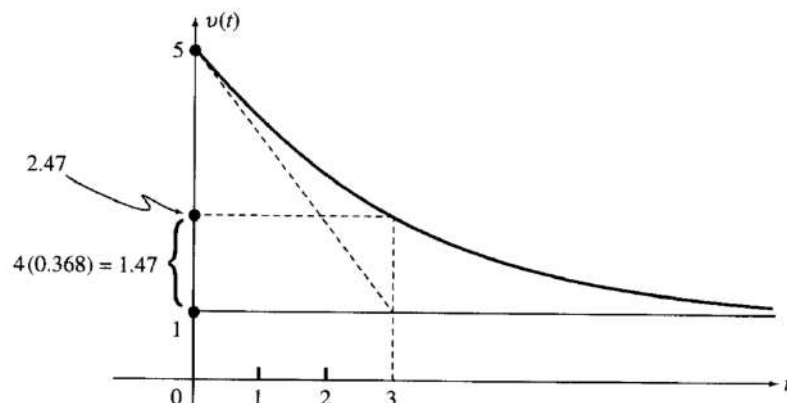
Hàm mũ có dạng $v(t) = Ae^{-at} + B$

Các giá trị đầu, cuối: $v(0) = A + B = 5$; $v(\infty) = B = 1 \rightarrow A = 4$.

Hằng số thời gian là 3s $\rightarrow a = 1/3$

Hàm cần tìm: $v(t) = 4e^{-t/3} + 1$

Đồ thị hàm $v(t) = 4e^{-t/3} + 1$ trên hình 4–13



Hình 4–13

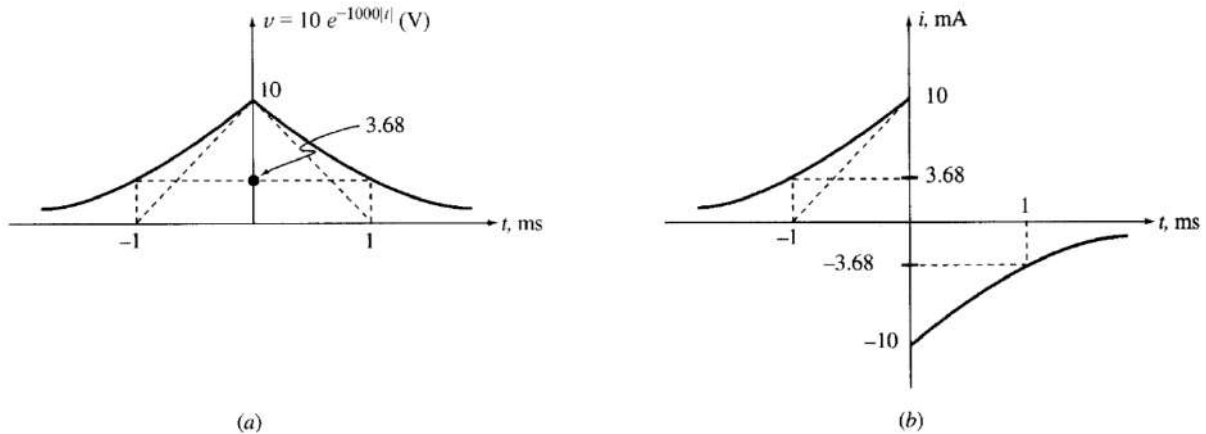
Ví dụ 4-23: Một điện áp $v = V_0 e^{-|t|/\tau}$, $\tau > 0$ được cấp cho tụ điện. Hãy tìm dòng điện i trên tụ, vẽ dạng tín hiệu v và i với $V_0 = 10\text{V}$; $C = 1\mu\text{F}$ và $\tau = 1\text{ms}$. Sử dụng kết quả $i = C \cdot dv/dt$.

$$\text{Với } t < 0 \quad v = V_0 e^{t/\tau} \quad \text{và} \quad i = I_0 e^{t/\tau}$$

$$\text{Với } t > 0 \quad v = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{và} \quad i = -I_0 e^{-t/\tau}$$

$$\text{Trong đó: } I_0 = C \cdot V_0 / \tau$$

Khi $V_0 = 10\text{V}$; $C = 1\mu\text{F}$ và $\tau = 10^{-3}\text{s}$, ta có: $I_0 = 10\text{mA}$. Đồ thị v và i trên hình 4-14 tương ứng a và b.



Hình 4-14

4.2.4. Hàm sin tắt dần

Hàm sin tắt dần có biên độ suy giảm theo cấp hàm mũ có dạng:

$$f(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

Hàm sin tắt dần được trình bày kỹ tại phần mạch điện bậc cao.

Ví dụ 4-24: Dòng điện $i = I_0 e^{-at} \cos \omega t$ đi qua nhánh RL nối tiếp. (a) Hãy tìm biểu thức điện áp trên nhánh v_{RL} . (b) Tính v_{RL} với $I_0 = 3\text{A}$, $a = 2$, $\omega = 40\text{ rad/s}$, $R = 5\Omega$, $L = 0,1\text{H}$. Vẽ dạng tín hiệu i là hàm theo thời gian.

(a) Ta có:

$$v_R = R \cdot i = R I_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -L I_0 e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at} [R \cos \omega t - L(a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)]$$

$$v_{RL} = I_0 e^{-at} [(R - La) \cos \omega t - \omega L \sin \omega t] = V_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

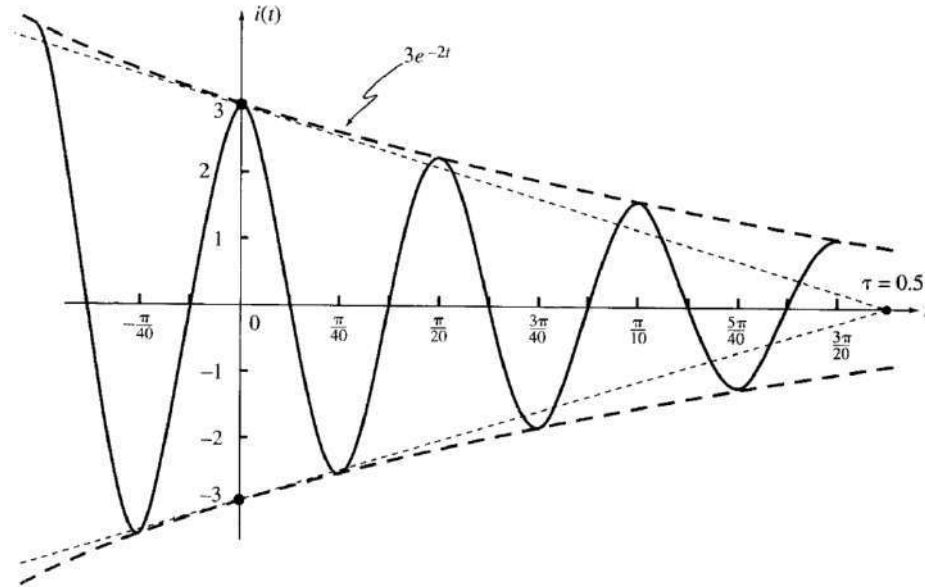
$$\text{Trong đó: } V_0 = I_0 \sqrt{(R - La)^2 + \omega^2 L^2}; \quad \theta = \tan^{-1}[\omega L / (R - La)]$$

(b) Thay các giá trị vào ta tính được $V_0 = 18,75V$ và $\theta = 39,8^\circ$. Dòng điện i và điện áp v_{RL} được biểu diễn bằng các hàm:

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t$$

$$v_{RL} = 18,75e^{-2t} \cos(40t + 39,8^\circ)$$

Đồ thị dòng và áp trên hình 4–15.



Hình 4–15

4.2.5. Tín hiệu ngẫu nhiên

Cho đến giờ, ta đang khảo sát các hàm tín hiệu xác định hoàn toàn, ví dụ, tín hiệu sóng sin của điện áp, ta có thể xác định được trong tất cả thời gian nếu biết được biên độ, tần số và góc pha. Những hàm tín hiệu như vậy được gọi là hàm xác định.

Bên cạnh đó, còn có một loại tín hiệu mà chỉ có thể xác định một phần thông qua khoảng thời gian trung bình nào đó của chúng, như trị hiệu dụng, phạm vi tần số. Những tín hiệu loại này được gọi là tín hiệu ngẫu nhiên. Tín hiệu ngẫu nhiên có thể chứa đựng các thông tin, nhưng thường bị mất do tác động của nhiễu làm gián đoạn các thông tin đi theo tín hiệu.

Tín hiệu điện áp ghi được trên các cực của micro trong lúc có lời nói và tín hiệu được thu từ anten của các trạm phát Radio hoặc TV là các ví dụ đặc trưng về tín hiệu ngẫu nhiên. Xu hướng và giá trị tương lai của các tín hiệu ngẫu nhiên chỉ có thể phỏng đoán ở mức độ trung bình và không chính xác. Một ví dụ khác về tín hiệu ngẫu nhiên là dạng sóng tín hiệu nhị phân trong máy tính phản ánh cường độ ánh sáng của một bức ảnh số khi đi từ phần này sang phần

khác của bức ảnh đó và dạng sóng mang cho các tín hiệu âm thanh trong hệ thống phát thanh AM.

Có thể không có lợi ích khi phân tích những tín hiệu khi giá trị của nó chỉ có thể biểu diễn ở dạng giá trị trung bình. Tuy nhiên đối với phân tích sóng hài ta có thể biết được nhiều ảnh hưởng của nó trong mạch điện thông qua các giá trị trung bình.

Ví dụ 4-25: Mẫu của tín hiệu ngẫu nhiên $x(t)$ được ghi lại sau mỗi giây và được gán cho biểu thức $x(n)$. Giá trị trung bình hiệu dụng được ghi trong bảng 4-1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x(n)$	2	4	11	5	7	6	9	10	3	6	8	4	1	3	5	12

Trung bình thời gian của $x(t)$ và $x^2(t)$ có thể được ước tính từ $x(n)$

$$X_{\text{avg}} = (2+4+11+5+7+6+9+10+3+6+8+4+1+3+5+12)/16 = 6$$

$$X_{\text{eff}}^2 = (2^2+4^2+11^2+5^2+7^2+6^2+9^2+10^2+3^2+6^2+8^2+4^2+1^2+3^2+5^2+12^2)/16 = 46$$

$$X_{\text{eff}} = 6,78$$

Ví dụ 4-26: Một tín hiệu nhị phân $v(t)$ có giá trị 0,5V hoặc -0,5V, có thể thay đổi dấu trong khoảng thời gian 1ms. Tín hiệu thay đổi theo qui luật không được biết, nhưng có xác suất tín hiệu âm và dương bằng nhau. Hãy xác định giá trị hiệu dụng trong 10s.

Trong thời gian 10s có 10000 khoảng thời gian với thời gian một khoảng 1ms, trong đó trung bình có một nửa tín hiệu 0,5V và một nửa -0,5V. Giá trị trung bình tín hiệu:

$$v_{\text{avg}} = (0,5 \cdot 5000 - 0,5 \cdot 5000) / 10000 = 0$$

$$v_{\text{eff}}^2 = [(0,5)^2 \cdot 5000 + (-0,5)^2 \cdot 5000] / 10000 = (0,5)^2$$

$$v_{\text{eff}} = 0,5$$

Giá trị v_{eff} chính xác và không phụ thuộc vào số lượng khoảng thời gian.

Chương 5: Quá độ trong mạch điện

Khi mạch điện chuyển từ trạng thái này sang trạng thái bằng cách thay đổi nguồn hoặc thay đổi các phần tử, lúc đó xảy ra quá trình chuyển tiếp với dòng điện nhánh và điện áp rơi trên các phần tử chuyển từ giá trị cũ sang giá trị mới. Quá trình chuyển tiếp được gọi là quá trình quá độ. Sau khi quá độ đã qua, mạch điện được gọi ở trạng thái xác lập (ổn định). Các phương trình vi phân tuyến tính mô tả mạch điện sẽ có hai phần để giải là các hàm bổ xung (giải pháp đồng nhất) và giải thuật cụ thể. Các hàm bổ xung tương ứng với quá trình quá độ và các thuật giải cụ thể cho chế độ xác lập.

5.1. Quá độ trong mạch điện cấp một

5.1.1. Quá độ trong mạch RC

Mạch RC không nguồn

Giả thiết tụ điện có điện áp V_0 giữa hai bản cực, khi đường kết nối với điện trở được tạo ra, điện tích trên các bản cực sẽ di chuyển từ bản cực này sang bản cực kia tạo nên dòng điện i . Điện áp tụ dần giảm xuống bằng không, cùng lúc dòng điện i có giá trị bằng không. Trong mạch RC như trên hình 5–1a, $Ri = v$ và $i = C.dv/dt$. Loại bỏ i trong hai phương trình trên ta có:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0 \quad (5-1)$$

Chỉ có một loại hàm có thể kết hợp tuyến tính với đạo hàm của nó cho kết quả bằng không là hàm mũ ở dạng Ae^{st} . Thay v bằng hàm Ae^{st} và dv/dt bằng sAe^{st} vào phương trình (5–1), ta có:

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC}Ae^{st} = A(s + \frac{1}{RC})e^{st} = 0$$

$$\text{Từ đó: } s + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{RC} \quad (5-2)$$

Nếu lấy $v(0) = A = V_0$, $v(t)$ và $i(t)$ có thể xác định theo:

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}, t > 0 \quad (5-3)$$

$$i(t) = -C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, t > 0 \quad (5-4)$$

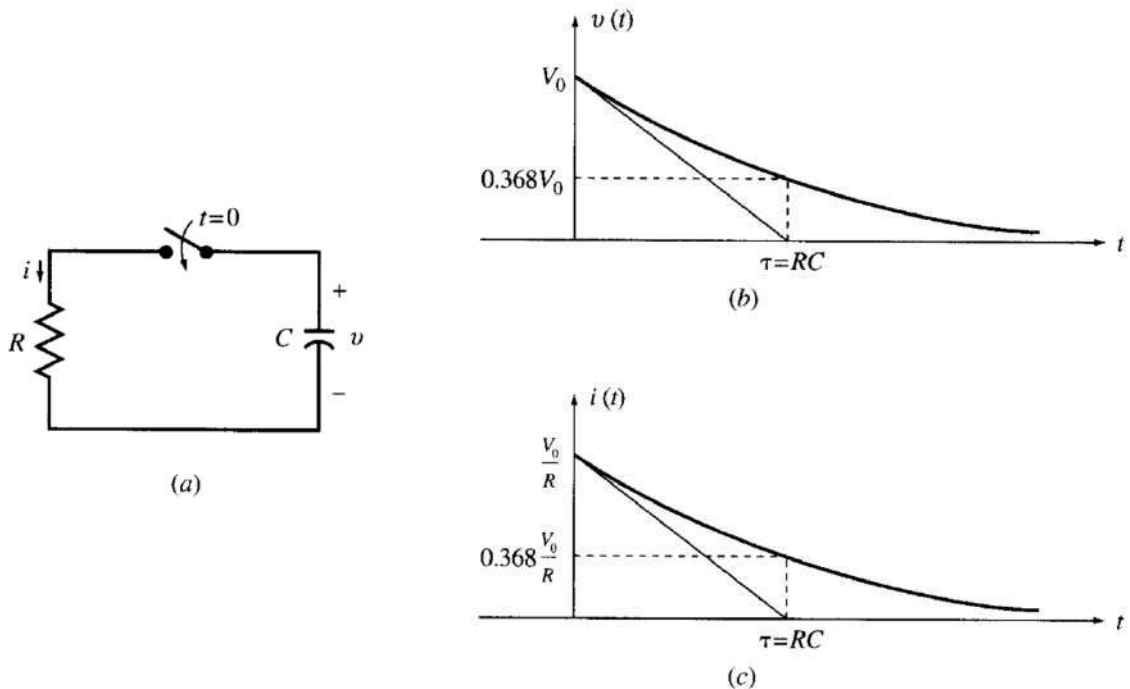
Điện áp và dòng điện trên tụ là các hàm mũ với giá trị đầu tương ứng là V_0 và V_0/R . Khi thời gian tăng, dòng và áp đều giảm về không với hằng số thời gian $\tau = RC$. Xem hình 5–1b và c.

Ví dụ 5-1: Điện áp trên tụ $1\mu\text{F}$ là 10V , khi $t < 0$, một điện trở $1\text{M}\Omega$ được nối vào hai cực của tụ. Hãy tìm hằng số thời gian τ , điện áp $v(t)$ và giá trị của điện áp tại $t = 5\text{s}$.

$$\tau = RC = 10^6 10^{-6} = 1$$

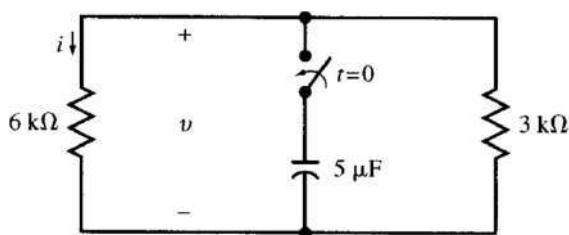
$$v(t) = 10e^{-t}, t > 0$$

$$v(5) = 10e^{-5} = 0,067\text{V}$$



Hình 5-1

Ví dụ 5-2: Một tụ $5\mu\text{F}$ với điện áp ban đầu là 4V được nối song song với điện trở $3\text{k}\Omega$ và $6\text{k}\Omega$ (hình 5-2). Hãy tìm dòng điện i trên điện trở $6\text{k}\Omega$.



Hình 5-2

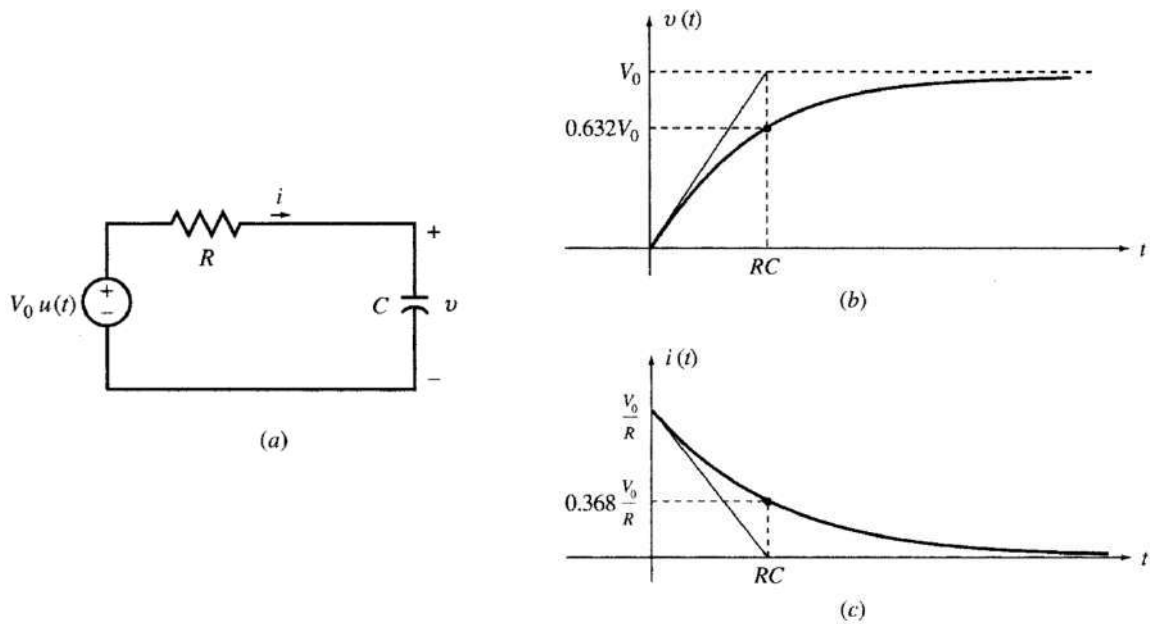
Điện trở tương đương của các điện trở song song là $2\text{k}\Omega$, hằng số thời gian của mạch $\tau = RC = 2 \cdot 10^3 5 \cdot 10^{-6} = 10^{-2}$. Điện áp và dòng điện i trên điện trở $6\text{k}\Omega$:

$$v = 4e^{-100t} \text{ V}$$

$$i = v/6000 = 0,67e^{-100t} \text{ mA}$$

Mạch RC có nguồn

Kết nối tụ, có điện tích ban đầu bằng không, với nguồn dc, có điện áp V_0 , thông qua điện trở vào thời điểm $t = 0$. Mạch điện như hình 5–3a.



Hình 5–3

Với $t > 0$, áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho vòng kín $Ri + v = V_0$, sau khi thay $i = Cdv/dt$ vào ta có:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC}V_0 \quad (5-5a)$$

$$\text{Điều kiện đầu: } v(0^+) = v(0^-) = 0 \quad (5-5b)$$

Lời giải cần phải thỏa mãn cả hai phương trình (5–5a) và (5–5b). Lời giải cụ thể (hoặc đáp ứng bắt buộc) $v_p(t) = V_0$ thỏa mãn (5–5a) nhưng không thỏa mãn (5–5b). Lời giải đồng nhất (hoặc đáp ứng tự nhiên) $v_h(t) = Ae^{-t/RC}$ cần được bổ xung và độ lớn của nó có thể điều chỉnh để lời giải tổng thể (5–6a) thỏa mãn cả (5–5a) và (5–5b).

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_0 + Ae^{-t/RC} \quad (5-6a)$$

Từ điều kiện đầu: $v(0^+) = V_0 + A = 0 \rightarrow A = -V_0$ lời giải tổng hợp:

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \quad (5-6b)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t) \quad (5-6c)$$

Ví dụ 5–3: Một tụ $4 \mu\text{F}$ với điện áp ban đầu $v(0^-) = 2 \text{ V}$, được kết nối với nguồn 12 V thông qua điện trở $5 \text{ k}\Omega$ tại thời điểm $t = 0$. Hãy tìm điện áp trên tụ và dòng điện qua tụ khi $t > 0$.

Hằng số thời gian của mạch là $\tau = RC = 0,02$ s. Theo phân tích trên ví dụ 5-2, ta có:

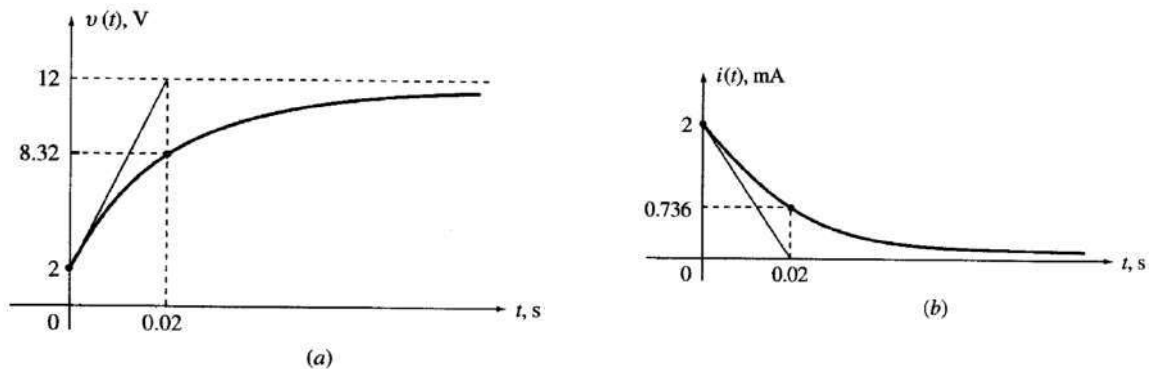
$$v(t) = 12 + Ae^{-50t} \text{ V}$$

Từ điều kiện đầu: $v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2 \rightarrow A = -10$, với $t > 0$

$$v(t) = 12 - 10e^{-50t} \text{ V}$$

$$i(t) = (12 - v)/5000 = 2 \cdot 10^{-3} e^{-50t} = 2e^{-50t} \text{ mA}$$

Dòng điện cũng có thể được tính từ $i = C(dv/dt)$. Điện áp tăng theo hàm mũ từ giá trị ban đầu 2V đến giá trị kết thúc 12V, với hằng số thời gian 20ms, như trong hình 5-4a, trong khi dòng điện giảm từ 2mA xuống không như trong hình 5-4b.



Hình 5-4

5.1.2. Quá độ trong mạch RL

Mạch RL không nguồn

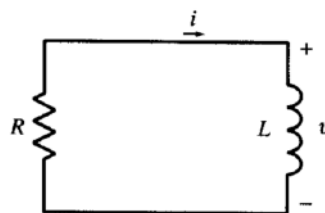
Trong mạch RL (hình 5-5), giả thiết tại thời điểm $t = 0$, dòng điện trong mạch là I_0 . Với $t > 0$, i phải thỏa mãn $Ri + L(di/dt) = 0$, lời giải của phương trình là $i(t) = Ae^{st}$. Thay lời giải và phương trình tìm được A và s :

$$A(R + Ls)Ae^{st} = 0 \rightarrow R + Ls = 0 \rightarrow s = -R/L$$

Điều kiện đầu: $i(0) = I_0 = A$. khi đó:

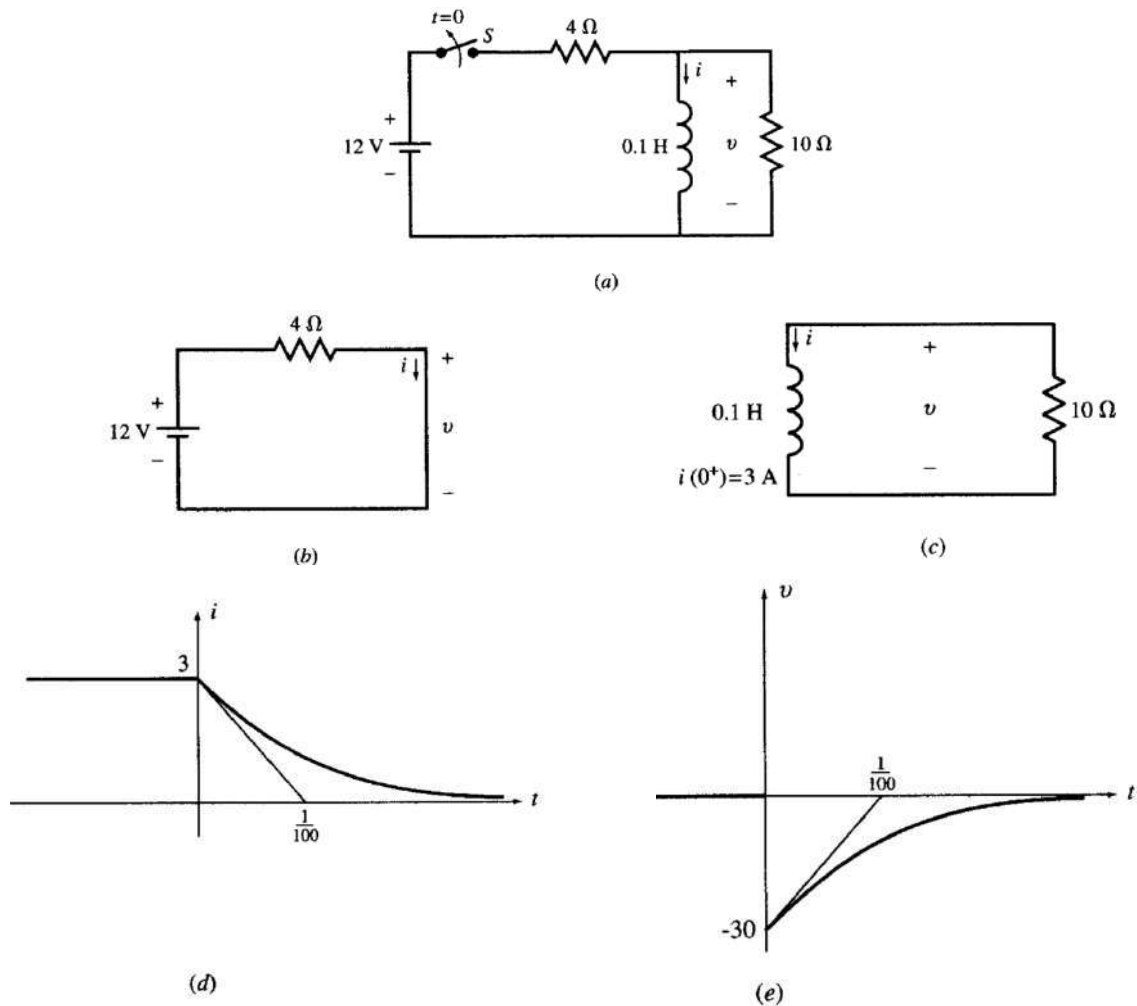
$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}, \text{ với } t > 0$$

Hằng số thời gian của mạch điện là $\tau = L/R$



Hình 5-5

Ví dụ 5.4: Nguồn dc 12V, trong hình 7–6a được ngắt tại thời điểm $t = 0$.
 Tìm dòng điện cảm và điện áp.



Hình 5–6

Giả thiết công tắc S được đóng trong thời gian đủ lớn, dòng điện trên điện cảm không đổi và điện áp trên nó bằng không. Dòng điện tại $t = 0^-$ được vẽ trên hình 5–7b với $i(0^-) = 12/4 = 3\text{ A}$. Khi ngắt nguồn tại $t > 0$, mạch điện như trên hình 5–6c. Dòng điện giảm theo hàm mũ từ 3A xuống không. Hằng số thời gian của mạch $\tau = L/R = (1/100)\text{ s} = 0,01\text{ s}$.

Sử dụng kết quả ví dụ 5–3, dòng điện và điện áp của điện cảm tương ứng:

$$i(t) = 3e^{-100t}$$

$$v(t) = L(di/dt) = -30e^{-100t}$$

Đồ thị của dòng điện, điện áp được vẽ trên hình 5–6d và 5–6e.

Mạch RL có nguồn

Nếu nguồn dc tức thì được kết nối với mạch RL nối tiếp, như trong hình 5–7, dòng điện tăng theo hàm mũ từ không cho đến giá trị xác lập với hằng số

thời gian $\tau = L/R$. Các kết quả trước đây là lời giải phương trình vi phân bậc một () có thể thực hiện thông qua áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho vòng kín. Lời giải theo:

$$R.i + L \frac{di}{dt} = V_0 \quad \text{với } t > 0 \text{ và } i(0^+) = 0 \quad (5-8)$$

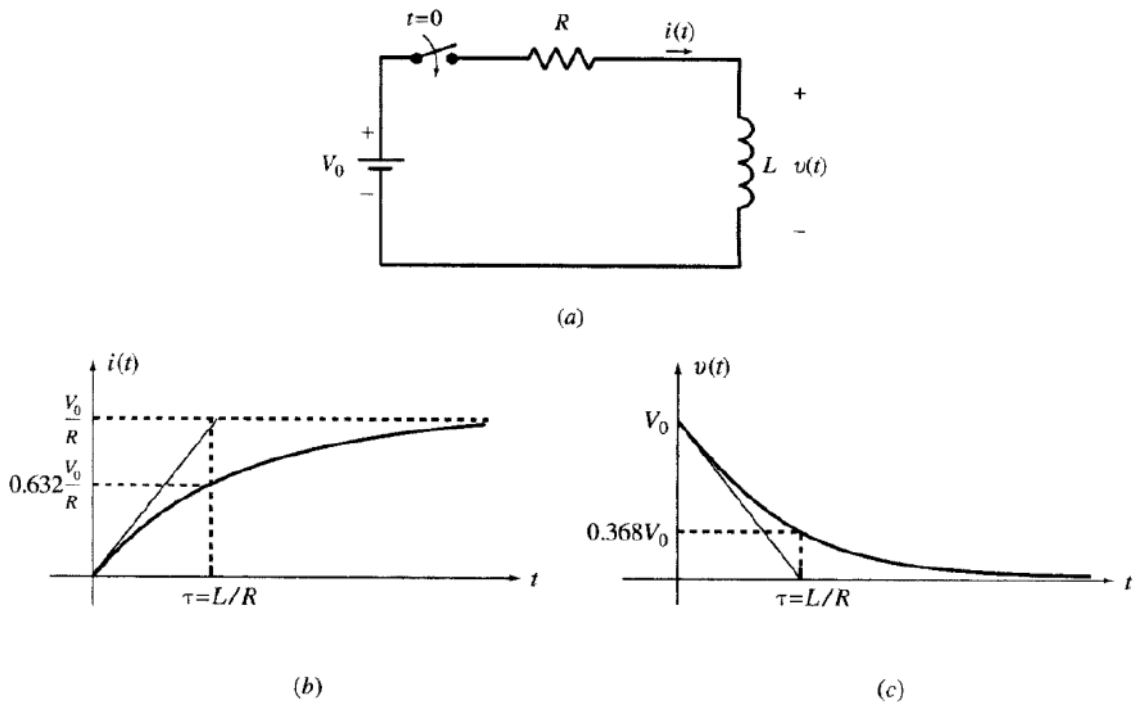
Do $i = i_h(t) + i_p(t)$, trong đó: $i_h(t) = Ae^{-Rt/L}$ và $i_p(t) = V_0/R$

Nên ta có: $i = i_h(t) + i_p(t) = Ae^{-Rt/L} + V_0/R$

Hệ số A tìm được từ điều kiện đầu: $i(0^+) = A + V_0/R = 0 \rightarrow A = -V_0/R$.
Dòng điện và điện áp trên điện cảm tính theo biểu thức dưới đây, dạng sóng đồ thị dòng áp trên hình 5-7.

$$i(t) = V_0/R(1 - e^{-Rt/L}) \quad \text{với } t > 0 \quad (5-9)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \quad \text{với } t > 0 \quad (5-10)$$



Hình 5-7

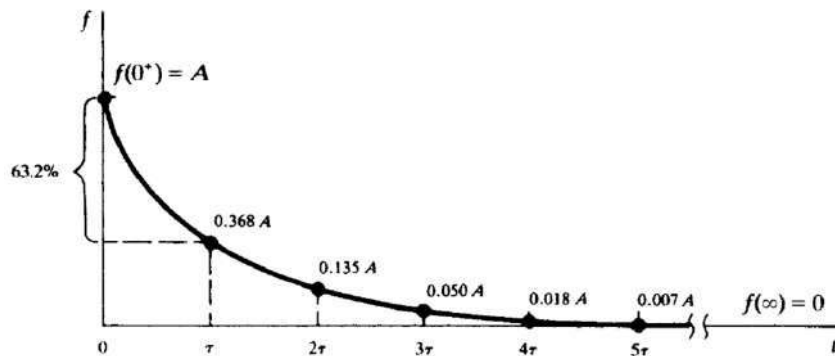
5.1.3. Hàm mũ cơ số tự nhiên

Suy giảm theo hàm mũ có thể viết dưới dạng $e^{-t/\tau}$, trong đó τ – hằng số thời gian (tính bằng giây). Đối với mạch RC (mục 5.1.1) và mạch RL (mục 5.1.2) hàm mũ ở dạng chung:

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{với } t > 0$$

Đồ thị được vẽ ở hình 5–8 với thời gian biến đổi bằng bội số của hằng số thời gian τ .

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0,368$$

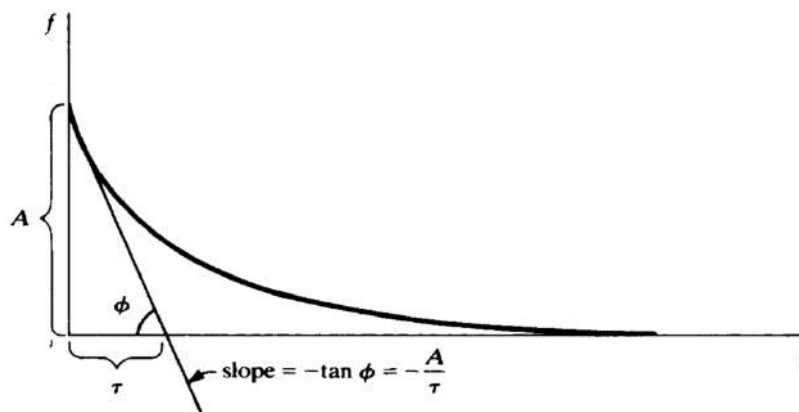


Hình 5–8

Có thể thấy, tại $t = \tau$, hàm mũ có giá trị bằng 36,8% giá trị ban đầu, hay nói cách khác, hàm chịu sự thay đổi giá trị 63,2% của tổng suy giảm từ $f(0+)$ đến $f(\infty)$. Tại thời điểm $t = 5\tau$, hàm mũ có giá trị bằng 0,0067A, nhỏ hơn 1% giá trị ban đầu. Quan điểm thực tế cho rằng, qua độ kết thúc khi $t = 5\tau$. Tiếp tuyến với đường cong hàm mũ tại $t = 0$, có thể dùng để xác định hằng số thời gian.

$$\text{slop} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

Đường tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm $t = \tau$ (hình 5–9). Một cách tổng quát hơn, đường tiếp tuyến tại $t = t_0$ có giao điểm với trục hoành tại $t = t_0 + \tau$. Như vậy nếu biết $f(t_0)$ và $f'(t_0)$, có thể dựng được đường cong hàm mũ $f(t)$.



Hình 5–9

Trong thời gian quá độ chỉ hiển thị một phần (trên giấy của máy tự ghi dạng sóng hoặc màn hiển thị của máy hiện sóng), và đồng thời giá trị hàm và độ dốc tương ứng, là những thông số cần thiết để dựng đồ thị hàm, thường không được cung cấp trên các máy đo thông dụng. Trong trường hợp này, chỉ cần đọc

được từ thiết bị đo các giá trị tại thời điểm khác nhau đã có thể tìm được phương trình của quá độ, theo hình 5–10:

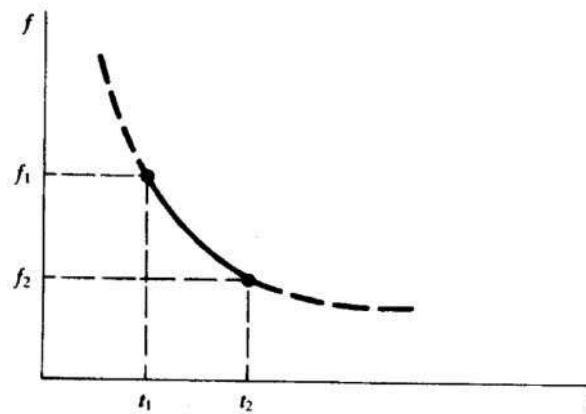
$$f_1 = Ae^{-t_1/\tau}$$

$$f_2 = Ae^{-t_2/\tau}$$

Trong đó, giải đồng thời cả hai trường hợp ta nhận được

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

Giá trị của A có thể tìm được từ giá trị f_1 hoặc f_2 .



Hình 5–10

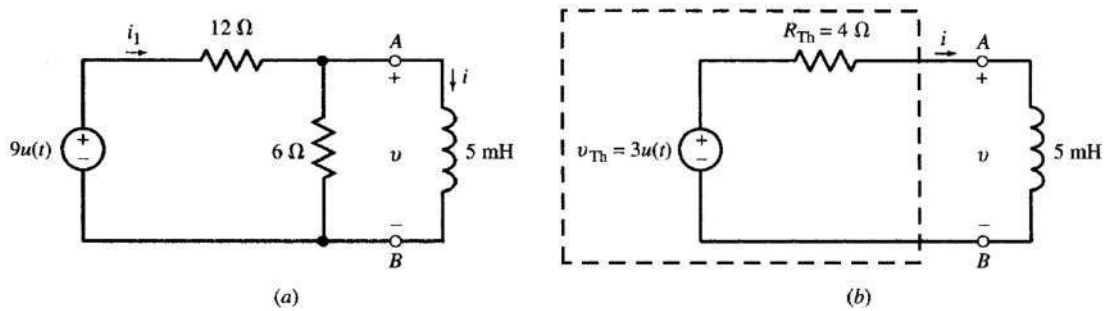
5.1.4. Mạch bậc một phức tạp RL và RC

Mạch điện phức tạp hơn có chứa các điện trở, nguồn và một phần tử có khả năng tích trữ năng lượng có thể được biến đổi thành sơ đồ tương đương Thevenin và Norton nhìn từ phía điện cảm hoặc tụ điện. Đây là phương pháp phân rã mạch điện trở về dạng RL hoặc RC đơn giản có thể giải bằng các phương pháp xét ở trên.

Nếu như nguồn được kết nối vào mạch, ngay sau đó quá trình quá độ, trong đó dòng và áp là các hàm mũ, cùng hằng số thời gian với các giá trị ban đầu và kết thúc có thể khác nhau. Hằng số thời gian của mạch có thể là một trong hai RC hoặc L/R, trong đó điện trở là giá trị tương đương Thevenin của mạch nếu nhìn từ hai cực của tụ điện hoặc điện cảm.

Ví dụ 5.5: Hãy tìm biểu thức dòng, áp và dòng điện i_1 trong hình 5-11a.

Nguồn áp và điện trở tương đương Thevenin của mạch điện phía trái điện cảm được mô tả trên hình 5–11b với $R_{Th} = 4\Omega$ và $v_{Th} = 3.u(t)V$.



Hình 5-11

Hằng số thời gian của mạch $\tau = L / R_{Th} = 5 \cdot 10^{-3} / 4 = 1,25 \text{ ms}$. Dòng điện ban đầu của điện cảm bằng không nên giá trị cuối của nó:

$$i_{\infty} = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ A}$$

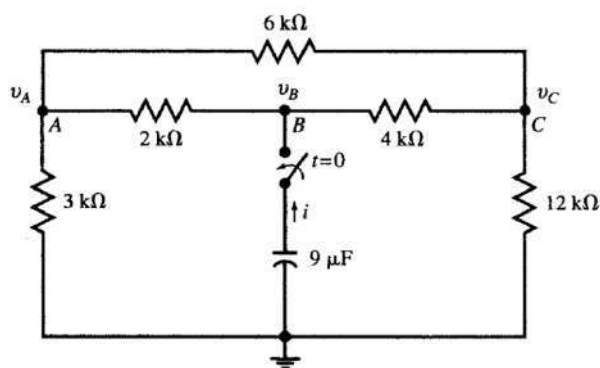
Từ đó:

$$i = 0,75(1 - e^{-800t})u(t) \text{ A} \quad v = L \frac{di}{dt} = 3e^{-800t}u(t) \text{ V}$$

$$i_1 = \frac{9 - v}{12} = \frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t) \text{ A}$$

Điện áp v có thể tính trực tiếp từ điều kiện đầu $v(0^+) = \frac{9 \cdot 3}{9 + 3} = 3 \text{ V}$, và giá trị cuối $v(\infty) = 0$ và hằng số thời gian của mạch không đổi.

Ví dụ 5-6: Trong hình 5-12, tụ điện $9 \mu\text{F}$ được kết nối vào mạch tại thời điểm $t = 0$, khi tụ có điện áp ban đầu $v_0 = 17 \text{ V}$. Hãy tìm v_A , v_B , v_C , i_{AB} , i_{AC} , và i_{BC} khi $t > 0$.



Hình 5-12

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng tại nút A, B và C với $t > 0$ để tìm biểu thức của dòng điện i :

$$\begin{aligned} \text{Nút A:} \quad & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) v_A - \frac{1}{2} v_B - \frac{1}{6} v_C = 0 \\ \rightarrow & 6v_A - 3v_B - v_C = 0 \end{aligned} \quad (5-11)$$

$$\begin{aligned}\text{Nút B:} \quad & -\frac{1}{2}v_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_B - 10^3 i - \frac{1}{4}v_C = 0 \\ & \rightarrow -2v_A + 3v_B - v_C = 4 \cdot 10^3 i\end{aligned}\quad (5-12)$$

$$\begin{aligned}\text{Nút C:} \quad & -\frac{1}{6}v_A - \frac{1}{4}v_B + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)v_C = 0 \\ & \rightarrow -2v_A - 3v_B + 6v_C = 0\end{aligned}\quad (5-13)$$

Giải đồng thời ba phương trình trên ta được:

$$v_A = \frac{7}{3}10^3 i \quad v_B = \frac{34}{9}10^3 i \quad v_C = \frac{8}{3}10^3 i$$

Mạch điện đang xét tương đương với tụ điện nối với điện trở R, có giá trị $R = v_B / i = 34/9 \text{ k}\Omega$. Tụ điện xả qua điện trở từ giá trị điện áp ban đầu V_0 theo dạng suy giảm hàm mũ với hằng số thời gian $\tau = RC = \frac{34}{9}10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} = 0,034 \text{ s}$.

Do đó với $t > 0$, điện áp và dòng điện trong mạch:

$$v_B = V_0 \cdot e^{-t/\tau} = 17e^{-1000t/34}$$

$$i = -C \frac{dv_B}{dt} = (9 \cdot 17 \cdot 10^{-3} / 34)e^{-1000t/34} = 4,5 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34}$$

$$v_A = \frac{7}{3}10^3 4,5 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34} = 10,5e^{-1000t/34}$$

$$v_C = \frac{8}{3}10^3 4,5 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34} = 12e^{-1000t/34}$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6,5e^{-1000t/34}$$

$$i_{AB} = v_{AB} / 2000 = -3,25 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34}$$

$$v_{AC} = v_A - v_C = -1,5e^{-1000t/34}$$

$$i_{AC} = v_{AC} / 6000 = -0,25 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34}$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-1000t/34}$$

$$i_{BC} = v_{BC} / 4000 = 1,25 \cdot 10^{-3} e^{-1000t/34}$$

Tất cả dòng điện và điện áp đều dưới dạng hàm mũ và có cùng hằng số thời gian. Để đơn giản hóa, dùng dạng đơn vị: V, mA, k Ω và ms cho các biểu thức dòng điện, điện áp, do đó điện trở và thời gian tương ứng sẽ nhân với 1000 và 0,001.

$$v_A = 10,5e^{-1000t/34} \text{ V}; \quad v_B = 17e^{-1000t/34} \text{ V}; \quad v_C = 12e^{-1000t/34} \text{ V}$$

$$i = 4,5e^{-1000t/34} \text{ mA}$$

$$v_{AB} = -6,5e^{-1000t/34} \text{ V}; v_{AC} = -1,5e^{-1000t/34} \text{ V}; v_{BC} = 5e^{-1000t/34} \text{ V}$$

$$i_{AB} = -3,25e^{-1000t/34} \text{ mA}; i_{AC} = -0,25e^{-1000t/34} \text{ mA}; i_{BC} = 1,25e^{-1000t/34} \text{ mA}$$

5.1.5. Trạng thái ổn định một chiều trong mạch RL và RC

Như đã nói đến ở phần trên, thành phần hàm mũ cơ số tự nhiên của đáp ứng khi có tác động bằng tín hiệu hàm bước và mạch RL và RC sẽ giảm dần theo thời gian. Tại thời điểm $t = \infty$, mạch điện đạt tới trạng thái ổn định và đáp ứng chỉ với thành phần một chiều.

Trên lý thuyết, cần phải có thời gian vô cùng lớn để mạch RL và RC đạt trạng thái ổn định. Tuy nhiên, tại thời điểm $t = 5\tau$, các thành phần quá độ giảm xuống còn 0,67% giá trị ban đầu. Nếu sau 10 lần hằng số thời gian, thành phần quá độ chỉ còn 0,0045%, khi đó trạng thái ổn định đã đạt được với tất cả các mục đích thực tế.

Trong trạng thái ổn định một chiều của mạch RLC, giả thiết mạch điện không duy trì các dao động, tất cả dòng điện và điện áp đều là hằng số. Khi điện áp trên tụ không đổi thì dòng điện qua nó bằng không. Tất cả các tụ điện được coi như hở mạch trong trạng thái ổn định. Tương tự, khi dòng điện qua điện cảm không đổi, điện áp trên nó bằng không. Tất cả các điện cảm được coi như nối ngắn mạch trong trạng thái ổn định. Mạch RLC trở thành mạch điện trở một chiều, trong đó điện áp trên tụ điện và dòng điện qua điện cảm là hằng số có thể dễ dàng tìm được, như đối với dòng, áp trên các phần của mạch điện, và phân tích mạch lúc này không cần dùng đến phương trình vi phân.

Trạng thái ổn định một chiều đang xét đúng cho số lượng bất kỳ điện cảm, điện dung và nguồn một chiều.

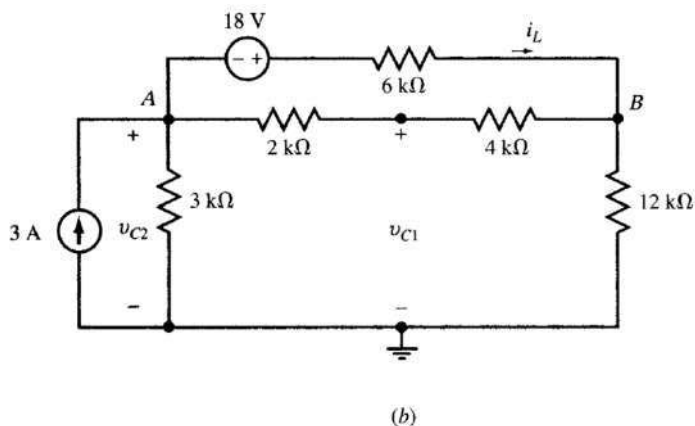
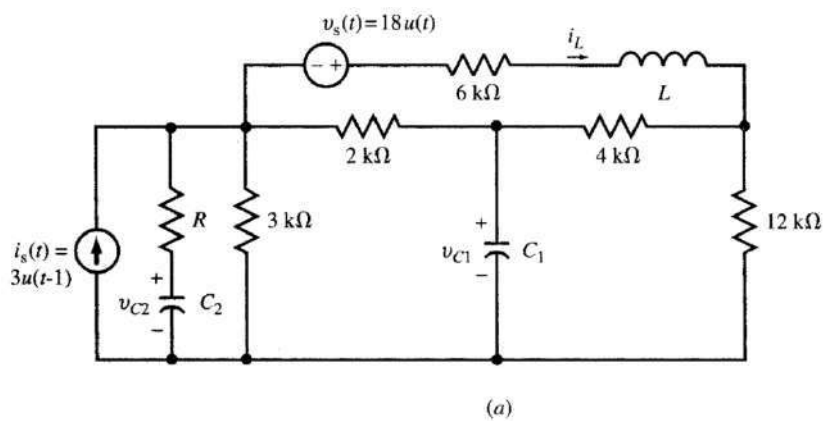
Ví dụ 5-7: Tìm giá trị trong trạng thái ổn định một chiều của các đại lượng i_L , v_{C1} và v_{C2} trong mạch hình 5-13a.

Khi đạt trạng thái ổn định, mạch điện trở thành (hình 5-13b), dòng điện cảm và điện áp tụ có thể tìm được theo định luật Kirchhoff về dòng cho các nút A và B.

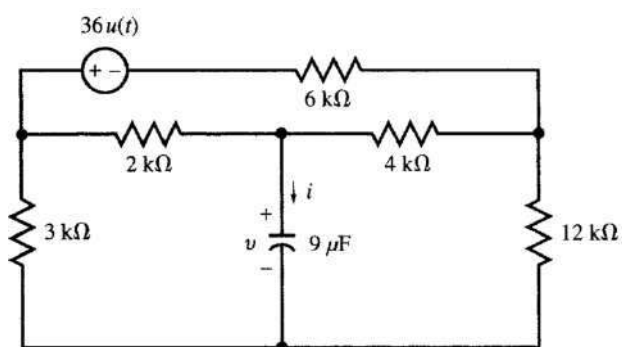
$$\text{Nút A: } \frac{v_A}{3} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_A + 18 - v_B}{6} = 3 \quad \rightarrow \quad 2v_A - v_B = 0$$

$$\text{Nút B: } \frac{v_B}{12} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_B - 18 - v_A}{6} = 0 \quad \rightarrow \quad -4v_A + 5v_B = 36$$

Giải hai phương trình tìm được $v_A = 6\text{V}$ và $v_B = 12\text{V}$. Theo sơ đồ mạch hình 5-13(b), ta có $i_L = 2 \text{ mA}$, $v_{C1} = 8\text{V}$, và $v_{C2} = 6\text{V}$.



Hình 5-13



Hình 5-14

Ví dụ 5-8: Hãy tìm các giá trị i và v trong mạch điện hình 5-14.

Tại thời điểm $t = 0$, điện áp trên tụ bằng không. Theo kết quả phân tích mạch giá trị cuối điện áp trên tụ khi đạt trạng thái ổn định bằng -2V . Hằng số thời gian của mạch hình 5-14, tương tự như mạch trong ví dụ 5-6, là $0,034\text{s}$.

Điện áp và dòng điện trên tụ:

$$v = -2(1 - e^{-100t/34})u(t) \text{ V}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 9 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 10^3}{34} e^{-100t/34} u(t) = -0,53 e^{-100t/34} u(t) \text{ A}$$

5.1.6. Quá độ khi chuyển mạch

Thời điểm đóng nguồn vào mạch hoặc thay đổi độ lớn của nguồn nhảy cấp đều dẫn đến biến đổi đột ngột về dòng và áp trong mạch điện. Biến đổi nhảy cấp của điện áp trên tụ hoặc dòng điện cảm phải có xung dòng điện. Nếu không có xung dòng, điện dung và điện áp hoặc dòng điện cảm vẫn giữ nguyên giá trị liên tục. Như vậy, các điều kiện, trạng thái sau chuyển mạch có thể xem như trước khi chuyển mạch.

Ví dụ 5–9: Trong hình 5–15a, công tắc S được đóng vào thời điểm $t = 0$. Tìm giá trị i và v trong cả thời gian.

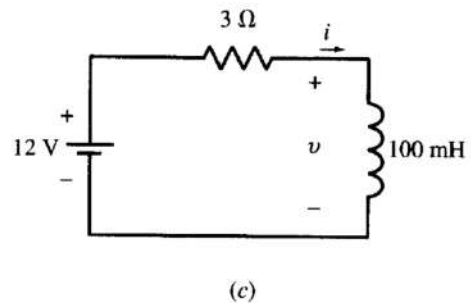
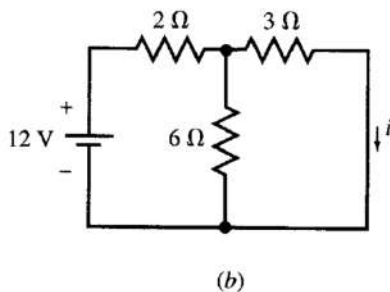
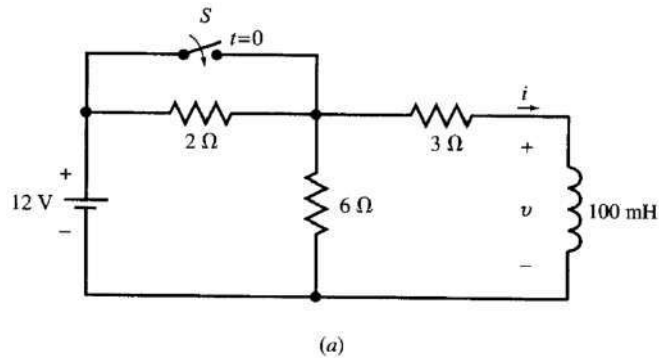
Tại thời điểm $t = 0$, mạch điện ở trạng thái ổn định và điện cảm bị nối tắt với $v(0^-) = 0$ (xem hình 5–15b) và dễ dàng tìm được giá trị của nó $i(0^-) = 2\text{A}$.

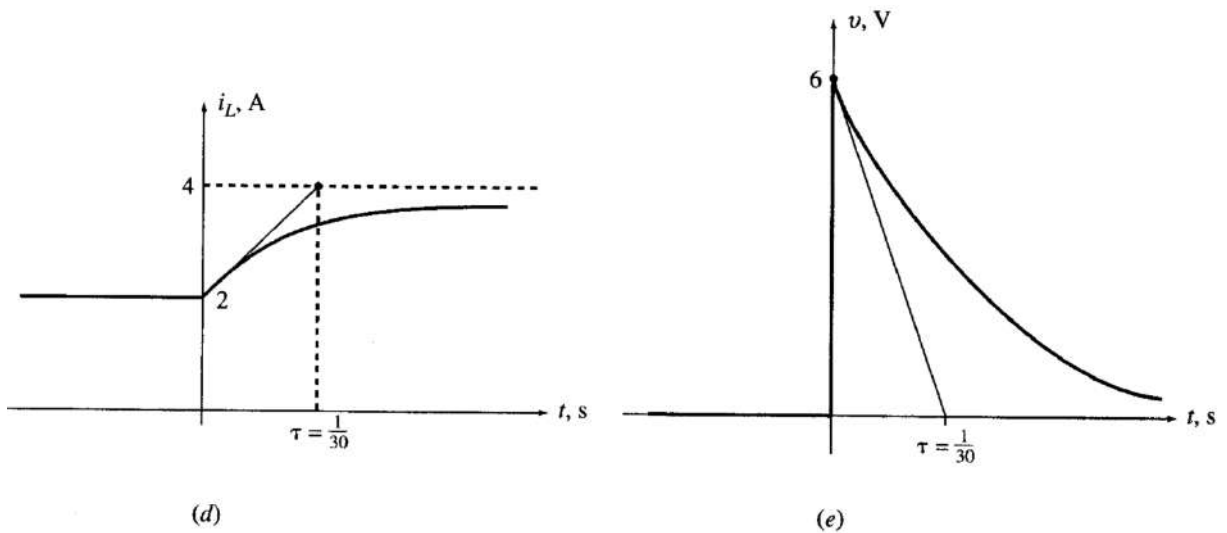
Sau thời điểm đóng công tắc S ($t = 0$), mạch điện như trong hình 5–15c. Với $t > 0$, dòng điện cảm được biểu diễn theo hàm mũ với hằng số thời gian $\tau = L/R = 1/30\text{ s}$, và giá trị đầu của dòng điện $i(0^-) = i(0^+) = 2\text{A}$ và giá trị cuối là $12/4 = 3\text{A}$.

Dòng và áp trên điện cảm:

Với $t < 0$: $i = 2\text{A}$ và $v = 0$

Với $t > 0$: $i = 4 - 2e^{-30t}$ và $v = L \frac{di}{dt} = 6e^{-30t}$

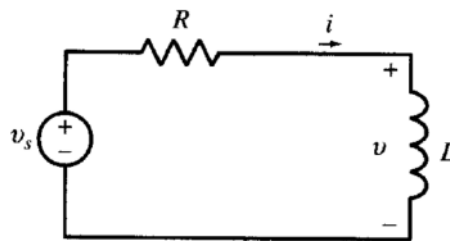




Hình 5-15

Ví dụ 5-10: Tìm i và v với $t = 0^-$ và $t = 0^+$ trong mạch điện hình 5-16, cho các giá trị $R = 5\Omega$, $L = 10\text{mH}$ và nguồn:

$$v_s = \begin{cases} 5 \text{ (V)} & t < 0 \\ 5 \sin \omega t \text{ (V)} & t > 0 \end{cases}$$



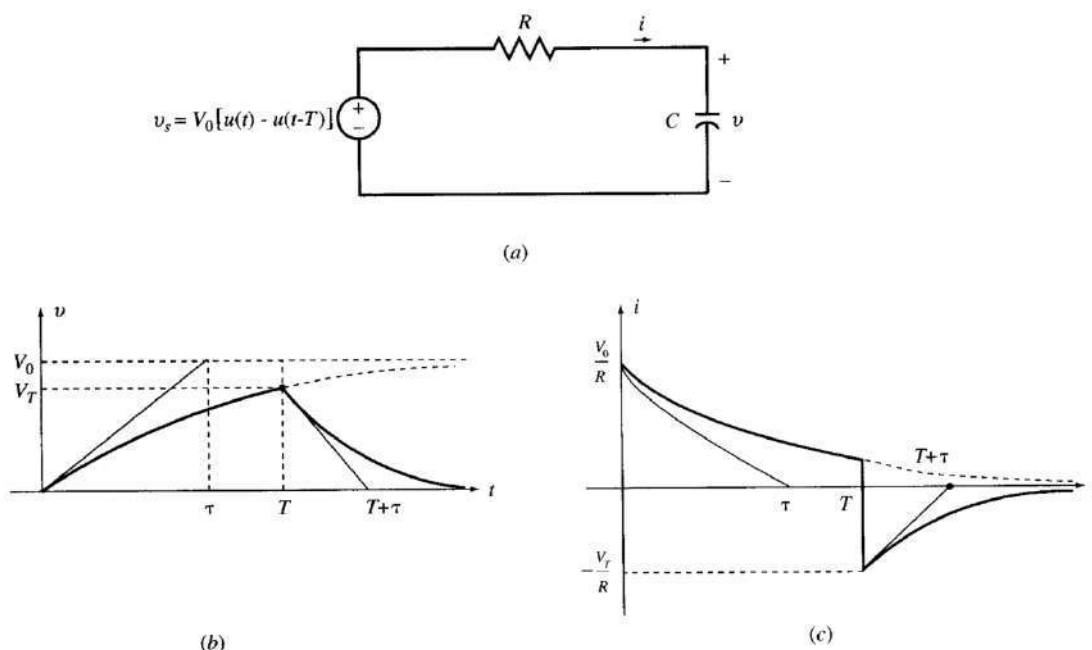
Hình 5-16

Tại $t = 0^-$, $i(0^-) = 5/5 = 1\text{A}$ và $v(0^-) = 0\text{V}$. Lúc chuyển mạch $t(0^-)$ đến $t(0^+)$, dòng điện cảm liên tục do không có xung điện áp làm gián đoạn nó. Như vậy $i(0^-) = i(0^+) = 1\text{A}$. Để tìm $v(0^+)$, ta viết định luật Kirchhoff về áp tại $t = 0^+$: $v_s = R \cdot i + v$ và ghi nhận rằng $v_s(0^+) = 0$. Do đó $v(0^+) = v_s(0^+) - Ri(0^+) = -5\text{V}$.

5.2. Đáp ứng của mạch bậc một

5.2.1. Đáp ứng với tác động của hàm bước

Trong phần này, xét đến đáp ứng của mạch bậc một dưới tác động của xung chữ nhật. Phương trình vi phân áp dụng cho mạch RC hoặc RL, trong đó nguồn cấp xung có thể là dòng hoặc áp. Như ví dụ sau, mạch RC nối tiếp trên hình 5-17, có nguồn áp cấp xung có độ rộng T và độ lớn V_0 .



Hình 5-17

Với $t < 0$, cả điện áp v và dòng điện i bằng không. Trong thời gian xung tác động, ta sử dụng các biểu thức (5-6b) và (5-6c):

$$v = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad 0 < t < T \quad (5-14a)$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad 0 < t < T \quad (5-14b)$$

Khi xung ngừng, mạch điện trở thành mạch RC không nguồn với điện áp ban đầu trên tụ V_T :

$$V_T = V_0(1 - e^{-T/RC}) \quad (5-14c)$$

Sử dụng các biểu thức (5-3) và (5-4), lấy khoảng dịch thời gian là T , ta có:

$$v = V_T e^{-(t-T)/RC} \quad t > T \quad (5-15a)$$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{-(t-T)/RC} \quad t > T \quad (5-15b)$$

Điện áp và dòng điện trên tụ được vẽ dạng sóng trên hình 5-17b và c.

Ví dụ 5-11: Trong mạch điện hình 5-17(a), cho $R = 1k\Omega$ và $C = 1\mu F$, nguồn áp là xung có độ lớn V_0 và độ rộng T . Tìm i và v với (a) $V_0 = 1V$ và $T = 1$ ms, (b) $V_0 = 10V$ và $T = 0,1$ ms và (c) $V_0 = 100V$ và $T = 0,01$ ms.

Sử dụng biểu thức (14) và (15) với hằng số thời gian $\tau = RC = 1$ ms. Để thuận tiện thời gian sẽ tính theo đơn vị ms, điện áp – V, dòng điện – mA. Ngoài ra cũng lấy gần đúng $e^{-t} = 1 - t$ khi $t \ll 1$.

(a) $V_0 = 1\text{V}$, $T = 1\text{ ms}$

Với $0 < t < 1\text{ ms}$:

$$v = (1 - e^{-t}); \quad i = e^{-t} \quad \text{và} \quad v_T = (1 - e^{-1}) = 0,632\text{ V}$$

Với $t > 1\text{ ms}$:

$$v = V_T e^{-(t-T)} = 0,632 e^{-(t-1)} = 1,72 e^{-t}$$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{-(t-T)} = -0,632 e^{-(t-1)} = -1,72 e^{-t}$$

(b) $V_0 = 10\text{V}$, $T = 0,1\text{ ms}$

Với $0 < t < 0,1\text{ ms}$: $v = 10(1 - e^{-t})$ $i = 10e^{-t}$ và $v_T = 10(1 - e^{-0,1}) = 0,95\text{ V}$

Với $t > 0,1\text{ ms}$: $v = V_T e^{-(t-T)} = 0,95 e^{-(t-0,1)} = 1,05 e^{-t}$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{-(t-T)} = -0,95 e^{-(t-0,1)} = -1,05 e^{-t}$$

(c) $V_0 = 100\text{V}$, $T = 0,01\text{ ms}$

Với $0 < t < 0,01\text{ ms}$: $v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t$ $i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t)$ và $v_T = 100(1 - e^{-0,01}) = 0,995\text{ V}$

Với $t > 0,01\text{ ms}$:

$$v = V_T e^{-(t-T)} = 0,995 e^{-(t-0,01)} = 1,01 e^{-t}$$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{-(t-T)} = -0,995 e^{-(t-0,01)} = -1,01 e^{-t}$$

Ngay khi xung áp nguồn xuất hiện một xung, điện áp và dòng điện trên tụ xuất hiện $v = e^{-t}u(t)$ $i = \delta(t) - e^{-t}u(t)$

5.2.2. Đáp ứng mạch RC và RL với tác động hàm xung đơn vị

Một xung rất hẹp có thể được gọi với tên xung kim với phần diện tích bên dưới sóng xung biểu thị độ lớn của nó. Xung kim là công cụ hữu ích phân tích và tổng hợp đáp ứng của mạch. Có thể thực hiện theo những cách sau: xác định giới hạn đáp ứng cho tác động của xung kim, được gọi là phương pháp tiếp cận giới hạn, như trong ví dụ 5-11 và 5-12; lấy đạo hàm của đáp ứng đối với hàm bước, giải trực tiếp phương trình vi phân. Đáp ứng với xung kim thường được ký hiệu bằng hàm $h(t)$.

Ví dụ 5-12: Tìm giới hạn của i và v trong mạch điện hình 5-17a đối với kích thích xung áp đơn vị khi độ rộng xung giảm tới không.

Sử dụng đáp ứng xung trong biểu thức (5-14) và (5-15) với $V_0 = 1/T$ và tìm giới hạn của chúng khi $T \rightarrow 0$. Từ biểu thức (5-14c), ta có:

$$\lim_{T \rightarrow 0} V_T = \lim_{T \rightarrow 0} (1 - e^{-T/RC})/T = 1/RC$$

Từ biểu thức (15) ta có:

$$\begin{aligned} t < 0: \quad h_v &= 0 & \text{và} \quad h_i &= 0 \\ 0^- < t < 0^+ : \quad 0 \leq h_v &\leq \frac{1}{RC} & \text{và} \quad h_i &= \frac{1}{R} \delta(t) \\ t > 0: \quad h_v(t) &= \frac{1}{RC} e^{-t/RC} & \text{và} \quad h_i(t) &= -\frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} h_v(t) &= \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \\ h_i(t) &= \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t) \end{aligned}$$

Ví dụ 5–13: Xác định đáp ứng đối với kích thích xung kim của mạch RC trong hình 5–17a bằng cách lấy đạo hàm của đáp ứng hàm bước.

Xung đơn vị có thể được xem xét như đạo hàm của hàm bước đơn vị. Dựa vào tính chất của phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng, ta lấy tích phân của đáp ứng hàm bước để tìm đáp ứng xung kim.

Đáp ứng với kích thích hàm bước của mạch RC:

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad \text{và} \quad i(t) = \frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t)$$

Ta tìm được đáp ứng xung đơn vị bằng cách lấy đạo hàm đáp ứng.

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad \text{và} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t)$$

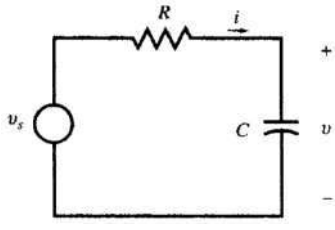
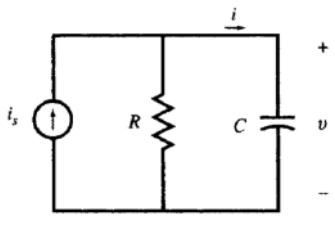
Ví dụ 5–14: Tìm đáp ứng xung đơn vị $h_i(t)$; $h_v(t)$; and $h_{il}(t)$ của mạch RL hình 5–11a bằng cách lấy đạo hàm của đáp ứng kích thích hàm bước.

Đáp ứng của mạch điện với hàm bước có biên độ 9 đã được giải quyết ở ví dụ 5–5. Lấy đạo hàm và hệ số tỉ lệ 1/9 ta có được đáp ứng cho hàm xung đơn vị.

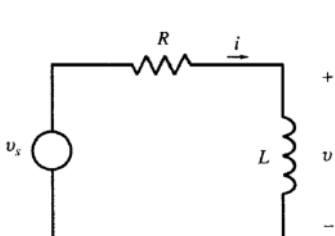
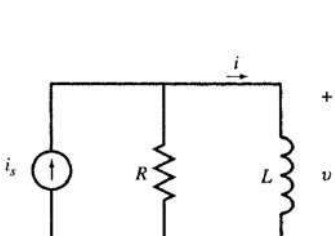
$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [0,75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3} e^{-800t} u(t) \\ h_v(t) &= \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [3e^{-800t} u(t)] = -\frac{800}{3} e^{-800t} u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} (3 - e^{-800t}) u(t) \right] = \frac{200}{9} e^{-800t} u(t) + \delta(t)$$

Bảng 5-1: Tổng hợp đáp ứng hàm bước và xung đơn vị của mạch RC

Mạch RC	Đáp ứng kích thích hàm bước	Đáp ứng kích thích xung đơn vị
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = (1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \\ h_i = -\frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t) + \frac{1}{R} \delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = \frac{1}{C} e^{-t/RC} u(t) \\ h_i = -\frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + \delta(t) \end{cases}$

Bảng 5-2: Tổng hợp đáp ứng hàm bước và xung đơn vị của mạch RL

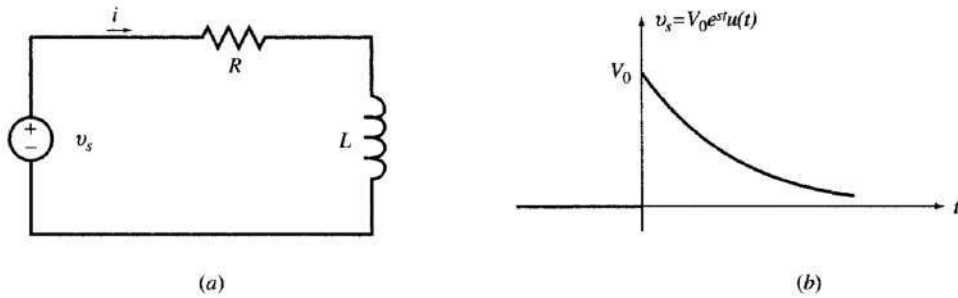
Mạch RL	Đáp ứng kích thích hàm bước	Đáp ứng kích thích xung đơn vị
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L} u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = \frac{R}{L} e^{-Rt/L} u(t) + \delta(t) \\ h_i = -\frac{1}{L} e^{-Rt/L} u(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R e^{-Rt/L} u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = -\frac{R^2}{L} e^{-Rt/L} u(t) + R \delta(t) \\ h_i = -\frac{R}{L} e^{-Rt/L} u(t) \end{cases}$

5.2.3. Đáp ứng của mạch RC và RL với kích thích hàm mũ

Xem xét phương trình vi phân bậc một cho mạch điện gồm RL nối tiếp khi có kích thích đột ngột từ nguồn áp $v_s = V_0 e^{st} u(t)$ như mạch điện trong hình 5-18. Khi $t < 0$, mạch điện không có dòng điện ($v_s = 0$).

Áp dụng định luật Kirchhoff về áp, ta có :

$$R.i + L \frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t) \quad (5-16)$$



Hình 5-18

Khi $t > 0$, ta có lời giải phương trình vi phân:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad \text{và} \quad i(0^+) = 0 \quad (5-17a)$$

Đáp ứng tự nhiên $i_h(t)$ là lời giải của phương trình $R.i + L(di/dt) = 0$; có nghĩa trường hợp không có hàm cưỡng bức. Tương tự mạch RL không nguồn:

$$i_h(t) = A e^{-Rt/L} \quad (5-17b)$$

Đáp ứng cưỡng bức $i_p(t)$ là hàm thỏa mãn (5-16) với $t > 0$:

$$i_p(t) = I_0 e^{st} \quad (5-17c)$$

Sau khi thế i_p trong biểu thức (5-16) tìm được $I_0 = -V_0 / (R + Ls)$. Bằng cách chọn $A = -V_0 / (R + Ls)$, điều kiện giới hạn $i(0^+) = 0$ cũng được thỏa mãn:

$$i(t) = -\frac{V_0}{R + Ls} (e^{st} - e^{-Rt/L}) u(t) \quad (5-17d)$$

Trường hợp đặc biệt: Nếu hàm cưỡng bức cùng loại với hàm đáp ứng tự nhiên ($s = -R/L$), đáp ứng cưỡng bức phải là $i_p(t) = I_0 t e^{-Rt/L}$. Điều này được kiểm tra thỏa mãn phương trình 5-16, với $I_0 = V_0 / L$, đáp ứng tự nhiên tương tự như 5-17b. Khi đó tổng các đáp ứng:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = (I_0 t + A) e^{-Rt/L}$$

Từ điều kiện $i(0^-) = i(0^+) = 0$, ta tìm được $A = 0$, và $i(t) = I_0 t e^{-Rt/L}$ trong đó: $I_0 = V_0 / L$

5.2.4. Đáp ứng của mạch RC và RL với kích thích hàm sin

Khi mạch gồm điện trở và điện cảm nối tiếp có kích thích đột ngột $v_s = V_0 \cos \omega t$ (hình 5-19), phương trình quan tâm là:

$$R.i + L \frac{di}{dt} = V_0 \cos(\omega t).u(t) \quad (5-18)$$

Lời giải phương trình vi phân:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \text{ trong đó } i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \text{ và } i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

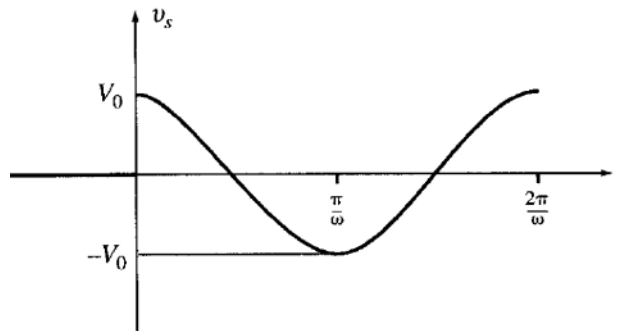
Thay i_p vào 5-18, ta tìm được I_0 :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ và } \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Khi đó: $i(t) = Ae^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \theta)$ với $t > 0$

Từ $i(0^+) = 0 \rightarrow A = -I_0 \cos \theta$, do đó:

$$i(t) = I_0 [\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta . e^{-Rt/L}]$$



Hình 5-19

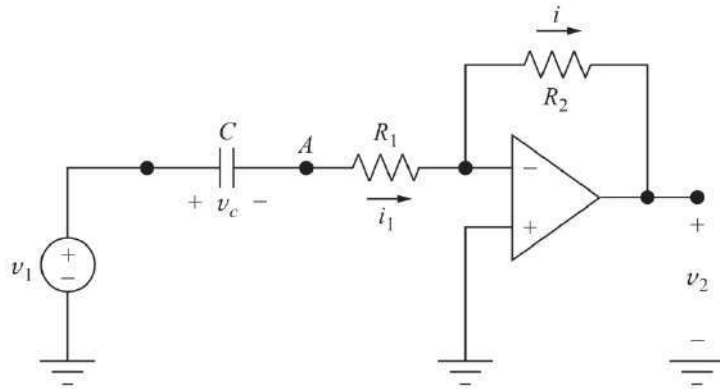
Bảng 5-3: Tổng hợp đáp ứng cường độ của mạch bậc một

Kích thích $f(t)$	Đáp ứng $v_p(t)$
1	$1/a$
t	$(t/a) - (1/a^2)$
$e^{st}, s \neq -a$	$e^{st}/(s+a)$
e^{-at}	$t.e^{-at}$
$\cos \omega t$	$A \cos(\omega t - \theta)$ trong đó: $A = 1/\sqrt{a^2 + \omega^2}$ và $\tan \theta = \omega/a$
$e^{-bt} \cos \omega t$	$Ae^{-bt} \cos(\omega t - \theta)$ trong đó: $A = 1/\sqrt{(a-b)^2 + \omega^2}$ và $\tan \theta = \omega/(a-b)$

5.2.5. Mạch bậc một chủ động

Mạch chủ động có chứa OA ít nhạy cảm với ảnh hưởng của tải khi kết nối với các mạch khác. Thêm vào đó, chúng có nhiều khả năng áp dụng và dễ dàng triển khai hơn đối với liên kết các mạch thụ động. Trong các phân tích mạch tuyến tính dưới đây, ta giả thiết một số điểm sau: (1) dòng điện chạy giữa các cực vào của OA bằng không, (2) Hiệu điện thế của cực đảo và không đảo của OA không đáng kể. Các phương pháp phân tích thường áp dụng được minh họa rõ ràng qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5–15: Lọc tần số cao. OA trong mạch ở hình 5–20 được coi là lý tưởng. Hãy tìm đáp ứng hàm bước của mạch v_2 với $v_1 = u(t)$.



Hình 5–20

Cực vào đảo của OA là cực đất giả, tụ điện có áp bằng không khi $t = 0$. Nguồn bước 1V ở đầu vào, do đó tạo ra dòng điện đi qua nhánh R_1C (từ phải sang trái với hằng số thời gian R_1C và giá trị đầu $1/R_1$).

$$i = \frac{1}{R} e^{-t/R_1C} u(t)$$

Cả dòng điện đi qua điện trở R_2 (OA không có dòng), do điện áp v_2 gây nên từ đầu ra $v_2 = -R_2 i$. Đáp ứng đối với hàm bước khi đó:

$$v_2 = -\frac{R_2}{R} e^{-t/R_1C} u(t)$$

Ví dụ 5–16: Trong mạch điện hình 5–20, lấy được phương trình vi phân biểu diễn quan hệ v_2 với v_1 . Hãy tìm đáp ứng của mạch với kích thích hàm bước như trong ví dụ 5–15.

Do cực vào đảo của OA có nối đất ảo và không có bất cứ dòng điện nào, dòng điện i đi qua C , R_1 và R_2 từ trái qua phải: $-v_2 / R_2$. Đặt v_A điện áp nút nối R_1 và C . Khi đó, tụ điện có điện áp $v_1 - v_A$ (cực dương bên trái). Dòng và áp của tụ có quan hệ:

$$-\frac{v_2}{R_2} = C \frac{d(v_1 - v_A)}{dt}$$

Để xác định v_A , ta lưu ý rằng phân đoạn R_1 , R_2 và cực đảo OA có $v_2 = -(R_2/R_1)v_A \rightarrow v_A = -(R_1/R_2)v_2$, thay v_A vào, ta có:

$$-\frac{v_2}{R_2} = C \frac{dv_1}{dt} - C \frac{dv_A}{dt} = C \frac{dv_1}{dt} + C \frac{R_1}{R_2} \frac{dv_2}{dt}$$

$$v_2 + R_1 C \frac{dv_2}{dt} = -R_2 C \frac{dv_1}{dt}$$

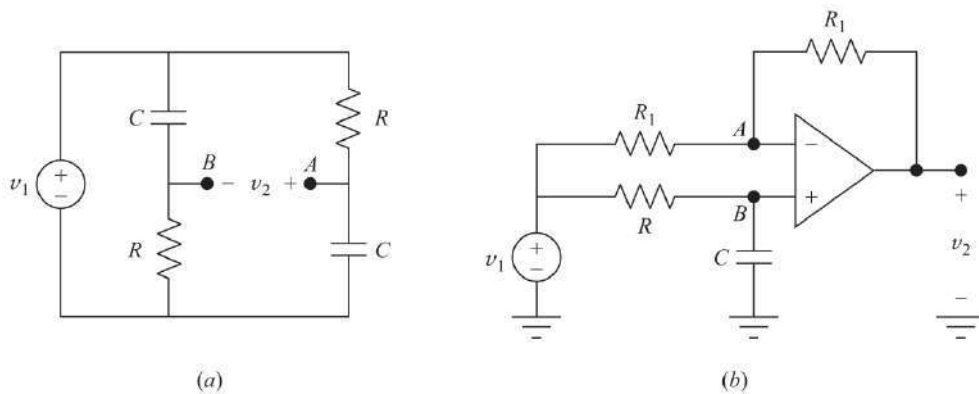
Để tìm đáp ứng của hàm bước đơn vị, ta giải phương trình sau

$$v_2 + R_1 C \frac{dv_2}{dt} = \begin{cases} -R_2 C & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Lời giải là: $-R_2 C(1 - e^{-t/R_1 C})u(t)$

Khi đó: $v_2 = -\frac{R_2}{R_1} e^{-t/R_1 C} u(t)$

Ví dụ 5-17: Dịch pha thụ động. Tìm quan hệ giữa v_2 và v_1 trong mạch hình 5-21a.



Hình 5-21

Chọn nút D làm nút gốc, áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho các nút A và B:

$$\text{Nút A: } \frac{v_A - v_1}{R_1} + \frac{v_A - v_2}{R_1} = 0$$

$$\text{Nút B: } \frac{v_B - v_1}{R_1} + C \frac{dv_B}{dt} = 0$$

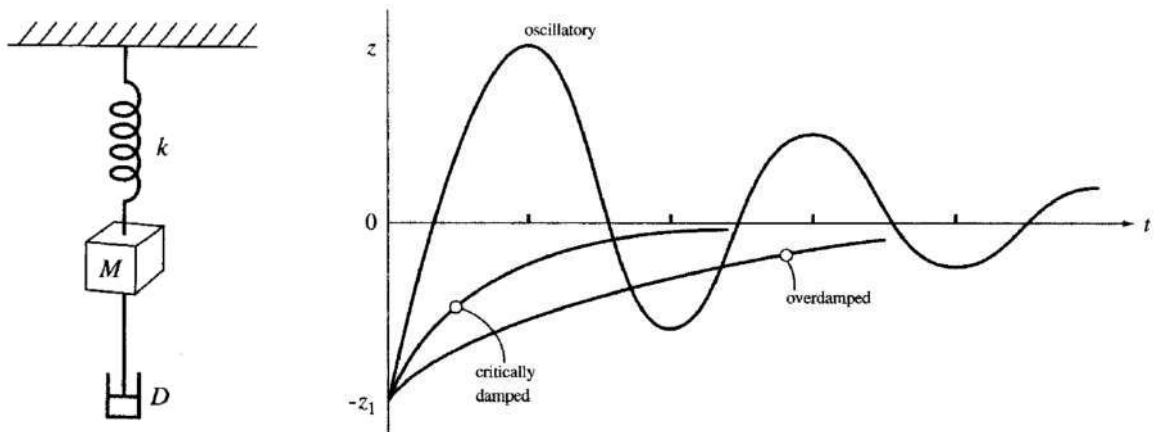
Đối với OA lý tưởng, ta có $v_A = v_B$, từ phương trình thứ nhất $v_A = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ thay vào phương trình thứ hai:

$$v_2 + RC \frac{dv_2}{dt} = v_1 - RC \frac{dv_1}{dt}$$

5.3. Mạch điện bậc cao

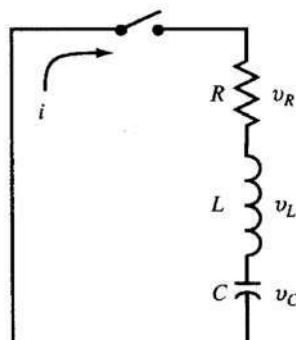
5.3.1. Mạch RLC nối tiếp không nguồn

Phương trình vi phân bậc hai có lời giải ở ba dạng khác nhau, mỗi dạng phụ thuộc vào phần tử của mạch điện. Để thấy rõ ba khả năng này, một hệ động học bậc hai được mô tả trong hình 5–22a. Khối lượng M được kéo bởi lò xo có hằng số giãn k . Một bộ giảm xóc D được nối với vật khối lượng M . Nếu vật dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng và sau đó được thả tự do tại thời điểm $t = 0$, sự di chuyển của vật có thể ở các chế độ overdamped, critically damped, or underdamped (oscillatory). Hình 5–22b, là quỹ đạo chuyển động của vật sau khi thả tự do từ vị trí bị dịch chuyển z_1 (khi $t = 0$).



Hình 5–22

Mạch RLC nối tiếp (hình 5–23) không chứa nguồn áp. Định luật Kirchhoff về áp cho vòng kín:



Hình 5–23

$$v_R + v_L + v_C = 0 \rightarrow R.i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i.dt = 0$$

Lấy đạo hàm và chia hai vế phương trình cho L

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Lời giải phương trình vi phân bậc hai có dạng $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, thay vào phương trình vi phân bậc hai ta có:

$$A_1 e^{s_1 t} \left(s_1^2 + \frac{R}{L} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left(s_2^2 + \frac{R}{L} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

$$\text{Nếu } s_1 \text{ và } s_2 \text{ là nghiệm của phương trình: } s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \beta$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \beta$$

$$\text{Trong đó: } \alpha = R/2L \text{ và } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Trường hợp tắt dần dưới ngưỡng (Overdamped Case) $\alpha > \omega_0$

Cả α và β là các số thực dương:

$$i = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

Ví dụ 5–18: Mạch RLC nối tiếp, $R = 200\Omega$, $L = 0,10 \text{ H}$ và $C = 13,33\mu\text{F}$ có điện tích ban đầu trên tụ $Q_0 = 2,67 \cdot 10^{-3}$. Công tắc đóng vào thời điểm $t = 0$, tạo mạch khép kín cho tụ xả. Hãy xác định quá độ của mạch (hình 5–24).

Đối với mạch điện này:

$$\alpha = R/2L = 200/2 \cdot 0,1 = 10^3 (\text{s}^{-1})$$

$$\omega_0^2 = 1/LC = 1/0,1 \cdot 13,22 \cdot 10^{-6} = 7,5 \cdot 10^5 (\text{s}^{-2})$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500 (\text{s}^{-1})$$

$$\text{Khi đó: } i = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}) = e^{-1000t} (A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

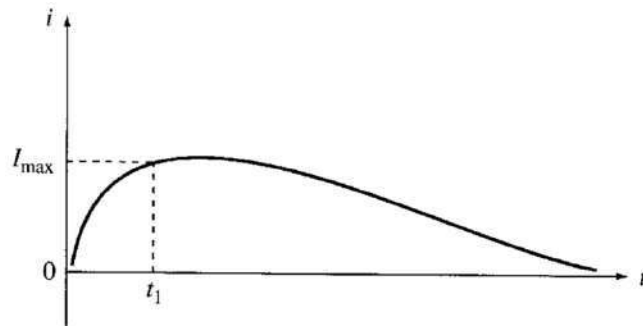
Các giá trị A_1 và A_2 được xác định từ điều kiện đầu. Đối với điện cảm $i(0^-) = i(0^+)$. Đối với tụ – điện áp và điện tích không biến đổi lúc chuyển mạch từ $t(0^-)$ sang $t(0^+)$. $v_C(0^-) = Q_0/C = 200 \text{ V}$. Áp dụng hai điều kiện này:

$$0 = A_1 + A_2 \quad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

Trong đó: $A_1 = \pm 2$ và $A_2 = \mp 2$, lấy A_1 dương,

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t}$$

Nếu lấy giá trị A_1 âm, hàm có đồ thị lật xuống dưới nhưng vẫn có dạng tương tự. Dấu của A_1 và A_2 được xác định từ cực tính của điện áp ban đầu trên tụ và chúng có quan hệ theo giả thiết cùng chiều dòng điện.



Hình 5-24

Trường hợp tắt dần ở giới hạn (Critically Damped Case) $\alpha = \omega_0$

Với $\alpha = \omega_0$, phương trình vi phân có dạng khác và hai biểu thức mũ dùng để giải trong các phần trước ở đây không thể thực hiện được. Phương trình trở thành:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

Và lời giải phương trình vi phân này có dạng: $i = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t)$

Ví dụ 5-19: Lặp lại ví dụ 5-18 với $C = 10\mu\text{F}$, và kết quả khi $\alpha = \omega_0$

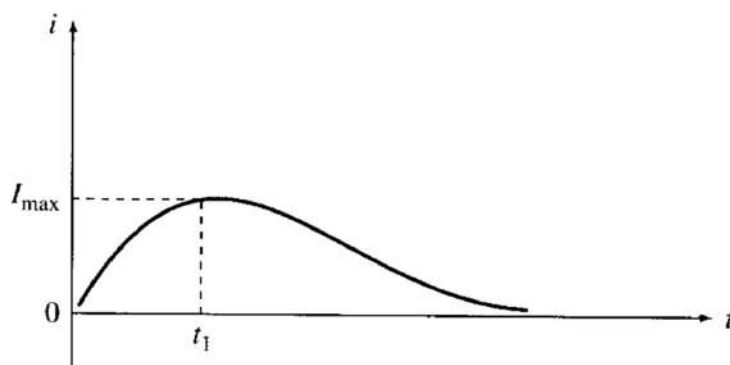
Như trong ví dụ 5-18, điều kiện đầu được dùng để xác định các hằng số.

Do đó $i(0^-) = i(0^+)$ nên $0 = [A_1 + A_2(0)]$ suy ra $A_1 = 0$.

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2 t e^{-\alpha t}) = A_2(-\alpha t e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

Bên cạnh đó: $\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = A_2 = \pm 2000$ nên $i = \pm 2000 t e^{-1000 t}$

Tại đây, cực tính lại ảnh hưởng đến lựa chọn chiều dòng điện tương ứng với cực tính của tụ điện ở thời điểm ban đầu.



Hình 5-25

Đáp ứng của chế độ tắt dần dưới ngưỡng và tắt dần tới hạn được biểu diễn tương ứng trên hình 5–24 và 5–25 là giống nhau. Có thể kiểm tra lại khẳng định trên bằng cách lấy vài giá trị của t , sau đó so sánh các dòng điện. Ví dụ, tìm thời gian để dòng điện ở cả hai trường hợp đạt giá trị 1,0 mA 1,0 μ A. Đồng thời tìm giá trị của t để dòng điện lớn nhất.

Trường hợp tắt dần trên ngưỡng hoặc dao động (Underdamped or Oscillatory Case) $\alpha < \omega_0$

Khi $\alpha < \omega_0$, các giá trị s_1 và s_2 trong lời giải phương trình vi phân khác so với các trường hợp trước do có dạng số phức $s_1 = \alpha + j\beta$ và $s_2 = \alpha - j\beta$, trong đó β được tính từ biểu thức $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Lời giải phương trình vi phân có thể viết dưới dạng biểu thức mũ:

$$i = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

Hoặc nếu ở dạng hàm sin:

$$i = e^{-\alpha t} (A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t)$$

Ví dụ 5–20: Lặp lại ví dụ 5–18 với $C = 1 \mu\text{F}$.

Tương tự ví dụ trước:

$$\alpha = R / 2L = 200 / 2.0,1 = 10^3 (\text{s}^{-1})$$

$$\omega_0^2 = 1 / LC = 1 / 0,1.1.10^{-6} = 10^7 (\text{s}^{-2})$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000 (\text{rad} / \text{s})$$

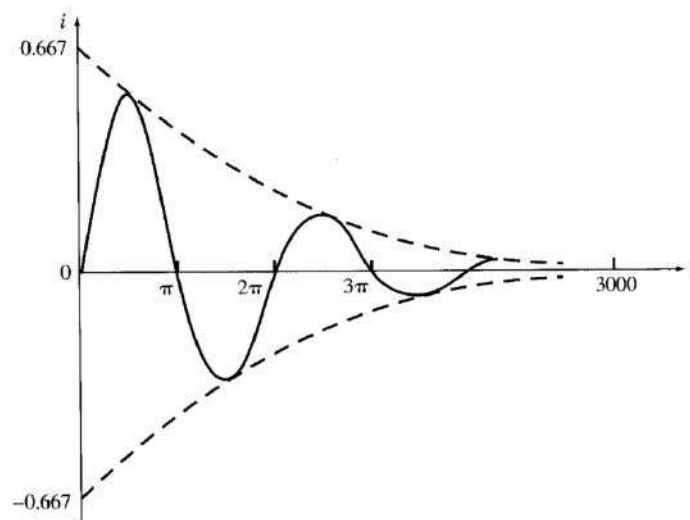
Khi đó:

$$i = e^{-\alpha t} (A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t) = e^{-1000t} (A_3 \cos 3000t + A_4 \sin 3000t)$$

Các hằng số A_3 và A_4 được xác định từ điều kiện đầu như phần trước $i(0^+) = 0$ và $v_C(0^+) = 200 \text{ V}$, từ đó $A_3 = 0$ và $A_4 = \pm 0,667$.

$$\text{Biểu thức dòng điện : } i = \pm 0,667 e^{-1000t} \sin 3000t$$

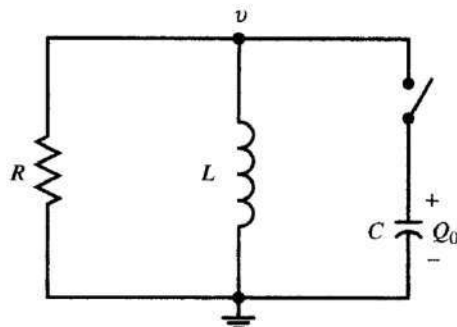
Trong hình 5–26, hàm $\pm 0,667 e^{-1000t}$ có đồ thị là đường đứt nét, giới hạn phạm vi của hàm dòng điện $i = \pm 0,667 e^{-1000t} \sin 3000t$. Dòng điện dao động có tần số theo radian β (rad/s) nhưng tắt dần theo tốc độ hàm mũ $e^{-\alpha t}$.



Hình 5–26

5.3.2. Mạch RLC song song không nguồn

Đáp ứng của mạch RLC song song được mô tả trên hình 5–27, có dạng giống như mạch RCL nối tiếp, do phương trình lập được có dạng phương trình vi phân bậc hai.



Hình 5–27

Phương trình định luật Kirchhoff về dòng tại nút:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (5-19)$$

Lấy đạo hàm và chia hai vế cho C:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Lời giải của phương trình vi phân có dạng:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

trong đó:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Với $\alpha = \frac{1}{2RC}$ và $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Lưu ý hệ số tắt dần α của quá trình quá độ khác với trường hợp RLC nối tiếp.

Đáp ứng quá độ dễ hình dung khi giả thiết ban đầu có điện tích Q_0 trên tụ và thời điểm đóng công tắc $t = 0$. Như vậy hàm bước điện áp được áp dụng cho mạch có biên thiên tương tự như quá độ.

Trường hợp tắt dần dưới ngưỡng (Overdamped Case) $\alpha > \omega_0$

Trong trường hợp này áp dụng lời giải: $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

Ví dụ 5-21: Mạch RLC song song với $R = 1000\Omega$, $C = 0,167 \mu F$ và $L = 1,0H$ có điện áp ban đầu $V_0 = 50,0V$ trên tụ. Xác định điện áp $v(t)$ khi đóng công tắc tại $t = 0$.

Ta có: $\alpha = 1/2RC = 2994$; $\alpha^2 = 8,96 \cdot 10^6$; $\omega_0^2 = 1/LC = 5,99 \cdot 10^6$

Với $\alpha^2 > \omega_0^2$ theo lời giải phương trình vi phân:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1271$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4771$$

$$\text{Tại } t = 0: \quad V_0 = A_1 + A_2; \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

Tại phương trình định luật Kirchhoff về dòng cho nút, khi $t = 0$, không có dòng điện ban đầu trên điện cảm:

$$\frac{V_0}{R} + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{RC} V_0$$

Như vậy hệ phương trình để tìm các hằng số:

$$A_1 + A_2 = V_0$$

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{1}{RC} V_0$$

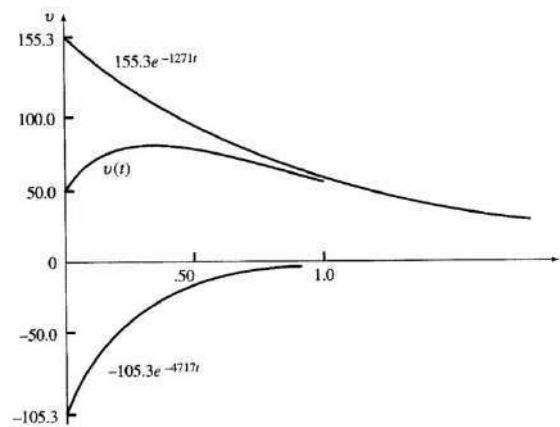
Giải hệ tìm được A_1 và A_2 :

$$A_1 = \frac{V_0(s_2 + 1/RC)}{s_2 - s_1} = 155,3$$

$$A_2 = V_0 - A_1 = 50 - 155,3 = -105,3$$

Biểu thức điện áp: $v = 155,3e^{-127t} - 105,3e^{-477t}$

Đồ thị điện áp trên hình 5-28



Hình 5-28

Trường hợp tắt dần trên ngưỡng hoặc dao động (Underdamped or Oscillatory Case) $\alpha < \omega_0$

Trường hợp dao động tắt dần đối với mạch RLC song song, lời giải tương tự với trường hợp nối tiếp:

$$v = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (5-20)$$

Trong đó: $\alpha = 1/2RC$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ là tần số tính theo radian, được gọi là tần số dao động tắt dần.

Ví dụ 5-22: Mạch RLC nối tiếp với $R = 200\Omega$, $L = 0,28H$ và $C = 3,57 \mu F$ có điện áp ban đầu trên tụ $V_0 = 50V$. Xác định biểu thức điện áp khi đóng chuyển mạch vào $t = 0$.

$$\text{Ta có: } \alpha = 1/2RC = 700 ; \alpha^2 = 4,9 \cdot 10^5 ; \omega_0^2 = 1/LC = 10^6$$

Khi $\alpha < \omega_0$, mạch điện có đáp ứng là dao động tắt dần.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4,9 \cdot 10^5} = 714$$

Tại $t = 0$, $V_0 = 50$; khi đó $A_1 = V_0 = 50$ từ phương trình định luật Kirchhoff về dòng cho nút.

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{RC} V_0$$

Lấy đạo hàm biểu thức điện áp tại $t = 0$:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \omega_d A_2 - \alpha A_1 \quad \rightarrow \quad \omega_d A_2 - \alpha A_1 = -\frac{1}{RC} V_0$$

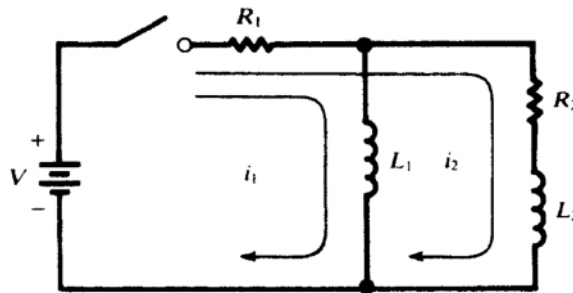
$$\text{Thay } A_1 = 50 \rightarrow A_2 = \frac{-(V_0 / RC) + V_0 \alpha}{\omega_d} = -49$$

$$\text{Vậy: } v = e^{-700t} (50 \cos 714t - 49 \sin 714t)$$

Trường hợp tắt dần ở giới hạn ngưỡng không được xét cho mạch RLC song song do có thông số quá nhỏ hoặc không có trong thực tế thiết kế. Thậm chí có thể lấy các hằng số của đáp ứng ở giới hạn dao động cho trường hợp này.

5.3.3. Mạch điện có hai vòng mắt lưới

Những phân tích đáp ứng của mạch điện cho trường hợp hai vòng mắt lưới, gồm hai phần tử tích trữ điện năng, có dạng phương trình vi phân dưới đây.



Hình 5-29

Như trong hình 5-29, chọn 2 vòng với các dòng i_1 và i_2 , áp dụng định luật Kirchhoff về áp, ta có hai phương trình vi phân bậc 1:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V \quad (5-21)$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V \quad (5-22)$$

Hai phương trình này cần phải giải đồng thời (hệ phương trình vi phân), để thực hiện ta lấy đạo hàm một trong hai phương trình và thế phương trình còn lại được phương trình bậc hai. Ở đây ta lấy đạo hàm phương trình thứ nhất

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (5-23)$$

Khử i_2 và di_2/dt từ các phương trình trên ta thu được:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2}{L_1 L_2} V \quad (5-24)$$

Trạng thái ổn định trong lời giải của phương trình (5-24) là điều kiện $i(\infty) = V / R_1$; Quá trình quá độ được xác định bằng các nghiệm s_1 và s_2 của phương trình:

$$s^2 + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0$$

Và điều kiện ban đầu: $i(0^+) = 0$; $\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V}{L_1}$

(Cả hai dòng điện i_1 và i_2 cần phải liên tục tại $t = 0$). Biểu thức dành cho i_1 đã biết, biểu thức dành cho i_2 có thể suy ra từ (5-21).

Ở đây cần có hệ số tắt dần đảm bảo quá trình quá độ kết thúc. Phụ thuộc vào các hằng số quá trình quá độ có thể là tắt dần dưới ngưỡng hoặc tắt dần trên ngưỡng (dao động). Tổng quát, dòng điện trong mạch được biểu diễn theo biểu thức sau:

$$i = (\text{quá độ}) + \frac{V}{R_1}$$

Quá độ có giá trị bằng $-V/R_1$ khi $t = 0$ và bằng không khi $t = \infty$.

5.4. Quá độ của mạch điện trong miền tần số

5.4.1. Tần số phức

Các mạch điện đã xét trước đây, hàm biểu diễn nguồn là hằng số (ví dụ, $V = 50V$), còn các nguồn có dạng hàm sin (ví dụ, $v = 100\sin(500t + 30^\circ)V$), hoặc hàm mũ (ví dụ, $v = 10e^{-5t}V$) chưa được xét đến. Trong phần này, ta làm quen với tần số phức, nếu dùng biểu diễn các hàm trên sẽ có nhiều đơn giản khi phân tích mạch bao gồm cả quá trình quá độ và trạng thái ổn định.

Biểu diễn hàm mũ bằng hàm sin và cos tương đương:

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$$

Ta thấy: $\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} e^{j(\omega t + \varphi)}$ và để đơn giản Re được thay bằng hằng số A và hệ số $e^{\sigma t}$.

$$Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

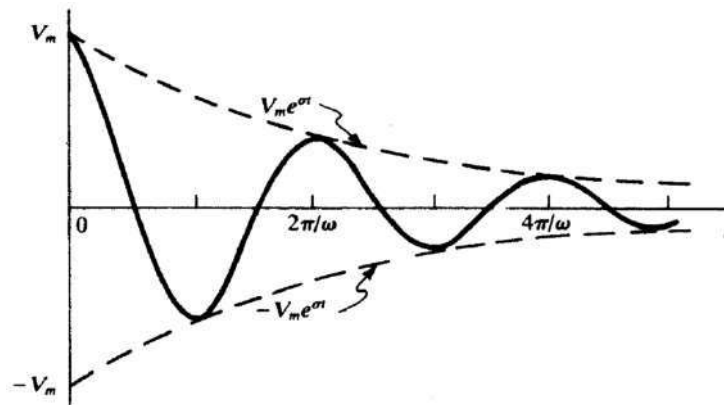
$$Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{j\varphi} e^{st} \text{ trong đó } s = \sigma + j\omega$$

Tần số phức $s = \sigma + j\omega$ có đơn vị là s^{-1} và ω như đã biết có đơn vị rad/s. Như vậy đơn vị của σ cũng phải là s^{-1} . Và để phân biệt σ được gọi là tần số Neper với đơn vị Np/s. Nếu cả σ và ω đều khác không, hàm số là hàm cos tắt dần. Nếu σ và ω bằng không, hàm có giá trị là hằng số. Cuối cùng nếu $\omega = 0$ và σ khác không, giá trị của hàm là suy giảm theo hàm mũ. Chỉ có các giá trị âm của σ mới đáng xem xét.

Bảng 5–4: Một số hàm với giá trị $s = \sigma + j\omega$ và cho biểu thức Ae^{st} .

$f(t)$	s	A
$10e^{-5t}$	$-5 + j\theta$	10
$5\cos(500t + 30^\circ)$	$0 + j500$	5
$2e^{-3t}\cos(100t - 45^\circ)$	$-3 + j100$	2
100	$0 + j0$	100

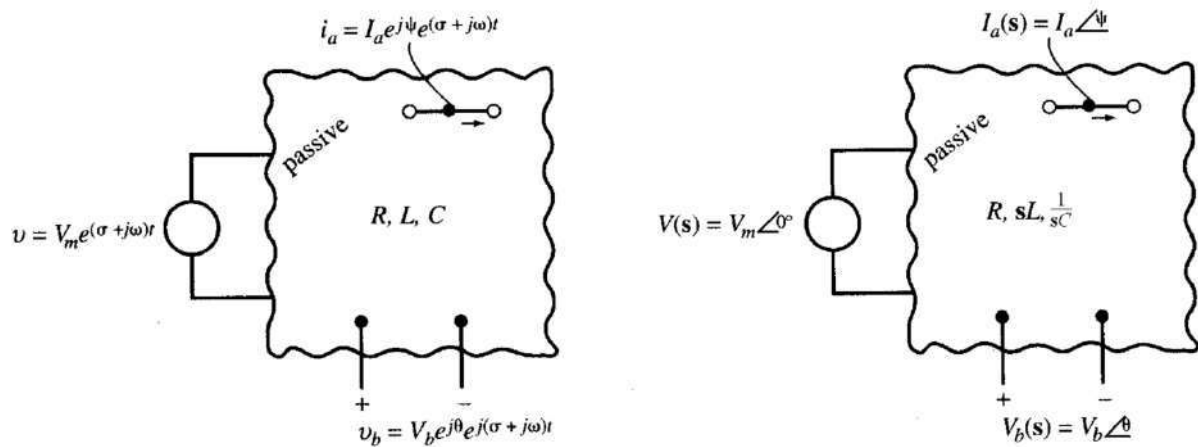
Trong hình 5–30, ta xét biến thiên của hàm với các giá trị của s , khi thay đổi s dạng sóng của hàm số khác biệt nhiều. Nếu $\sigma = 0$, lúc này không có hiện tượng tắt dần, hàm khảo sát trở thành hàm cos với biên độ $\pm V_m$ (không thể hiện trên đồ thị). Nếu $\omega = 0$, hàm mũ suy giảm với giá trị ban đầu là $\pm V_m$. Nếu cả σ và ω đều khác không ta được hàm cos tắt dần.



Hình 5–30

5.4.2. Trở kháng tổng quát của mạch RLC trong miền tần số s

Các nguồn áp $v = V_m e^{st}$ cho mạch thụ động (mạch điện chỉ gồm các phần tử thụ động) sẽ có dòng điện trên các nhánh và điện áp trên các phần tử. Dòng và áp sẽ cùng là hàm thời gian theo e^{st} (như, $I_a e^{j\psi} e^{st}$ và $V_a e^{j\varphi} e^{st}$). Do đó để xác định được dòng và áp chỉ cần xác định độ lớn và góc pha của chúng. Bằng cách này ta đã chuyển từ miền thời gian sang miền tần số (hình 5–31).



Hình 5–31

Xét mạch gồm RL nối tiếp với nguồn áp $v = V_m e^{j\varphi} e^{st}$ sẽ có dòng điện được biểu diễn theo biểu thức $i = I_m e^{j\psi} e^{st} = I_m e^{st}$, nếu thay vào phương trình mạch điện

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m e^{j\varphi} e^{st}$$

Ta được phương trình sau:

$$RI_m e^{st} + sLI_m e^{st} = V_m e^{j\varphi} e^{st} \rightarrow I_m = \frac{V_m e^{j\varphi}}{R + sL}$$

Trở kháng trong miền tần số của RL nối tiếp là $R + sL$, do đó điện cảm có cảm kháng là sL trong miền tần số.

Ví dụ 5–23: Mạch RL nối tiếp với $R = 10\Omega$, $L = 2H$, được cấp nguồn áp $v = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ)$ V. Xác định dòng điện trong miền tần số.

$$v = 10 \angle 30^\circ e^{st} = Ri + L \frac{di}{dt} = 10i + 2 \frac{di}{dt}$$

Thay $i = Ie^{st}$

$$10 \angle 30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + 2sIe^{st} \rightarrow I = \frac{10 \angle 30^\circ}{10 + 2s}$$

Thay $s = -2 + j10$ (biểu thức nguồn $v = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ) \rightarrow \sigma = -2$; $\omega = 10$; $s = -2 + j10$) vào ta có:

$$I = \frac{10 \angle 30^\circ}{10 + 2(-2 + j10)} = \frac{10 \angle 30^\circ}{6 + j20} = 0,48 \angle -43,3^\circ$$

Kết quả: $i = 0,48e^{-2t} \cos(10t - 43,3^\circ)$ A

Ví dụ 5–24: Mạch RC nối tiếp với $R = 10\Omega$ và $C = 0,2F$, có nguồn áp tương tự như với ví dụ 5–23.

$$v = 10\angle 30^\circ e^{st} = Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 10i + 5 \int i dt$$

Thay $i = Ie^{st}$

$$v = 10\angle 30^\circ e^{st} = 10Ie^{st} + \frac{5}{s} Ie^{st} \rightarrow I = \frac{10\angle 30^\circ}{10 + 5/s}$$

Thay $s = -2 + j10$ vào biểu thức dòng điện I

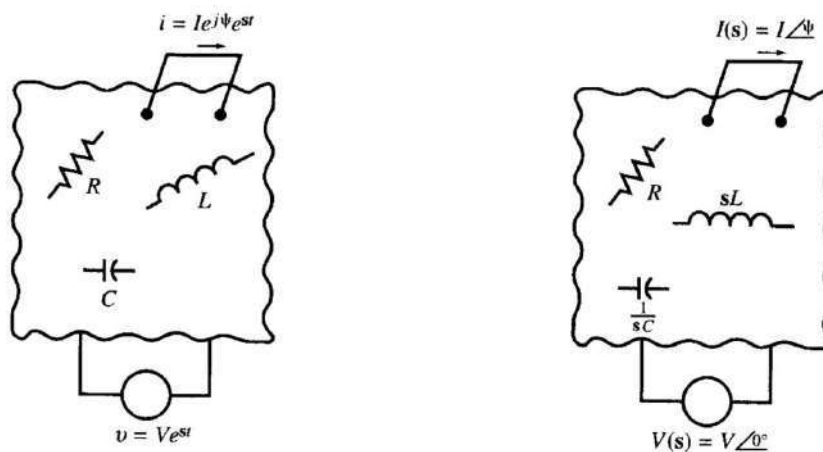
$$I = 1,01\angle 32,8^\circ$$

Kết quả: $i = 1,01e^{-2t} \cos(10t + 32,8^\circ)$

Như vậy trong miền tần số trở kháng của tụ điện ($1/sC$). Và trở kháng của mạch thụ động RLC nối tiếp trong miền tần số: $Z(s) = R + sL + 1/sC$

5.4.3. Hàm biến đổi mạch điện

Nguồn áp có dạng $v = Ve^{st}$ cấp cho mạch thụ động tạo nên dòng điện và điện áp có chung dạng hàm e^{st} trong mạch, ví dụ, $i = Ie^{j\psi} e^{st}$. Như vậy chỉ cần xác định được độ lớn và góc pha để xác định dòng, áp. Phần trên ta đã xét các đại lượng trong miền tần số, trong đó dòng và áp được biểu diễn ở dạng cực, ví dụ $V\angle\theta; I\angle\psi$. Trong hình 5-32, biểu diễn mạch điện tương ứng trong miền thời gian $s = \sigma + j\omega$ và miền tần số trong đó chỉ hiển thị độ lớn và góc pha. Trong miền tần số, điện cảm được biểu diễn bằng sL và điện dung được biểu diễn bằng $1/sC$. Tổng trở kháng của mạch được biểu diễn bằng $Z(s) = V(s) / I(s)$.



Hình 5-32

Hàm biến đổi mạch điện $H(s)$ được định nghĩa là tỉ số giữa biên độ phức của tín hiệu hàm mũ đầu ra $Y(s)$ với biên độ phức của tín hiệu hàm mũ đầu vào $X(s)$. Nếu như $X(s)$ là nguồn cấp cho mạch và $Y(s)$ là điện áp giữa hai cực, thì tỉ số $Y(s)/X(s)$ không có đơn vị.

Hàm biến đổi mạch được xác định từ phương trình vi phân vào – ra của mạch:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Trong đó: $x(t) = X e^{st}$ và $y(t) = Y e^{st}$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) e^{st} = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) e^{st}$$

Khi đó:

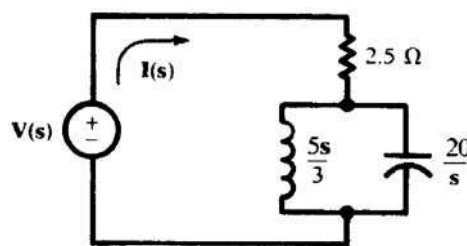
$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Trong mạch tuyến tính bao gồm các phần tử, hàm $\mathbf{H}(s)$ được gọi là hàm tỉ lệ của s , thường được viết dưới dạng tổng quát sau:

$$\mathbf{H}(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_v)}$$

Trong đó: k – số thực nào đó, hằng số phức z_m ($m = 1, 2, \dots, \mu$) được gọi là các zero của $\mathbf{H}(s)$ và p_n ($n = 1, 2, \dots, v$) được gọi là các pole (cực) của $\mathbf{H}(s)$, giả thiết đặc biệt quan trọng khi $\mathbf{H}(s)$ được hiểu là tỉ lệ của đáp ứng (của một phần mạch điện trong miền thời gian) đối với kích thích (từ phần khác của mạch điện). Như vậy với $s = z_m$, đáp ứng bằng không, và không phụ thuộc vào độ lớn của kích thích. Với $s = p_n$, đáp ứng bằng vô cùng, và không phụ thuộc vào mức nhỏ của kích thích.

Ví dụ 5–25: Mạch thụ động trong miền tần số được vẽ tại hình 5–33. Xác định hàm biến đổi của mạch theo đáp ứng $\mathbf{I}(s)$ đối với kích thích $\mathbf{V}(s)$



Hình 5–33

Hàm biến đổi:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}(s)}{\mathbf{V}(s)} = \frac{1}{\mathbf{Z}(s)}$$

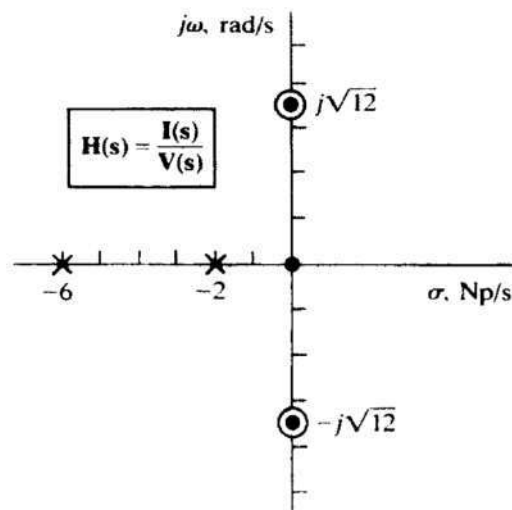
Trong đó: $\mathbf{Z}(s)$ tổng trở tương đương của mạch thụ động

$$Z(s) = 2,5 + \frac{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}}{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}} = 2,5 \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 + 12}$$

$$H(s) = 0,4 \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

Tử số của biểu thức $H(s)$ trong ví dụ trên bằng không khi $s = \pm j\sqrt{12}$, tương ứng hàm điện áp tại tần số đó sẽ tạo dòng điện bằng không. Trong phần sau sẽ đề cập đến chế độ cộng hưởng của mạch RLC nối tiếp và RLC song song tại tần số $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Với $L = 5/3$ H và $C = 1/20$ F thì $\omega = \sqrt{12}$ rad/s.

Các zero và pole của hàm biến đổi mạch điện $H(s)$ có thể biểu diễn trên hệ trục tọa độ phức. Hình 5-34 là các pole và zero của ví dụ 5-25, trong đó zero được kí hiệu bằng (.) và pole được kí hiệu bằng (x). Các zero trên trục ảo với các giá trị $s = \pm j\sqrt{12}$ và các pole trên trục thực tại $s = -2$ và $s = -6$.



Hình 5-34

5.4.4. Đáp ứng cưỡng bức

Hàm biến đổi mạch điện có thể được biểu diễn dưới dạng cực (pole) và đáp ứng có thể xác định bằng phương pháp đồ thị. Trước khi tiếp cận với phương pháp đồ thị, ta có xét $H(s)$ đơn giản là tỉ lệ $V_0(s)/V_i(s)$, $I_2(s)/V_1(s)$ và $I_2(s)/I_1(s)$.

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_\nu)}$$

$$\text{Đặt: } s - z_m = N_m \angle \alpha_m \quad (m = 1, 2, \dots, \mu)$$

$$s - p_n = D_n \angle \beta_n \quad (n = 1, 2, \dots, \nu)$$

$$\mathbf{H}(s) = k \frac{(N_1 \angle \alpha_1)(N_2 \angle \alpha_2) \dots (N_\mu \angle \alpha_\mu)}{(D_1 \angle \beta_1)(D_2 \angle \beta_2) \dots (D_\nu \angle \beta_\nu)}$$

$$\mathbf{H}(s) = k \frac{N_1 N_2 \dots N_\mu}{D_1 D_2 \dots D_\nu} \angle (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu)$$

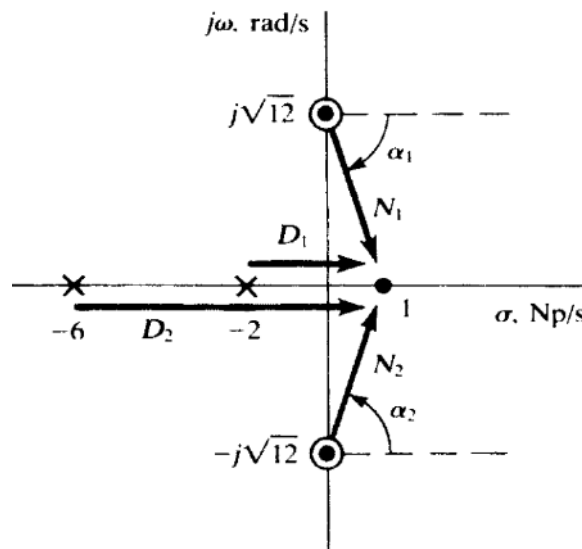
Biểu thức này cho thấy đáp ứng của mạch đối với kích thích tại tần số $s = \sigma + j\omega$ được xác định bởi tổng độ dài các vec tơ từ các cực và zero đến điểm s và góc của các vec tơ với trục dương σ trong giản đồ pole-zero.

Ví dụ 5-26: Hãy kiểm tra đáp ứng của mạch trong ví dụ 5-25 đối với kích thích từ nguồn hàm mũ $v = 1e^{st}$ khi $s = 1$ Np/s.

Điểm kiểm tra đáp ứng $1 + j0$ trên giản đồ cực-zero. Vẽ các vec tơ từ các cực và zero đến điểm kiểm tra và tính toán độ dài, góc (hình 5-35) ta được:

$$N_1 = N_2 = \sqrt{13}; D_1 = 3; D_2 = 7; \beta_1 = \beta_2 = 0; \alpha_1 = -\alpha_2 = \tan^{-1} \sqrt{12} = 73,9^\circ$$

$$\mathbf{H}_1(1) = 0,4 \frac{\sqrt{13}\sqrt{13}}{3.7} \angle 0^\circ - 0^\circ = 0,248$$



Hình 5-35

Kết quả cho thấy, trong miền thời gian, $i(t) = 0,248v(t)$, như vậy cả điện áp và dòng điện đều có giá trị vô cùng lớn nếu kích thích là hàm e^{1t} . Trong phần lớn các trường hợp, σ cần phải có giá trị âm hoặc bằng không.

Phương pháp đồ thị đã xét ở trên tỏ ra không thích hợp khi phân tích hàm biến đổi mạch điện $\mathbf{H}(s)$ như một tỉ số. Hơn nữa, biểu thức được viết ở dạng hằng số k , từ các cực và zero của $\mathbf{H}(s)$ trong hệ trục tọa độ phức (giản đồ cực-zero).

5.4.5. Đáp ứng tự nhiên

Trong chương này chúng ta tập trung vào đáp ứng của mạch điện trong trường hợp cưỡng bức hoặc khi ở trạng thái ổn định, và xác định chúng trong miền tần số là phương pháp hữu hiệu nhất. Tuy nhiên, đáp ứng tự nhiên rất dễ dàng xác định, chúng là các cực của hàm biến đổi mạch điện.

Ví dụ 5–27: Mạch điện như trong ví dụ 5–25 được vẽ trong hình 5–36, xác định đáp ứng tự nhiên khi nguồn $V(s)$ được chèn vào giữa hai điểm $x-x'$.

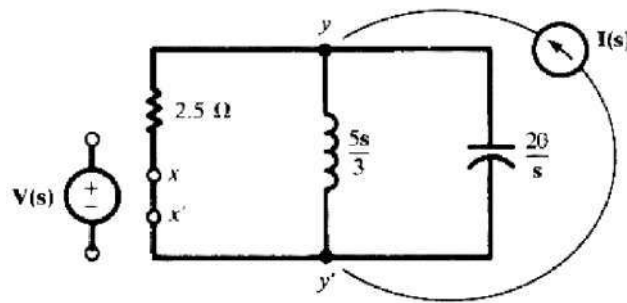
Mạch tương tự như ví dụ 5–25, do đó:

$$\mathbf{H}(s) = 0,4 \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

Tần số tự nhiên là -2 Np/s và -6 Np/s, do đó trong miền thời gian, dòng điện tự nhiên hoặc quá độ được xác định theo dạng sau:

$$i_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

Trong đó các hằng số A_1 và A_2 được xác định từ áp dụng điều kiện đầu để có đáp ứng, $i = i_n + i_f$ với i_f là đáp ứng cưỡng bức.



Hình 5–36

Ví dụ 5–28: Mạch điện trong hình 5–36 được cấp dòng điện $I(s)$ giữa hai điểm $y-y'$ trong hình 5–36. Tìm biểu thức $V(s)$ tại hai cực $x-x'$

Hàm biến đổi mạch $H(s)$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{I}(s)} = \mathbf{Z}(s)$$

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{1}{\frac{1}{2,5} + \frac{3}{5s} + \frac{s}{20}} = \frac{20s}{s^2 + 8s + 12} = \frac{20s}{(s + 2)(s + 6)}$$

Các cực trong trường hợp này là -2 Np/s và -6 Np/s, kết quả tương tự ví dụ 5–27.

5.4.6. Biến đổi tỉ lệ biên độ và tần số

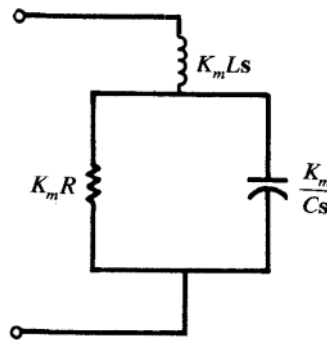
Biến đổi tỉ lệ biên độ

Nếu mạch điện có trở kháng vào là hàm $Z_{in}(s)$ và K_m là số thực dương. Khi đó nếu mỗi điện trở R trong mạch được thay thế bằng $K_m R$, mỗi điện cảm L được thay thế bằng $K_m L$ và mỗi điện dung C được thay thế bằng C/K_m , thì trở kháng vào mới sẽ là $K_m Z(s)$. Ta có thể phát biểu mạch đã được biến đổi biên độ theo hằng số tỉ lệ K_m .

Biến đổi tỉ lệ tần số

Nếu, thay nhưng biến đổi ở phần trên, giữ nguyên R , mỗi điện cảm L thay bằng L/K_f ($K_f > 0$), mỗi điện dung C thay bằng C/K_f , trở kháng vào mới của mạch sẽ là $Z_{in}(s/K_f)$. Như vậy mạch điện mới có trở kháng đầu vào với tần số s/K_f đúng bằng mạch cũ nhưng tần số s . Ta có thể phát biểu tần số của mạch biến đổi theo hệ số tỉ lệ K_f .

Ví dụ: Hãy biểu diễn $Z(s)$ cho mạch điện hình 5–37 và áp dụng biến đổi tỉ lệ biên độ.



Hình 5–37

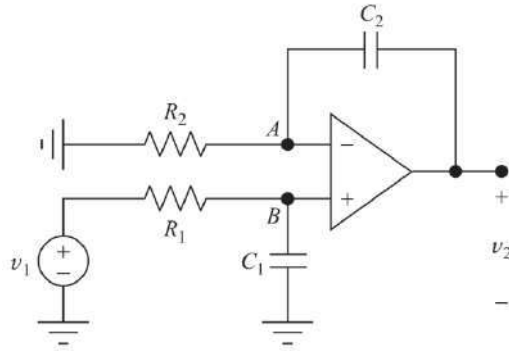
Trở kháng vào:

$$Z(s) = K_m L s + \frac{(K_m R) \frac{K_m}{C s}}{K_m R + \frac{K_m}{C s}} = K_m \left[L s + \frac{R(1/Cs)}{R + (1/Cs)} \right]$$

5.4.7. Mạch bậc cao có nguồn

Phân tích một số mạch ứng dụng trong thực tế, có chứa những phần tử như khuếch đại và một vài phần tử lưu trữ năng lượng, thường dẫn đến vài phương trình vi phân bậc một, có thể giải đồng thời như hệ phương trình vi phân, hoặc đưa về dạng phương trình vi phân bậc cao của đầu vào và đầu ra. Một công cụ thuận tiện thường dùng là sử dụng tần số phức cho các phương trình này (thường trở kháng cũng ở miền phức). Phương pháp này được minh họa trong một số ví dụ dưới đây.

Ví dụ: Xác định hàm $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V_2 / V_1}$ cho mạch điện ở hình 5–38 và chứng minh mạch điện tích phân không đảo nếu như $R_1C_1 = R_2C_2$.



Hình 5–38

Áp dụng phân áp trong miền phức đối với cực đầu vào và cực hồi tiếp của khuếch đại

$$\text{Cực A: } V_A = \frac{1}{1 + R_1C_1s} V_1$$

$$\text{Cực B: } V_B = \frac{R_2C_2s}{1 + R_2C_2s} V_2$$

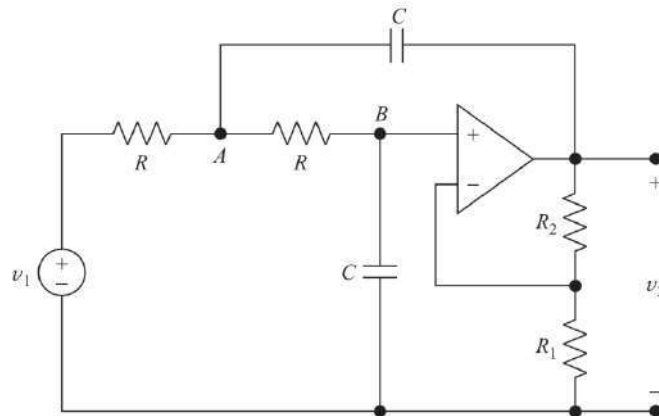
Do OA lý tưởng nên $v_A = v_B$

$$\frac{1}{1 + R_1C_1s} V_1 = \frac{R_2C_2s}{1 + R_2C_2s} V_2 \quad \rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + R_2C_2s}{(1 + R_1C_1s)R_2C_2s}$$

Chỉ với $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$, ta có

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{RCs} \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt$$

Ví dụ: Mạch điện trong hình 5–39 được gọi là mạch Sallen–Key. Xác định $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V_2 / V_1}$ và biến đổi thành phương trình vi phân.



Hình 5–39

Viết phương trình định luật Kirchhoff về dòng cho nút A và B:

$$\frac{V_A - V_1}{R} + \frac{V_A - V_B}{R} + (V_A - V_2)Cs = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{R} + V_B Cs = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = V_B(1 + RCs)$$

Đặt $1 + R_2/R_1 = k$, khi đó $V_2 = kV_B \rightarrow V_B = V_2/k$; $V_A = V_2(1 + RCs)/k$

Thay vào hai phương trình định luật Kirchhoff về dòng, khử V_A và V_B :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k}{R^2 C^2 s^2 + (3 - k)RCs + 1}$$

Phương trình vi phân:

$$V_2(R^2 C^2 s^2 + (3 - k)RCs + 1) = V_1 k$$

$$\rightarrow R^2 C^2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (3 - k)RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = k v_1$$

Ví dụ: Mạch điện có sơ đồ trong hình 5-39, giả thiết $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ và $R_2 = R_1$. Hãy xác định v_2 nếu $v_1 = u(t)$.

Thay các giá trị của các phần tử trong biểu thức $H(s)$, ta có:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k}{R^2 C^2 s^2 + (3 - k)RCs + 1} = \frac{2}{4 \cdot 10^{-10} s^2 + 2 \cdot 10^{-5} s + 1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{5 \cdot 10^9}{s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 25 \cdot 10^8}$$

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 5 \cdot 10^4 \frac{dv_2}{dt} + 25 \cdot 10^8 v_2 = 5 \cdot 10^9 v_1$$

Đáp ứng của phương trình trên khi $t > 0$ với kích thích $v_1 = u(t)$

$$v_2 = 2 + e^{-\alpha t} (2 \cos \omega t - 2,31 \sin \omega t)$$

$$v_2 = 2 + 3,055 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + 130,9^\circ)$$

Trong đó: $\alpha = 25000$ và $\omega = 21651 \text{ rad/s}$

Ví dụ: Hãy tìm điều kiện để mạch trong hình 5-39 để đạt được trạng thái dao động của $v_2(t)$ với tín hiệu vào bằng không và tìm tần số dao động.

Từ biểu thức:
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k}{R^2 C^2 s^2 + (3 - k)RCs + 1}$$

Để có được trạng thái dao động, các nghiệm của phương trình đặc trưng phải là số ảo, điều này có được khi:

$$k = 3 \rightarrow R_2 = 2R_1$$

$$\omega = 1/RC$$

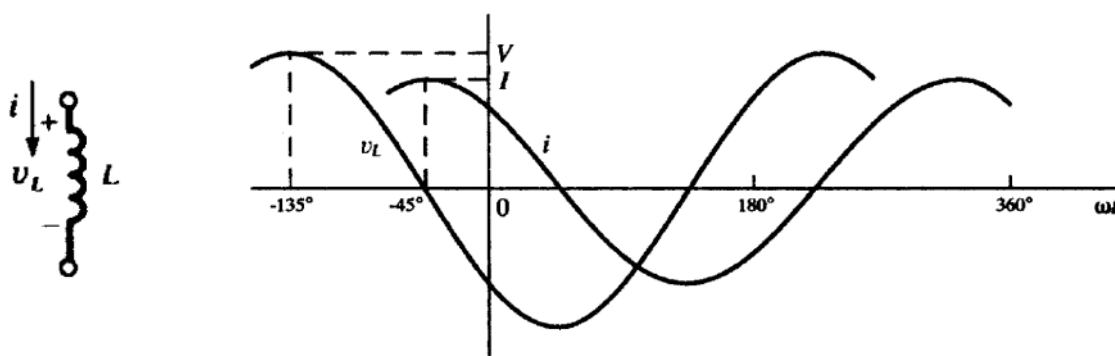
Chương 6: Mạch điện xoay chiều

6.1. Phân tích mạch xoay chiều ở trạng thái ổn định (điều hòa)

Phần này đề cập đến trạng thái ổn định (điều hòa) của mạch điện xoay chiều có nguồn biến thiên theo hàm sin. Đáp ứng của mạch (dòng điện) trong trường hợp này cũng là hàm sin. Đối với mạch tuyến tính, chấp nhận giả thiết nếu nguồn chu kỳ dạng không sin thì vẫn có thể phân tích thành tổ hợp tương đương của các hàm sin (dãy Fourier)

6.1.1. Đáp ứng của các phần tử

Điện áp và dòng điện là các hàm sin hoặc cos với đối số ωt , trong đó ω là tần số của dòng, áp đơn vị rad/s hoặc được dùng nhiều hơn hertz (Hz). Phần này ta xét quan hệ giữa dòng điện và điện áp xoay chiều.



Hình 6-1

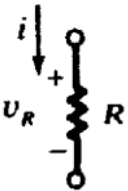
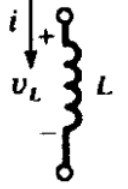
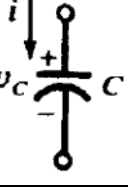
Xét điện cảm L có dòng điện $i = I \cos(\omega t + 45^\circ)$ như trong hình 6-1, khi đó điện áp trên điện cảm:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI [-\sin(\omega t + 45^\circ)] = \omega LI \cos(\omega t + 135^\circ)$$

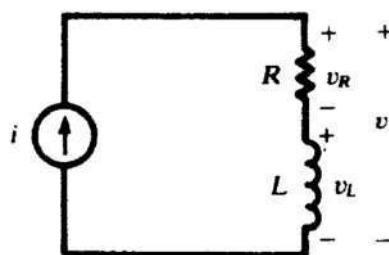
So sánh điện áp và dòng điện trên điện cảm, ta thấy dòng điện chậm hơn điện áp 90° hoặc $\pi/2$ rad. Đồ thị dòng, áp trên hình 6-1b. Trên đồ thị ta thấy hàm dòng điện bên phải hàm điện áp, và dịch theo trục hoành ωt , như vậy chậm về thời gian. Hiện tượng này được gọi là dòng điện chậm pha so với điện áp. Dịch chuyển theo trục hoành được tính theo radian, nhưng đôi khi cũng được biểu diễn ở độ ($135^\circ, 180^\circ \dots$). Trong trường hợp này đơn vị dịch chuyển là hỗn hợp như trong ví dụ $\omega t + 45^\circ$. Điều này không hoàn toàn đúng về mặt toán học nhưng được áp dụng trong thực tế phân tích mạch. Theo thực tế là hai đại lượng khác nhau (dòng và áp) nên áo thể dùng hai tỉ lệ xích khác nhau.

Khi xét phác họa đồ thị, các hàm sin hoàn toàn xác định khi biết biên độ (V hoặc I), tần số (ω hoặc f) và góc pha (45° hoặc 135°). Trong bảng 6–1 là đáp ứng của ba phần tử cơ bản trong mạch điện khi biểu diễn dòng điện $i = I \cos \omega t$ và điện áp $v = V \cos \omega t$. Nếu như đồ thị dạng sóng cho biết đáp ứng của phần tử, đối với điện trở, điện áp v và dòng điện i trùng pha. Đối với điện cảm L dòng điện i chậm pha hơn điện áp v góc 90° hoặc $\pi/2$ rad. Còn đối với điện dung C, dòng điện i sớm pha hơn điện áp v góc 90° hoặc $\pi/2$ rad.

Bảng 6–1: Đáp ứng của ba phần tử cơ bản

	$i = I \cos \omega t$	$v = V \cos \omega t$
	$v_R = RI \cos \omega t$	$i_R = \frac{V}{R} \cos \omega t$
	$v_L = \omega LI \cos(\omega t + 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ)$
	$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - 90^\circ)$	$i_C = \omega CV \cos(\omega t + 90^\circ)$

Ví dụ 6–1: Mạch RL nối tiếp trong hình 6–2 có dòng điện $i = I \sin \omega t$. Xác định điện áp trên các phần tử của mạch và vẽ đồ thị điện áp, dòng điện.



Hình 6–2

Điện áp trên các phần tử:

$$v_R = RI \sin \omega t ; v_L = \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Điện áp cả mạch:

$$v = v_R + v_L = RI \sin \omega t + \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Do dòng điện là hàm sin, nên điện áp:

$$\begin{aligned} v &= V \sin(\omega t + \theta) \\ &= V \sin \omega t \cos \theta + V \cos \omega t \sin \theta \end{aligned} \quad (6-1)$$

Nhưng theo biểu thức điện áp của mạch:

$$\begin{aligned} v &= RI \sin \omega t + \omega LI \sin \omega t \cos 90^\circ + \omega LI \cos \omega t \sin 90^\circ \\ v &= RI \sin \omega t + \omega LI \cos \omega t \end{aligned} \quad (6-2)$$

Kết hợp 2 phương trình (6-1) và (6-2) ta có:

$$V \cos \theta = RI \quad \text{và} \quad V \sin \theta = \omega LI$$

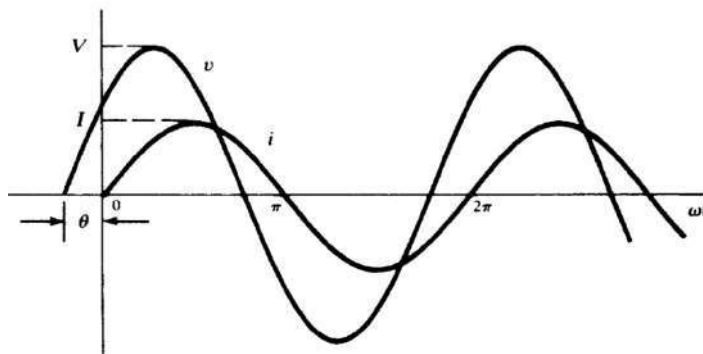
$$\text{Khi đó : } v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin[\omega t + \arctan(\omega L / R)]$$

$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\theta = \arctan(\omega L / R)$$

Dạng sóng của hàm i và v được vẽ trên hình 6-3. Góc θ là góc chậm pha của dòng điện so với điện áp, nằm trong khoảng $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, các giá trị giới hạn đạt được tương ứng khi $\omega L \ll R$ và $\omega L \gg R$. Nếu mạch điện được cấp nguồn áp $v = V \sin \omega t$ thì dòng điện trong mạch bằng:

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \theta) \quad \text{với } \theta = \arctan(\omega L / R)$$



Hình 6-3

Ví dụ 6-2: Nếu mạch RC nối tiếp được cấp dòng điện $i = I \sin \omega t$, hãy xác định điện áp trên hai phần tử.

$$v_R = RI \sin \omega t; \quad v_C = \frac{I}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$$

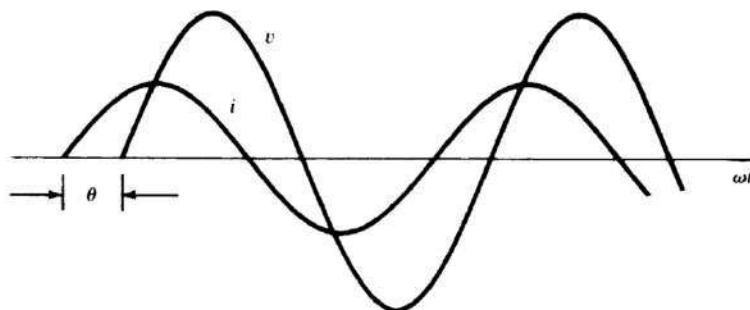
Điện áp trên mạch

$$v = v_R + v_C = V \sin(\omega t - \theta)$$

$$\text{Trong đó: } V = I \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$$

$$\theta = \arctan(1/\omega CR)$$

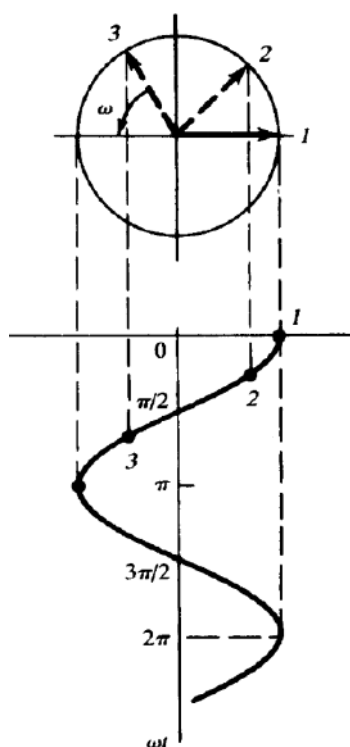
Góc pha âm dịch đồ thị điện áp sang bên phải dòng điện. Tương ứng dòng điện sớm pha hơn so với điện áp đối với mạch RC nối tiếp. Góc lệch pha nằm trong khoảng $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Đối với $1/\omega C \ll R$ góc lệch pha $\theta = 0^\circ$. Đối với $1/\omega C \gg R$, góc lệch pha $\theta = 90^\circ$, xem hình 6-4.



Hình 6-4

6.1.2. Véc tơ biểu diễn đại lượng sin

Nếu quan sát biểu thức hàm sin của dòng điện và điện áp trong các ví dụ phân trên, ta thấy biên độ và góc pha của hàm sin có các qui luật khác nhau. Một đoạn thẳng có hướng (véc tơ) quay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ không đổi ω (rad/s) trong hình 6-5, có hình chiếu lên phương ngang với độ dài bằng giá trị hàm cos. Độ lớn của véc tơ hoặc biên độ là giá trị cực đại của hàm cos. Góc giữa hai vị trí véc tơ là góc pha khác biệt tương ứng giữa hai điểm của hàm cos.



Hình 6-5

Véc tơ biểu diễn đại lượng sin trong giáo trình được dùng với hàm cosin. Nếu dòng và áp được biểu diễn theo hàm sin cần trừ góc pha đi một góc 90° . Các ví dụ tương ứng chuyển đổi hàm sin $\rightarrow$ cos được trình bày trong bảng 6–2. Ta thấy các véc tơ biểu diễn tín hiệu sin là các đoạn thẳng có hướng được kí hiệu bằng chữ cái in hoa (ví dụ **V**, **I**). Véc tơ biểu diễn tín hiệu sin là vị trí tức thời của véc tơ quay ngược chiều kim đồng hồ tại thời điểm $t = 0$. Đại lượng tần số f (Hz) và ω (rad/s) thường không xuất hiện trong giản đồ véc tơ, tuy nhiên cần nhớ đến chúng khi tính toán các đại lượng sin.

Bảng 6–2:

Hàm tín hiệu	Biểu diễn véc tơ
$v = 150 \cos(500t + 45^\circ)$ $i = 3 \sin(2000t + 30^\circ)$ $i = 3 \cos(2000t - 60^\circ)$	

Ví dụ 6–3: Mạch RL nối tiếp có $R = 10\Omega$ và $L = 20 \text{ mH}$ có dòng điện $i = 5 \cos(500t + 10^\circ) \text{ A}$. Xác định điện áp v và **V**, dòng điện **I**, véc tơ biểu diễn và đồ thị véc tơ.

Sử dụng phương pháp trong ví dụ 6–1

$$v_R = 50 \cos(500t + 10^\circ);$$

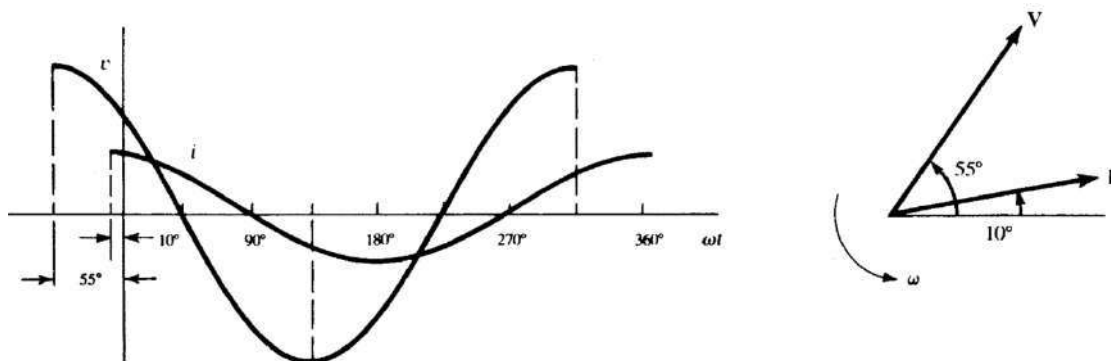
$$v_L = L \frac{di}{dt} = 50 \cos(500t + 100^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = 70,7 \cos(500t + 55^\circ)$$

Véc tơ biểu diễn đại lượng tương ứng

$$\mathbf{I} = 5 \angle 10^\circ \text{ A} \quad \text{và} \quad \mathbf{V} = 70,7 \angle 55^\circ \text{ V}$$

Góc 45° có thể thấy được trong đồ thị ở miền thời gian và đồ thị véc tơ của dòng điện và điện áp trong hình 6–6.



Hình 6-6

Véc tơ biểu diễn dòng, áp có thể ở dạng số phức. Nếu thay trục hoành bằng trục số thực và trục tung bằng trục số ảo trong hệ trục tọa độ phức, véc tơ biểu diễn có thể được viết bằng các chữ số và tuân theo các qui luật về số phức. Theo công thức Euler, có ba dạng tương đương của số phức cho véc tơ biểu diễn đại lượng sin.

Dạng góc $\mathbf{V} = V \angle \theta^\circ$

Dạng đại số $\mathbf{V} = V(\cos \theta^\circ + j \sin \theta^\circ)$

Dạng số mũ $\mathbf{V} = V e^{j\theta^\circ}$

Hàm cosin có thể được viết theo dạng sau:

$$v = V \cos(\omega t + \theta^\circ) = \text{Re}[V e^{j(\omega t + \theta^\circ)}] = \text{Re}[\mathbf{V} e^{j\omega t}]$$

Nhân, chia đối với véc tơ biểu diễn thực hiện ở dạng số mũ:

$$(V_1 e^{j\theta_1})(V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1 V_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\rightarrow (V_1 \angle \theta_1)(V_2 \angle \theta_2) = (V_1 V_2) \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$(V_1 e^{j\theta_1}) / (V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1 / V_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rightarrow (V_1 \angle \theta_1) / (V_2 \angle \theta_2) = (V_1 / V_2) \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Cộng, trừ véc tơ biểu diễn thực hiện ở dạng đại số

Ví dụ 6-4: Cho hai véc tơ biểu diễn điện áp $\mathbf{V}_1 = 25 \angle 143,13^\circ$ và $\mathbf{V}_2 = 11,2 \angle 26,57^\circ$ hãy tính tỉ số và các điện áp

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{25 \angle 143,13^\circ}{11,2 \angle 26,57^\circ} = 2,23 \angle 116,56^\circ = -1,0 + j1,99$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (-20 + j15) + (10 + j5) = -10 + j20 = 23,36 \angle 116,57^\circ$$

6.1.3. Trở kháng và dẫn nạp

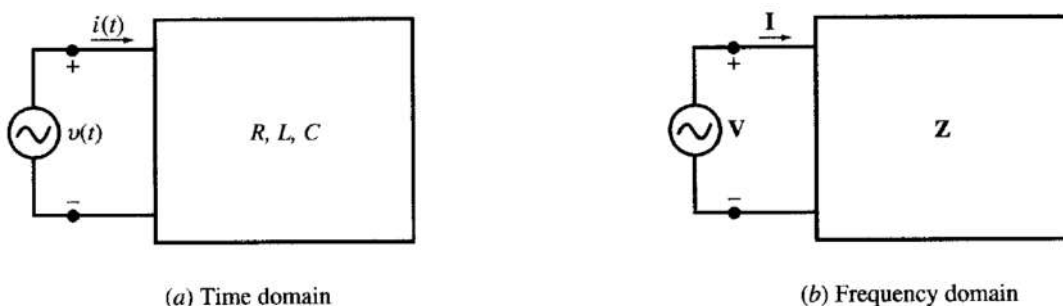
Nguồn điện áp hoặc dòng điện xoay chiều sin cấp cho mạch thụ động RLC sẽ có đáp ứng ở dạng hàm sin. Nếu các hàm có đối số là thời gian, như $v(t)$

và $i(t)$, mạch điện hi đó trong miền thời gian (hình 6–7a), nếu phân tích mạch sử dụng véc tơ phức được gọi trong miền tần số (hình 6–7b). Điện áp và dòng điện được viết tương ứng theo các biểu thức:

$$v(t) = V \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}[\mathbf{V}e^{j\omega t}] \quad \mathbf{V} = V\angle\theta$$

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[\mathbf{I}e^{j\omega t}] \quad \mathbf{I} = I\angle\varphi$$

Tỉ số giữa véc tơ điện áp phức $\mathbf{V}$ và dòng điện phức $\mathbf{I}$ được định nghĩa là trở kháng $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{V} / \mathbf{I}$. Đại lượng nghịch đảo của trở kháng được gọi là dẫn nạp $\mathbf{Y}$, như vậy $\mathbf{Y} = 1 / \mathbf{Z}$ (S), trong đó $S = 1\Omega^{-1} = 1\text{U}$ (mho). Các đại lượng $\mathbf{Z}$ và $\mathbf{Y}$ là các số phức.



Hình 6–7

Khi trở kháng được viết ở dạng đề các phần thực là điện trở R và phần ảo là điện kháng X . Dấu của phần ảo có thể dương hoặc âm, nếu dấu dương, X được gọi là cảm kháng và nếu dấu âm X được gọi là dung kháng. Khi dẫn nạp được viết ở dạng đề các, phần thực được gọi là điện dẫn tác dụng G và phần ảo được gọi là điện dẫn phản kháng B . Nếu dấu dương của B là điện dẫn dung và dấu âm là điện dẫn cảm.

$$\mathbf{Z} = R + jX_L \quad \mathbf{Z} = R - jX_C$$

$$\mathbf{Y} = G - jB_L \quad \mathbf{Y} = G + jB_C$$

Quan hệ giữa hai đại lượng theo biểu thức $\mathbf{Z} = 1 / \mathbf{Y}$, đó đó qui đổi giữa các đại lượng có thể tính theo những biểu thức sau:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Các biểu thức qui đổi nhiều khi không cần dùng đến do khối lượng tính toán nhiều, bên cạnh đó ta có thể phối hợp các cách tính toán đại lượng phức khác nhau để đơn giản hóa, ví dụ: trong mạch hình 6–7b, các đại lượng dòng áp $\mathbf{I} = 5\angle 15^\circ$ và $\mathbf{V} = 100\angle 45^\circ$, khi đó trở kháng và dẫn nạp của mạch RLC:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{100\angle 45^\circ}{5\angle 15^\circ} = 20\angle 30^\circ = 17,3 + j10 \, \Omega$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{5\angle 15^\circ}{100\angle 45^\circ} = 0,05\angle -30^\circ = (4,33 - j2,5)10^{-2} \, \text{S}$$

Từ đó suy ra: $R = 17,3\Omega$; $X_L = 10\Omega$; $G = 4,33 \cdot 10^{-2}\text{S}$ và $B_L = 2,5 \cdot 10^{-2}\text{S}$

Phối hợp các trở kháng

Biểu thức quan hệ $\mathbf{V} = \mathbf{I} \mathbf{Z}$ (trong miền tần số) chính là định luật ôm $v(t)=i.R$ đối với mạch điện trở (trong miền thời gian). Do đó phối hợp các trở kháng hoàn toàn tương tự như phối hợp các điện trở:

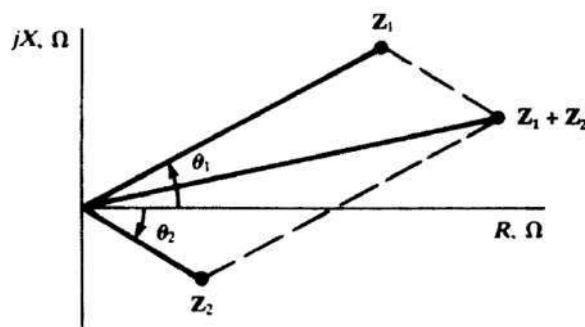
Trở kháng nối tiếp: $\mathbf{Z}_{td} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots$

Trở kháng song song: $\frac{1}{\mathbf{Z}_{td}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots$

Trường hợp đặc biệt có hai trở kháng song song: $\mathbf{Z}_{td} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$

Đồ thị véc tơ trở kháng

Trong đồ thị véc tơ, trở kháng được biểu diễn bằng một điểm nửa bên phải hệ trục tọa độ phức. Hình 6–8, mô tả hai trở kháng: $\mathbf{Z}_1$ ở góc phần tư thứ nhất, là trở kháng cảm và $\mathbf{Z}_2$ ở góc phần tư thứ bốn, là trở kháng dung. Trở kháng tương đương của chúng khi nối tiếp xác định bằng cách cộng các véc tơ. Lưu ý, “véc tơ” trong trường hợp này không có ký hiệu mũi tên trên đầu để phân biệt số phức từ véc tơ biểu diễn đại lượng sin.



Hình 6–8

Phối hợp các dẫn nạp

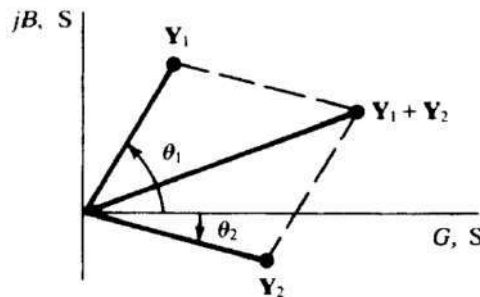
Nếu thay $\mathbf{Z}$ bằng $\mathbf{Y}$ vào các biểu thức trở kháng tương đương ta được:

Dẫn nạp nối tiếp: $\frac{1}{\mathbf{Y}_{td}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \dots$

Dẫn nạp song song: $\mathbf{Y}_{td} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots$

Đồ thị véc tơ dẫn nạp

Đồ thị véc tơ dẫn nạp trong hình 6–9, tương tự như đồ thị véc tơ trở kháng (hình 6–8). Điện dẫn dung Y_1 và điện dẫn cảm Y_2 được biểu diễn trong hệ tọa độ phức, và véc tơ tổng $Y_1 + Y_2$, là dẫn nạp tương đương của Y_1 và Y_2 song song.



Hình 6–9

Phân áp và phân dòng trong miền tần số

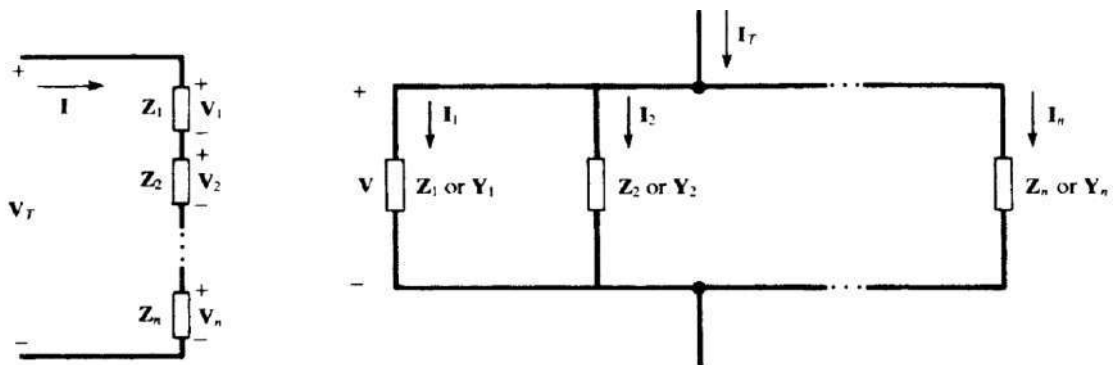
Trở kháng trong miền tần số và điện trở trong miền thời gian tương tự nhau nên phân áp và phân dòng trong miền tần số dựa trên phân áp và dòng trên các điện trở trong miền thời gian.

Các trở kháng nối tiếp sẽ phân chia điện áp theo tỉ lệ trở kháng:

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{Z_r}{Z_s} \quad \rightarrow \quad V_r = \frac{Z_r}{Z_{td}} V_T$$

Các trở kháng song song phân chia dòng điện theo tỉ lệ trở kháng:

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{Z_s}{Z_r} = \frac{Y_r}{Y_s} \quad \rightarrow \quad I_r = \frac{Z_{td}}{Z_r} I_T = \frac{Y_r}{Y_{td}} I_T$$



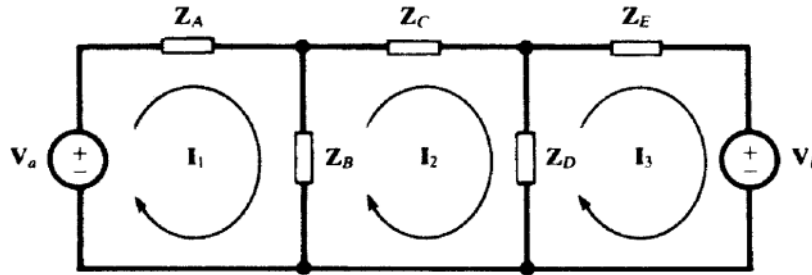
Hình 6–10

6.1.4. Phương pháp dòng mắt lưới

Xét mạch điện trong hình 6–11 ở miền tần số, áp dụng định luật Kirchhoff về áp hoặc ở dạng ma trận ta tìm được phương trình ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

Trong đó: Ẩn số là dòng mắt lưới $\mathbf{I}_1; \mathbf{I}_2; \mathbf{I}_3$. Trở kháng $\mathbf{Z}_{11} \equiv \mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B$, trở kháng riêng của vòng 1, bằng tổng các trở kháng mà dòng $\mathbf{I}_1$ đi qua. Tương tự, $\mathbf{Z}_{22} \equiv \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_D$ và $\mathbf{Z}_{33} \equiv \mathbf{Z}_D + \mathbf{Z}_E$ là trở kháng riêng của vòng 2 và 3.



Hình 6–11

Phần tử $\mathbf{Z}_{12}$ trong ma trận trở kháng được xác định theo:

$$\mathbf{Z}_{12} = \sum \pm (\text{các trở kháng chung của dòng } \mathbf{I}_1 \text{ và } \mathbf{I}_2)$$

Trong đó dấu (+) khi hai dòng mắt lưới trên trở kháng cùng chiều và dấu (–) khi hai dòng ngược chiều. Các phần tử đối xứng qua đường chéo chính của ma trận có cùng chung hai dòng mắt lưới do đó chúng bằng nhau, $\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{Z}_{12}$. Trong hình 6–11, hai dòng $\mathbf{I}_1$ và $\mathbf{I}_2$ có chung trở kháng $\mathbf{Z}_B$ và có chiều ngược nhau trên $\mathbf{Z}_B$, nên:

$$\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{Z}_{12} = -\mathbf{Z}_B$$

Tương tự:

$$\mathbf{Z}_{13} = \mathbf{Z}_{31} = \sum \pm (\text{các trở kháng chung của dòng } \mathbf{I}_1 \text{ và } \mathbf{I}_3) = 0$$

$$\mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32} = \sum \pm (\text{các trở kháng chung của dòng } \mathbf{I}_2 \text{ và } \mathbf{I}_3) = -\mathbf{Z}_D$$

Ma trận cột $\mathbf{V}$ về phải phương trình là các nguồn áp $\mathbf{V}_k$ ($k = 1, 2, 3$) được xác định bằng tổng các nguồn áp trong vòng.

$$\mathbf{V}_k = \sum \pm (\text{các nguồn áp trong vòng } k)$$

Dấu (+) trong biểu thức tương ứng với nguồn áp cùng chiều dòng điện $\mathbf{I}_k$, và dấu (–) khi ngược chiều.

Trong hình 6–11, ta có $\mathbf{V}_1 = +V_a$; $\mathbf{V}_2 = 0$; $\mathbf{V}_3 = -V_b$

Thay vì sử dụng khái niệm mắt lưới hoặc “cửa sổ” trong các mạch phẳng, đôi khi còn dùng khái niệm vòng, có thể bao gồm nhiều mắt lưới. Trong trường hợp đó dòng vòng có thể cùng chiều trên trở kháng này nhưng ngược chiều trên trở kháng khác. Tuy nhiên quy tắc lập ma trận $\mathbf{Z}$ và ma trận $\mathbf{V}$ vẫn giữ nguyên như đối với trường hợp mắt lưới.

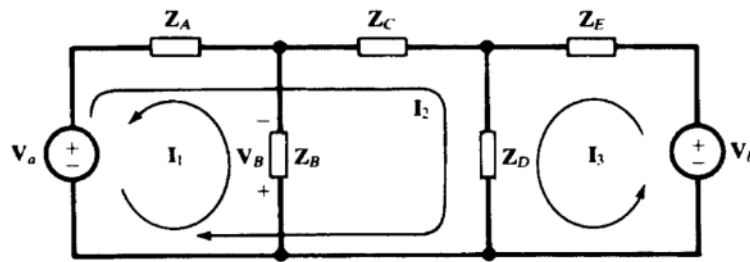
Ví dụ trong hình 6–12, nếu cần tính điện áp phức V_B trên Z_B với cực tính như trên hình. Trường hợp chọn mắt lưới như trong hình 6–11, sẽ phải tính cả dòng điện I_1 và I_2 mới có thể tìm được điện áp $V_B = (I_2 - I_1)Z_B$. Nhưng nếu chọn các vòng như trong hình 6–12 (hai trong ba vòng là mắt lưới) sao cho chỉ có dòng điện I_1 trên Z_B và chiều của I_1 để biểu thức tính $V_B = I_1 Z_B$. Xác định phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

Từ đây giải ra được:

$$V_B = Z_B I_1 = \frac{Z_B}{\Delta_z} \begin{bmatrix} -V_a & -Z_A & 0 \\ V_a & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ V_b & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix}$$

Trong đó Δ_z – định thức của ma trận Z .



Hình 6–12

Trở kháng vào và trở kháng biến đổi

Tương tự như đối với điện trở vào và điện trở chuyển đổi, ta có trở kháng vào và trở kháng chuyển đổi trong miền tần số. Như vậy đối với mạch đơn nguồn, trong hình 6–13, trở kháng vào được định nghĩa:

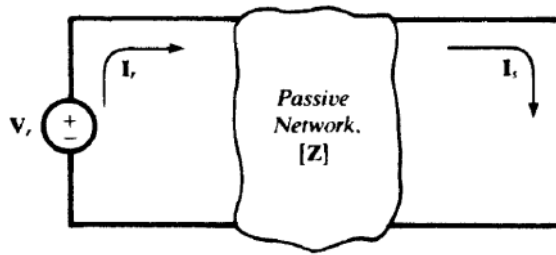
$$Z_{inputr} = \frac{V_r}{I_r} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{rr}}$$

Trong đó chỉ số rr là chỉ số của trở kháng Z_{rr} , trong ma trận trở kháng

Trở kháng chuyển đổi giữa mắt lưới (vòng) r và mắt lưới (vòng) s :

$$Z_{transferr} = \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{rs}}$$

Trong đó: Δ_{rs} định thức con trong định thức Δ_z



Hình 6-13

Tương tự dòng điện phức tại mắt lưới k của mạch n – mắt lưới được xác định theo biểu thức:

$$\mathbf{I}_k = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{transfer1k}} + \dots + \frac{\mathbf{V}_{k-1}}{\mathbf{Z}_{transferk-1k}} + \frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{Z}_{inputk}} + \frac{\mathbf{V}_{k+1}}{\mathbf{Z}_{transferk+1k}} + \dots + \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_{transfernk}}$$

6.1.5. Phương pháp điện thế nút

Đối với mạch trong miền tần số áp dụng tương phương pháp điện thế nút cho mạch điện trở chỉ thay thế dẫn nạp và nhích đảo điện trở. Tổng quát, trong miền tần số, mạch n nút cần phải lập n-1 phương trình điện thế nút, như vậy với n = 4, phương trình ma trận sẽ là:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

Trong đó: $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ – điện áp giữa nút (ẩn của phương trình) so với nút tham chiếu (qui ước có điện thế bằng không).

$\mathbf{Y}_{11}$ – dẫn nạp riêng của nút 1, bằng tổng các dẫn nạp của nhánh nối trực tiếp với nút đó. Tương tự $\mathbf{Y}_{22}$ và $\mathbf{Y}_{33}$ – dẫn nạp riêng của nút 2 và 3.

$\mathbf{Y}_{12}$ – dẫn nạp tương hỗ giữa nút 1 và nút 2, bằng tổng các dẫn nạp của nhánh nối giữa nút 1 và nút 2. Như vậy luôn có $\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21}$. Tương tự ta có $\mathbf{Y}_{13} = \mathbf{Y}_{31}$ và $\mathbf{Y}_{23} = \mathbf{Y}_{32}$.

Ma trận dẫn nạp $\mathbf{Y}$ là ma trận đối xứng qua đường chéo chính.

Vế phải của phương trình là ma trận cột nguồn dòng $\mathbf{I}$, trong đó những nguồn đi khỏi nút mang dấu âm:

$$\mathbf{I}_k = \sum (\text{nguồn dòng đến nút k})$$

Dẫn nạp vào và dẫn nạp chuyển đổi

Phương trình ma trận phương pháp điện thế nút

$$[\mathbf{Y}][\mathbf{V}] = [\mathbf{I}]$$

Có thể được suy ra từ phương trình ma trận phương pháp dòng mắt lưới

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{I}] = [\mathbf{V}]$$

Như vậy dẫn nạp vào và dẫn nạp chuyển đổi có thể xác định tương tự trở kháng:

$$\mathbf{Y}_{input,r} = \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

$$\mathbf{Y}_{transfer,rs} = \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_s} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rs}}$$

Trong đó bây giờ Δ_{rr} và Δ_{rs} là định thức con của định thức ma trận dẫn nạp Δ_Y . Trong thực tế các biểu thức này ít được sử dụng, tuy nhiên chúng hữu dụng khi tính theo nguyên lý xếp chồng (xác định điện áp)

$$\mathbf{V}_k = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{transfer1k}} + \dots + \frac{\mathbf{I}_{k-1}}{\mathbf{Y}_{transferk-1k}} + \frac{\mathbf{I}_k}{\mathbf{Y}_{inputk}} + \frac{\mathbf{I}_{k+1}}{\mathbf{Y}_{transferk+1k}} + \dots + \frac{\mathbf{I}_n}{\mathbf{Y}_{transfernk}}$$

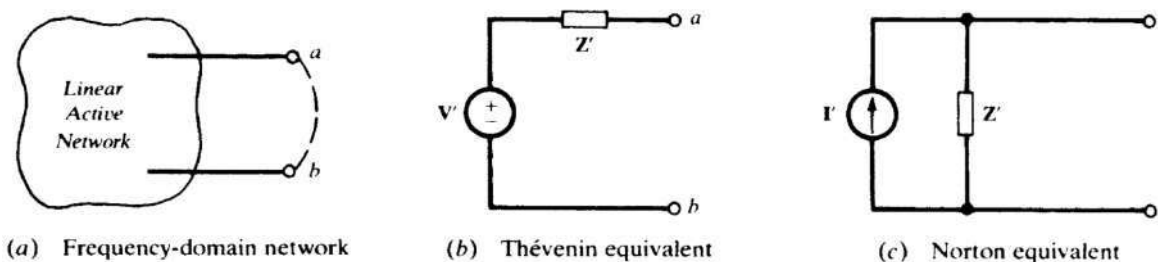
Với $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Phát biểu tổng quát: Điện áp tại nút (so với nút tham chiếu) được xác định bằng tổng các điện áp do các nguồn dòng gây nên, mỗi nguồn dòng tác động đơn lẻ đến mạch.

6.1.6. Các định lý mạch trong miền tần số

Định lý Thevenin và Norton

Hai định lý mạch hoàn toàn giống phát biểu trong chương 4 (mục 4.2.1) với điện áp hở mạch $\mathbf{V}'$, dòng điện ngắn mạch $\mathbf{I}'$ và điện trở tương đương khi loại bỏ nguồn $\mathbf{R}'$, chỉ với thay thế điện áp hở mạch phức $\mathbf{V}'$, dòng điện ngắn mạch $\mathbf{I}'$ và trở kháng tương đương triệt tiêu nguồn $\mathbf{Z}'$. Như trong hình 6–14.

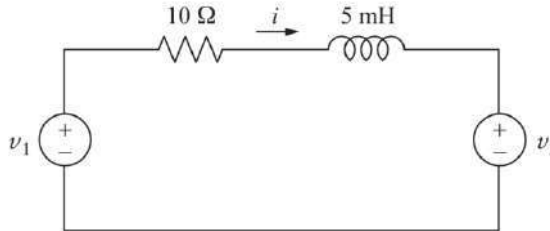


Hình 6–14

Xếp chồng các nguồn xoay chiều

Mạch điện gồm nhiều nguồn xoay chiều tác động có thể áp dụng một trong các cách phân tích sau: Nếu các nguồn xoay chiều có cùng tần số, nguyên tắc xếp chồng có thể áp dụng trong miền tần số. Trường hợp ngược lại, phân tích mạch trong miền thời gian và tổng hợp các đáp ứng của mạch điện đối với kích thích riêng rẽ từng nguồn.

Ví dụ: Một cuộn cảm được mắc nối tiếp giữa hai nguồn xoay chiều $v_1 = 5\cos\omega_1 t$ và $v_2 = 10\cos(\omega_2 t + 60^\circ)$ sao cho hai nguồn có chung nút gốc (hình 6–15). Chênh lệch điện áp giữa hai cực của cuộn cảm là $v_2 - v_1$. Cuộn cảm được thay thế tương đương bằng một điện cảm 5mH và điện trở 10Ω. Tìm dòng điện trong cuộn cảm trong các trường hợp sau: a) $\omega_1 = \omega_2 = 2000 \text{ rad/s}$ và b) $\omega_2 = 2\omega_1$ $\omega_1 = 2000 \text{ rad/s}$



Hình 6–15

a) Trở kháng của cuộn cảm là $R + j\omega L = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$

Điện áp phức trên hai cực của cuộn cảm

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 5 - 10\angle 60^\circ = -j5\sqrt{3} \text{ V}$$

Dòng điện cuộn cảm

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{-j5\sqrt{3}}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 0,61\angle -135^\circ$$

b) Trở kháng có hai tần số khác nhau $\omega_1 = 2000 \text{ rad/s}$ và $\omega_2 = 4000 \text{ rad/s}$, dòng điện chỉ có thể biểu diễn trong miền thời gian. Áp dụng nguyên tắc chồng, ta tìm được i_1 và i_2 tương ứng do các nguồn v_1 và v_2 kích thích riêng rẽ.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}} = \frac{5}{10 + j10} = 0,35\angle -45^\circ \quad i_1 = 0,35\cos(2000t - 45^\circ)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}} = \frac{10\angle 60^\circ}{10 + j20} = 0,45\angle -3,4^\circ \quad i_2 = 0,45\cos(4000t - 3,4^\circ)$$

$$i = i_1 - i_2 = 0,35\cos(2000t - 45^\circ) - 0,45\cos(4000t - 3,4^\circ)$$

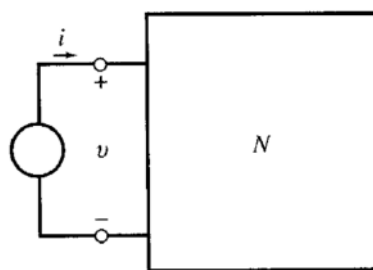
6.2. Nguồn điện xoay chiều một pha

6.2.1. Nguồn xoay chiều trong miền thời gian

Giá trị tức thời của công suất nguồn điện xoay chiều (trong hình 6–16) đi vào hai cực của mạch N được xác định theo biểu thức:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (6-3)$$

Trong đó: $v(t); i(t)$ – tương ứng là điện áp và dòng điện trên các cực. Nếu giá trị p dương, công suất truyền từ nguồn đến mạch và ngược lại nếu p âm công suất truyền từ mạch đến nguồn.



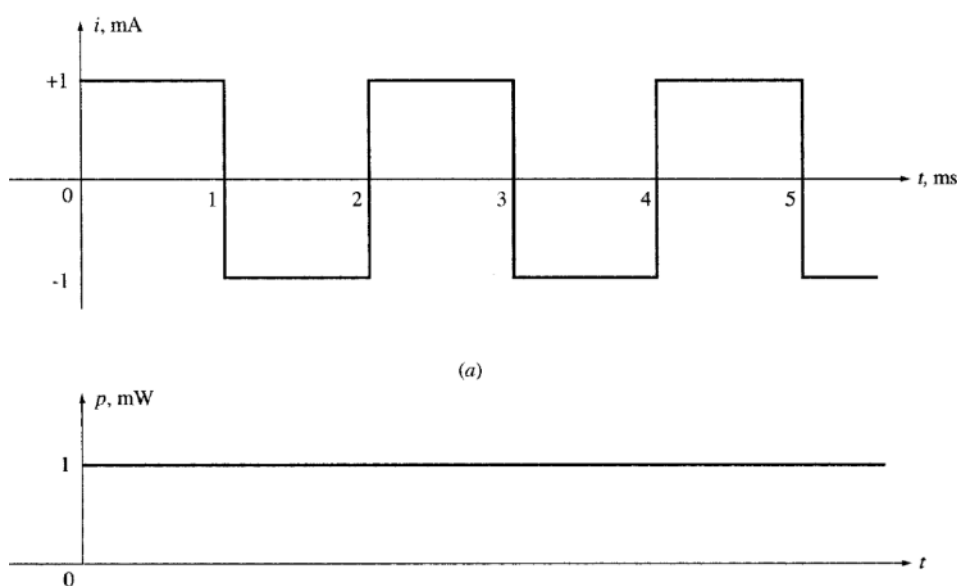
Hình 6–16

Trong phần này xem xét vấn đề dòng áp chu kỳ, đặc biệt là dạng sin, tổng trạng thái ổn định của mạch RLC tuyến tính. Do các phần tử có khả năng tích trữ năng lượng như điện cảm và điện dung có giá trị giới hạn, nên những phần tử này không thể tiếp tục nhận năng lượng mà không phải trả về nguồn. trong trạng thái ổn định, mỗi chu kỳ tất cả năng lượng tích lũy tại điện cảm và điện dung đều trả lại nguồn. Năng lượng hấp thụ trên điện trở sẽ biến đổi thành các dạng năng lượng khác như nhiệt năng, cơ năng, hóa năng hoặc từ trường. Dòng năng lượng đến mạch thụ động trong một chu kỳ có thể là dương hoặc bằng không.

Ví dụ: trong hình 6–17 dạng sóng của dòng điện trong điện trở $1k\Omega$. Hãy xác định và vẽ đồ thị công suất tức thời.

$$p = v.i = Ri^2 = 1000.10^{-6} = 10^{-3}W$$

Đồ thị công suất tức thời tại hình 6–16b.



Hình 6–16

Ví dụ: Dòng điện có dạng sóng trong hình 6–16a đi qua tụ điện $0,5 \mu\text{F}$. Hãy xác định công suất $p(t)$ đến tụ và năng lượng $w(t)$ tích lũy trên tụ. Giả thiết $v_C(0) = 0$, vẽ đồ thị $p(t)$ và $w(t)$

Dựa trên dạng sóng ta thấy, dòng điện trên tụ là hàm chu kỳ có tần số $T = 2\text{ms}$. Trong một chu kỳ dòng điện được xác định theo hàm

$$\begin{cases} 1\text{mA} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ -1\text{mA} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

Điện áp trên tụ cũng là hàm chu kỳ có cùng tần số $T = 2\text{ms}$. Trong một chu kỳ điện áp được tính theo:

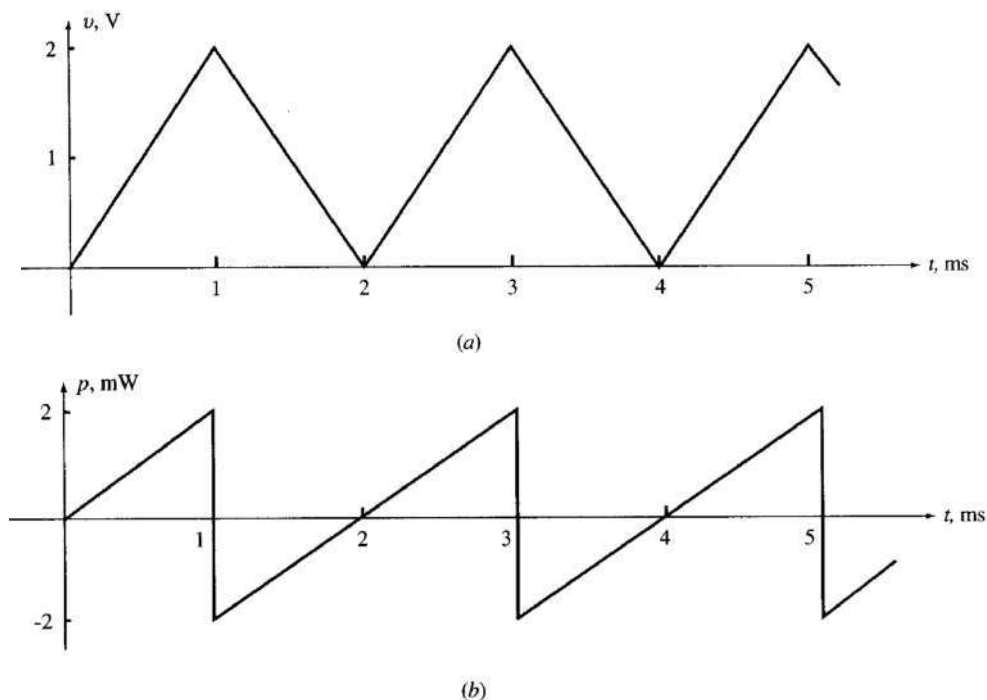
$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \begin{cases} 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 4 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

Công suất và điện năng trên tụ

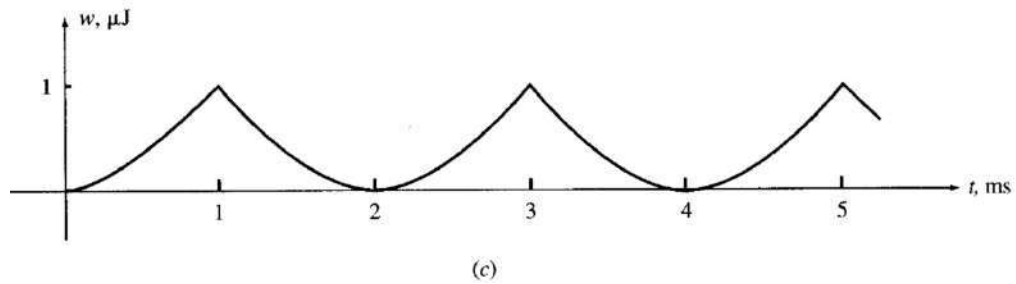
$$p = v \cdot i = \begin{cases} 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ 2000t - 4 \text{ (mW)} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2 = \begin{cases} t^2 \text{ (J)} & (0 < t < 1\text{ms}) \\ t^2 + 4 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-3} t \text{ (J)} & (1 < t < 2\text{ms}) \end{cases}$$

Bên cạnh đó, $w(t)$ có thể được tính theo tích phân của công suất $p(t)$. Công suất đến tụ điện trong một chu kỳ có giá trị âm và dương bằng nhau (hình 6–17b). Năng lượng tích trữ trong tụ điện luôn luôn dương như trong hình 6–17c. Năng lượng đạt giá trị lớn nhất $W_{\max} = 1 \mu\text{J}$, trong các thời điểm $t = 1, 3, 5 \dots \text{ms}$.



Hình 6–17



Hình 6-17

6.2.2. Công suất của đại lượng sin trong trạng thái ổn định

Nguồn áp sin $v = V_m \cos \omega t$ V cấp cho tải trở kháng $Z = |Z| \angle \theta$ tạo nên dòng điện $i = I_m \cos(\omega t - \theta)$. Công suất tức thời từ nguồn đến trở kháng là

$$p(t) = v \cdot i = V_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)]$$

$$p(t) = V_{eff} I_{eff} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)]$$

$$p(t) = V_{eff} I_{eff} \cos \theta + V_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t - \theta) \quad (6-4)$$

Trong đó: $V_{eff} = V_m / \sqrt{2}$, $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$, $I_{ef} = V_{eff} / |Z|$. Công suất tức thời trong biểu thức (6-2) gồm thành phần sin $V_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t - \theta)$, và thành phần không đổi $V_{eff} I_{eff} \cos \theta$ chính là công suất trung bình P_{avg} . Trong hình 6-18 đồ thị tức thời công suất và công suất trung bình. Trong một phần của chu kỳ công suất tức thời dương, khi đó công suất truyền từ nguồn đến tải. Trong phần còn lại của chu kỳ công suất có thể âm, lúc đó công suất truyền từ tải.

Ví dụ: nguồn áp sin $v = 140 \cos \omega t$ V được kết nối với tải trở kháng $Z = 5 \angle 60^\circ$. Hãy xác định $p(t)$.

Nguồn áp tạo nên dòng điện $v = 28 \cos(\omega t - 60^\circ)$ nên

$$p(t) = v \cdot i = 140 \cdot 28 \cdot \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - 60^\circ)$$

$$p(t) = 980 + 1960 \cos(2\omega t - 60^\circ) \text{ W}$$

Công suất tức thời gồm: thành phần hằng số 980W, và thành phần sin $1960 \cos(2\omega t - 60^\circ) \text{ W}$ có tần số gấp đôi tần số nguồn áp.

6.2.3. Công suất trung bình hoặc công suất tác dụng

Lượng bình quân công suất từ nguồn đến tải trong một chu kỳ được gọi là công suất trung bình $P_{avg} = \langle p(t) \rangle$. Giá trị trung bình của thành phần $\sin V_{eff} I_{eff} \cos(2\omega t - \theta)$ trong một chu kỳ bằng không nên từ biểu thức (6-4) ta có:

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \cos \theta \quad (6-5)$$

Nếu $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ khi đó $\cos \theta = \frac{R}{|Z|}$ và công suất trung bình có thể tính theo các biểu thức:

$$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \frac{R}{|Z|} \quad (6-6)$$

$$P_{avg} = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} R \quad (6-7)$$

$$P_{avg} = R I_{eff}^2 \quad (6-8)$$

Công suất trung bình không âm và phụ thuộc vào V, I và góc pha giữa chúng. Khi V_{eff} và I_{eff} đã biết, công suất P lớn nhất khi $\theta = 0$ (tải thuần trở). Đối với tải thuần cảm kháng $|\theta| = 90^\circ \rightarrow P_{avg} = 0$. Tỉ số giữa công suất trung bình và đại lượng $V_{eff} I_{eff}$ được gọi là hệ số công suất pf (power factor), từ biểu thức 6-5 ta thấy pf bằng $\cos \theta$:

$$pf = \frac{P_{avg}}{V_{eff} I_{eff}} \quad (0 \leq pf \leq 1) \quad (6-9)$$

Chỉ số dưới avg của kí hiệu công suất P_{avg} thường được bỏ và kí hiệu P được dùng cho công suất trung bình.

Ví dụ: Công suất P cấp từ nguồn áp sin với $V_{eff} = 110$ V cho một tải trở kháng $Z = 10 + j8$. Hãy xác định công suất P và hệ số công suất pf.

$$Z = 10 + j8 = 12,81 \angle 38,7^\circ$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{110}{12,81 \angle 38,7^\circ} = 8,59 \angle -38,7^\circ$$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta = 110 \cdot 8,59 \cdot \cos(38,7^\circ) = 737,43 \text{ W}$$

$$pf = \cos(38,7^\circ) = 0,78$$

Cách giải thay thế:

$$|Z|^2 = 100 + 64 = 164$$

$$P_{avg} = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} R = \frac{110}{164} 10 = 737,8 \text{ W}$$

Cách giải thay thế cho kết quả chính xác hơn (sử dụng ít phép tính)

6.2.4. Công suất phản kháng

Nếu mạch thụ động có chứa phần tử điện cảm, điện dung hoặc cả hai loại phần tử, phần công suất đến mạch trong chu kỳ được tích lũy và phát trả lại nguồn. Giai đoạn phát trả năng lượng về nguồn, công suất có giá trị âm. Công suất tham gia vào quá trình trao đổi được gọi là công suất phản kháng hoặc công suất góc vuông. Mặc dù công suất phản kháng có hiệu quả trên mạch điện bằng không nhưng trong công suất phản kháng làm giảm hiệu năng của mạch điện. Công suất phản kháng kí hiệu là Q và được định nghĩa:

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \theta \quad (6-10)$$

Nếu $Z = R + jX = |Z| \angle \theta$ khi đó $\sin \theta = X / |Z|$ và công suất phản kháng có thể tính theo các biểu thức:

$$Q = V_{eff} I_{eff} \frac{X}{|Z|} \quad (6-11)$$

$$Q = \frac{V_{eff}^2}{|Z|^2} X \quad (6-12)$$

$$Q = X I_{eff}^2 \quad (6-13)$$

Đơn vị của công suất phản kháng là VAr (volt–ampe reactive).

Công suất phản kháng Q phụ thuộc vào V , I và góc lệch pha giữa chúng. Q bằng không khi $\theta = 0^\circ$, điều này có được khi mạch thuần điện trở, dòng điện I và điện áp V trùng pha. Khi tải thuần phản kháng, $|\theta| = 90^\circ$ và Q đạt giá trị lớn nhất bằng tích của V và I . Lưu ý, công suất tác dụng P luôn dương, công suất phản kháng Q có thể dương (khi tải có tính điện cảm, dòng điện chậm pha so với điện áp) và âm (khi tải có tính điện dung, dòng điện sớm pha so với điện áp). Đây cũng là cách xác định công suất phản kháng dựa trên đặc tính của tải. Ví dụ 100 kVAr – điện cảm công suất nghĩa $Q = 100 \text{ kVAr}$, hoặc 100 kVAr – điện dung có nghĩa $Q = -100 \text{ kVAr}$.

Ví dụ: Điện áp và dòng điện trên tải có giá trị tương ứng là $V_{eff} = 110 \text{ V}$ và $I_{eff} = 20 \angle 50^\circ \text{ A}$

Công suất tác dụng: $P = 110.20.\cos 50^\circ = 1414 \text{ W}$

Công suất phản kháng: $Q = 110.20.\sin 50^\circ = 1685 \text{ Var}$

Bảng 6–3: Tổng hợp công suất nguồn xoay chiều trên tải R, L và C

$v = (V\sqrt{2})\cos\omega t \quad \mathbf{V}_{\text{eff}} = V\angle 0^\circ$ $P = VI\cos\theta; Q = VI\sin\theta; S = VI$							
	Z	i	I_{eff}	p(t)	P	Q	S
R	R	$\frac{V\sqrt{2}}{R}\cos\omega t$	$\frac{V}{R}\angle\theta^\circ$	$\frac{V^2}{R}(1 - \cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$
L	$j\omega L$	$\frac{V\sqrt{2}}{\omega L}\cos(\omega t - 90^\circ)$	$\frac{V}{\omega L}\angle -90^\circ$	$\frac{V^2}{\omega L}\sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{\omega L}$	$\frac{V^2}{\omega L}$
C	$\frac{-j}{\omega C}$	$V\sqrt{2}\omega C\cos(\omega t + 90^\circ)$	$V\omega C\angle 90^\circ$	$-V^2\omega C\sin 2\omega t$	0	$-V^2\omega C$	$-V^2\omega C$

Công suất trên điện trở

$$p_R(t) = v \cdot i_R = (V\sqrt{2})\cos\omega t (I\sqrt{2})\cos\omega t$$

$$p_R(t) = 2VI\cos^2\omega t = VI(1 + \cos 2\omega t)$$

$$p_R(t) = RI^2(1 + \cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t)$$

$$P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad Q = 0$$

Công suất tức thời của điện trở biến thiên theo hàm sin trong khoảng từ 0 đến $2RI^2$, với tần số gấp đôi kích thích và giá trị trung bình $P = RI^2$. Đồ thị $v(t)$ và $p_R(t)$ trên hình 6–18a.

Công suất trên điện cảm

$$p_L(t) = v \cdot i_L = V\sqrt{2}\cos\omega t \cdot I\sqrt{2}\cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$p_L(t) = 2VI\cos\omega t \sin\omega t = VI\sin 2\omega t$$

$$p_L(t) = \omega LI^2 \sin 2\omega t = \frac{V^2}{\omega L} \sin 2\omega t$$

$$P = 0 \quad Q = VI = \frac{V^2}{\omega L} = \omega LI^2$$

Công suất tức thời trên điện cảm biến thiên theo hàm sin từ $-Q$ đến Q với tần số gấp đôi tần số kích thích và giá trị trung bình trong một chu kỳ bằng không. Đồ thị trên hình 6–18b.

Công suất trên điện dung

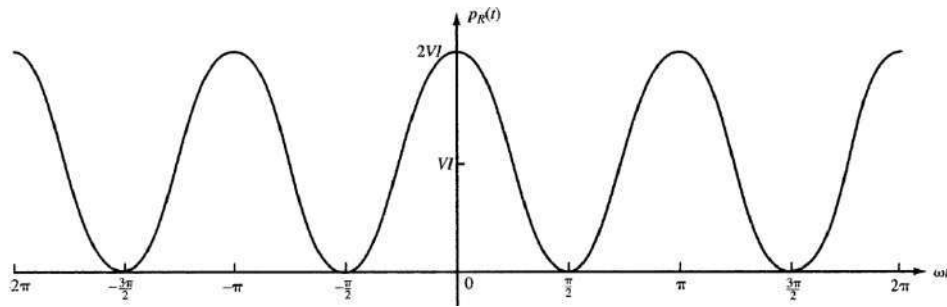
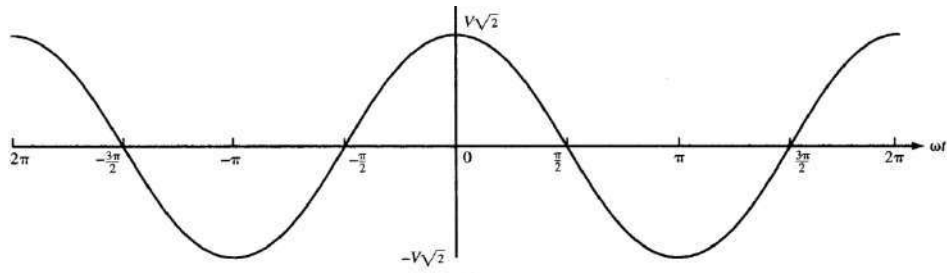
$$p_C(t) = v \cdot i_C = V\sqrt{2}\cos\omega t \cdot I\sqrt{2}\cos(\omega t + 90^\circ)$$

$$p_C(t) = -2VI \cos \omega t \sin \omega t = -VI \sin 2\omega t$$

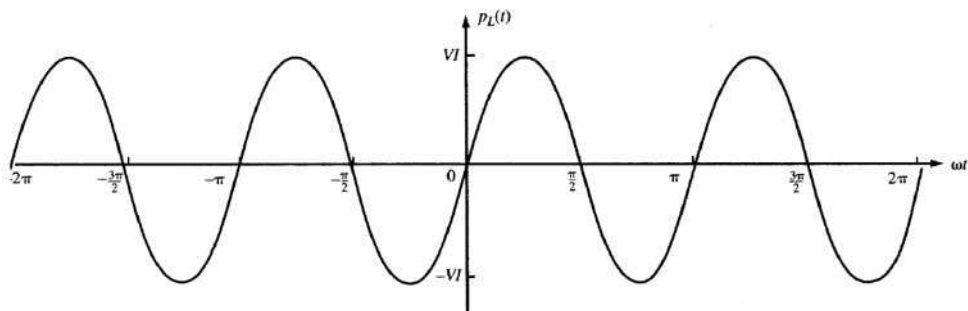
$$p_C(t) = -\frac{I^2}{\omega C} \sin 2\omega t = V^2 \omega C \sin 2\omega t$$

$$P = 0 \qquad Q = -VI = -V^2 \omega C = -\frac{I^2}{\omega C}$$

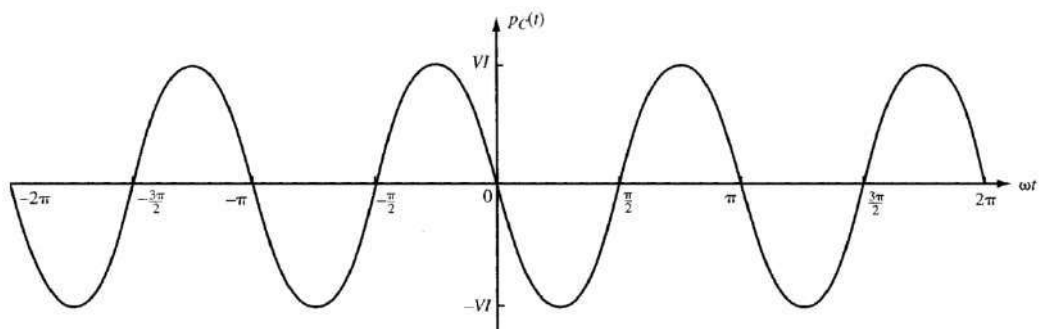
Tương tự như điện cảm, công suất tức thời của điện dung cũng biến thiên theo hàm sin từ $-Q$ đến Q , với tần số gấp đôi tần số kích thích và giá trị trung bình trong một chu kỳ bằng không. Đồ thị trên hình 6-18c.



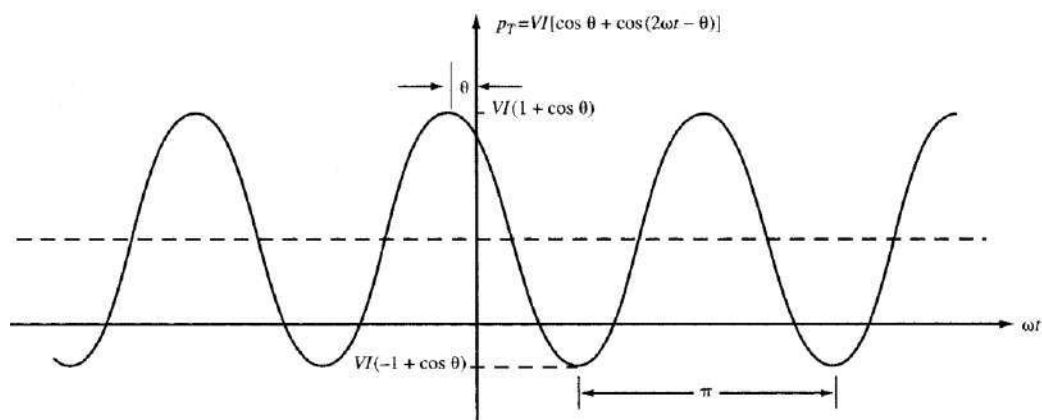
(a)



(b)



(c)



(d)

Hình 6-17

Trao đổi năng lượng giữa điện cảm và điện dung:

Điện cảm và điện dung được cấp nguồn áp như nhau khi mắc song song hoặc dòng điện như nhau khi mắc nối tiếp, công suất nhận ở tụ điện lệch pha 180° so với công suất nhận ở điện cảm. Điều này thể hiện rõ ràng thông qua dấu của công suất phản kháng Q đối với phần tử điện cảm và điện dung. Trong một số trường hợp điện cảm và điện dung trao đổi một phần công suất trực tiếp với nhau mà không thông qua nguồn xoay chiều. Đây là lý do giảm lượng công suất phản kháng cho mạch LC và tương ứng nâng hệ số công suất.

Xét mạch RLC mắc song song được cấp nguồn áp $v = V\sqrt{2}\cos\omega t$

Công suất trên mạch:

$$p_T(t) = v \cdot i = v(i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C \quad (6-14)$$

Thay các biểu thức công suất trên các phần tử RLC, ta có:

$$p_T(t) = \frac{V^2}{R}(1 + \cos 2\omega t) + V^2\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\sin 2\omega t$$

Công suất trung bình: $P_T = P_R = \frac{V^2}{R}$

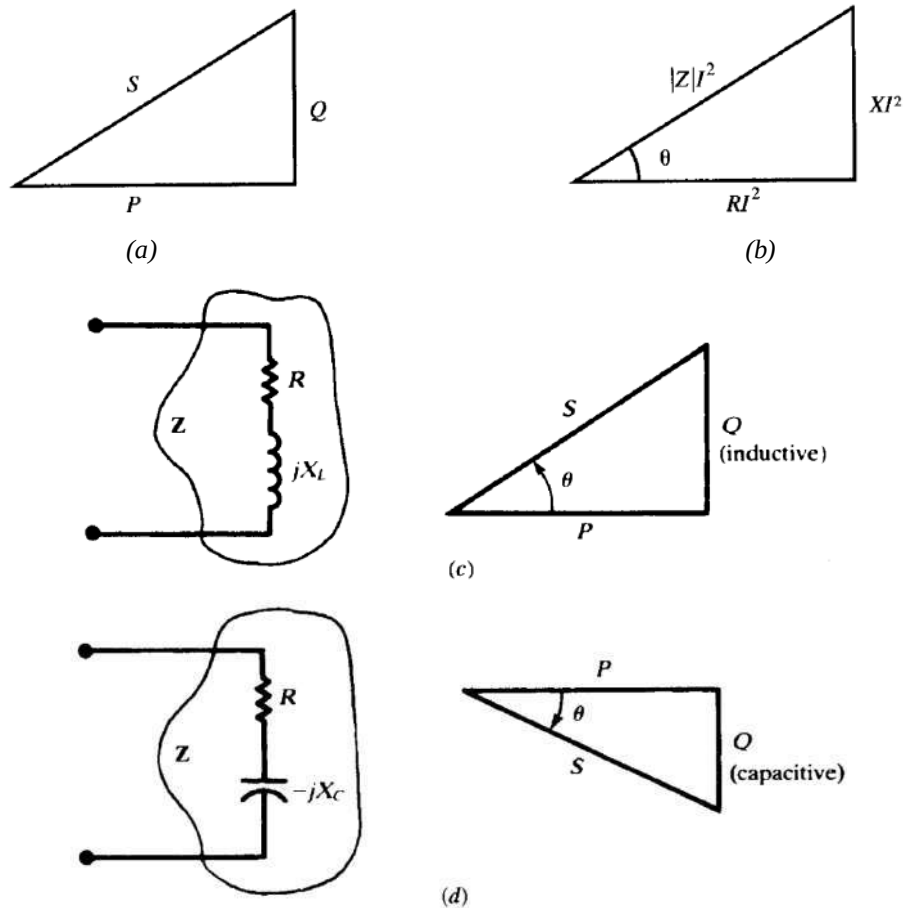
Công suất phản kháng: $Q_T = Q_L - Q_C = V^2\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\sin 2\omega t$

Nếu $1/\omega L = \omega C$, tổng công suất phản kháng bằng không. Đồ thị của $p_T(t)$ trên hình 6-17d.

6.2.5. Công suất phức, công suất biểu kiến và tam giác công suất

Hai thành phần P và Q có vai trò khác nhau và không thể cộng chúng lại với nhau, tuy nhiên có thể đặt cạnh nhau dưới dạng véc tơ và được gọi là công suất phức S . Công suất phức được định nghĩa $S = P + jQ$.

Độ lớn của công suất phức $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_{eff} I_{eff}$ gọi là công suất biểu kiến S và có đơn vị là VA (vôn – amper). Giá trị S , P , Q theo cùng tỉ lệ có thể đặt vào các cạnh của một tam giác vuông tương ứng tại cạnh huyền, cạnh nằm ngang và cạnh thẳng đứng (tam giác được gọi là tam giác công suất) như trong hình 6–18a. Tam giác công suất suy ra từ tam giác trở kháng với hệ số nhân I_{eff}^2 như trong hình 6–18b. Tam giác công suất cho tải điện cảm (hình 6–18c) và tải điện dung (hình 6–18d).



Hình 6–18

Để dàng có được $S = V_{eff} I_{eff}^*$, trong đó: V_{eff} – điện áp phức và I_{eff}^* – liên hợp phức của dòng điện. Tổng hợp các loại công suất:

$$\text{Công suất phức: } S = V_{eff} I_{eff}^* = P + jQ = I_{eff}^2 Z \quad (6-15)$$

$$\text{Công suất thực (tác dụng): } P = \text{Re}[S] = V_{eff} I_{eff} \cos \theta \quad (6-16)$$

$$\text{Công suất ảo (phản kháng): } Q = \text{Im}[S] = V_{eff} I_{eff} \sin \theta \quad (6-17)$$

$$\text{Công suất biểu kiến: } S = V_{eff} I_{eff} \quad (6-18)$$

Ví dụ: (a) Nguồn áp có giá trị hiệu dụng $V_{eff} = 10V$ nối với tải $Z_1 = 1+j$. Hãy xác định dòng điện i_1 , $I_{1,eff}$, $p_1(t)$, P_1 , Q_1 , hệ số công suất pf_1 và S_1 . (b) lặp

lại câu (a) thay tải $\mathbf{Z}_1$ bằng tải $\mathbf{Z}_2 = 1-jA$. (c) lặp lại câu (a) đối với tải $\mathbf{Z}_1$ và $\mathbf{Z}_2$ song song. Giá trị tức thời nguồn áp $v = 10\sqrt{2} \cos \omega t$

(a) Tải: $\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2} \angle 45^\circ$

Dòng điện: $i_1 = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$; $\mathbf{I}_{1,eff} = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$

Công suất: $p_1(t) = 100\sqrt{2} \cos \omega t \cos(\omega t - 45^\circ)$

$$p_1(t) = 50 + 50\sqrt{2} \cos(2\omega t - 45^\circ)$$

$$P_1 = V_{eff} I_{1,eff} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}; \quad Q_1 = V_{eff} I_{1,eff} \sin 45^\circ = 50 \text{ Var}$$

$$\mathbf{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50; \quad S_1 = |\mathbf{S}_1| = 50\sqrt{2} = 70,7 \text{ VA}$$

$$\text{pf}_1 = 0,707 \text{ (chậm pha)}$$

(b) Tải: $\mathbf{Z}_2 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$

Dòng điện: $i_2 = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$; $\mathbf{I}_{2,eff} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ$

Công suất: $p_2(t) = 100\sqrt{2} \cos \omega t \cos(\omega t + 45^\circ)$

$$p_2(t) = 50 + 50\sqrt{2} \cos(2\omega t + 45^\circ)$$

$$P_2 = V_{eff} I_{2,eff} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}; \quad Q_2 = -V_{eff} I_{2,eff} \sin 45^\circ = -50 \text{ Var}$$

$$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50; \quad S_2 = |\mathbf{S}_2| = 50\sqrt{2} = 70,7 \text{ VA}$$

$$\text{pf}_2 = 0,707 \text{ (sớm pha)}$$

(c) Tải: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j) + (1-j)} = 1$

Dòng điện: $i = 10\sqrt{2} \cos \omega t$; $\mathbf{I}_{eff} = 10 \angle 0^\circ$

Công suất: $p(t) = 200 \cos^2 \omega t$

$$p(t) = 100 + 100 \cos(2\omega t)$$

$$P = V_{eff} I_{eff} = 100 \text{ W}; \quad Q = 0 \text{ Var}$$

$$\mathbf{S} = P + jQ = 100; \quad S = |\mathbf{S}| = 100 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = 1,0$$

Ví dụ: Mạch thụ động có trở kháng tương đương $Z = 3 + j4$ được cấp nguồn áp $v = 42,5 \cos(1000t + 30^\circ)$ hãy xác định công suất mạch.

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{42,5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{42,5/\sqrt{2}\angle 30^\circ}{5\angle 53^\circ} = \frac{8,5}{\sqrt{2}} \angle -23^\circ \text{ A}$$

$$S = V_{eff} I_{eff}^* = \frac{42,5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \frac{8,5}{\sqrt{2}} \angle 23^\circ = 180,6 \angle 53^\circ = 108,4 + j144,5$$

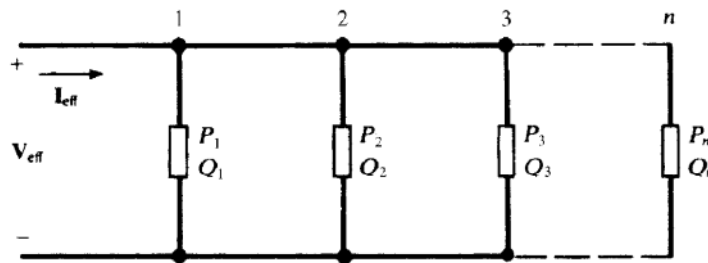
$$P = 108,4 \text{ W};$$

$$Q = 144,5 \text{ Var (điện cảm)}$$

$$\text{pf} = \cos 53^\circ = 0,6 \text{ (chậm pha)}$$

6.2.6. Công suất của các mạch song song

Công suất phức cũng rất hữu dụng khi phân tích các mạch điện thực tế, ví dụ mạch điện gia dụng được nối song song cùng trên một nguồn, như trên hình 6–19, nhánh 1 và 3 có tính điện cảm, nhánh 2 có tính điện dung.



Hình 6–19

Nếu phân tích mạch quan trọng năng lượng trên mỗi nhánh, ta có thể biến đổi tương đương trở kháng từ đó tính công suất ST, hoặc ngược lại.

Ví dụ: điện áp 6kV trên mạch hình 6–19, các nhánh: $P_1 = 10\text{kW}$, $\text{pf}_1 = 1$, $P_2 = 20\text{kW}$, $\text{pf}_2 = 0,5$ (chậm pha), $P_3 = 15\text{kW}$, $\text{pf}_3 = 0,6$ (chậm pha). Tính công suất, hệ số công suất và dòng điện của mạch.

$$\text{pf}_1 = \cos \theta_1 = 1 \rightarrow \tan \theta_1 = 0; Q_1 = P_1 \tan \theta_1 = 0 \text{ kvar}$$

$$\text{pf}_2 = \cos \theta_2 = 0,5 \rightarrow \tan \theta_2 = 1,73; Q_2 = P_2 \tan \theta_2 = 34,6 \text{ kvar}$$

$$\text{pf}_3 = \cos \theta_3 = 0,6 \rightarrow \tan \theta_3 = 1,33; Q_3 = P_3 \tan \theta_3 = 20 \text{ kvar}$$

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45 \text{ kW}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34,6 + 20 = 54,6 \text{ kvar}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{45^2 + 54,6^2} = 70,75 \text{ kVA}$$

$$\text{pf}_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{45}{70,75} = 0,64 \rightarrow \cos \theta = 0,64 \rightarrow \theta = 50,5^\circ \text{ (chậm pha)}$$

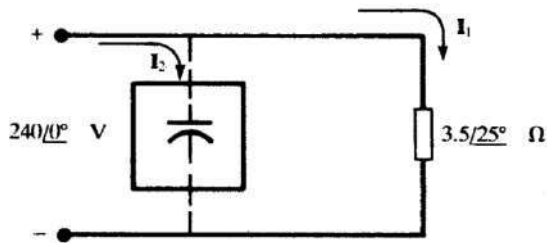
$$I_{eff} = \frac{S_T}{V_{eff}} = \frac{70,75}{6} = 11,8 \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{eff} = 11,8 \angle 50,5^\circ$$

6.2.7. Nâng hệ số công suất pf

Hệ thống điện thường có hệ số công suất thấp do có số lượng lớn các thiết bị trở kháng có tính chất điện cảm. Nâng hệ số công suất tại phụ tải sẽ giảm thành phần công suất vuông góc (phản kháng) truyền tải trên đường dây nhờ đó giảm dòng điện truyền tải, giảm các tổn hao trên đường dây và nâng cao hiệu suất truyền tải điện năng. Để nâng hệ số công suất tại phụ tải, thường áp dụng biện pháp mắc song song tụ điện vào tải, nhờ tụ điện có khả năng sinh ra công suất phản kháng nên sẽ giảm lượng công suất này truyền tải từ nguồn đến tải.

Ví dụ: xác định dung lượng tụ bù cho mạch ở hình 6–20 để nâng hệ số công suất lên 0,95.



Hình 6–20

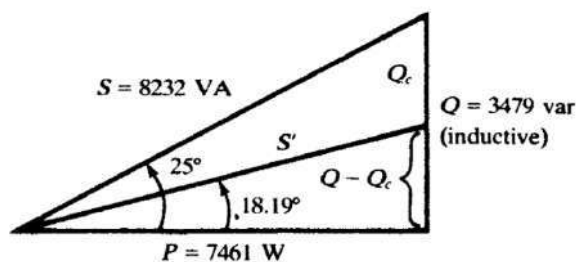
Trước khi có tụ bù, hệ số công suất $\text{pf} = \cos 25^\circ = 0,906$ (trễ) và

$$\mathbf{I}_1 = \frac{240 \angle 0^\circ}{3,5 \angle 25^\circ} = 68,6 \angle -25^\circ$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}^* = \left(\frac{240 \angle 0^\circ}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{68,6 \angle +25^\circ}{\sqrt{2}} \right) = 8232 \angle +25^\circ = 7461 + j3479$$

Sau khi bù, trong tam giác công suất, công suất tác dụng vẫn giữ nguyên nhưng góc chỉ còn $\cos^{-1} 0,95 = 18,19^\circ$

$$\frac{3479 - Q_C}{7461} = \tan 18,19^\circ \rightarrow Q_C = 1027 \text{ var}$$



Hình 6–21

Giá trị mới của công suất biểu kiến $S' = 7854$, so với trước bù $S = 8232$ đã giảm đi một lượng 378VA và tương ứng 4,6%.

Ví dụ: Một tải có công suất $P = 1000\text{kW}$ với $\text{pf} = 0,5$ (trễ) được cấp nguồn áp 5-kV, một tụ điện được bổ xung vào tải sao cho hệ số công suất nâng lên đến 0,8. Xác định độ giảm dòng điện cấp từ nguồn cho tải.

Trước khi bù tụ:

$$P = 1000 \text{ kW} ; \cos\theta = 0,5 ; S = P/\cos\theta = 2000 \text{ kVA} ; I = 400 \text{ A}$$

Sau khi bù tụ:

$$P = 1000 \text{ kW} ; \cos\theta = 0,8 ; S = P/\cos\theta = 1250 \text{ kVA} ; I = 250 \text{ A}$$

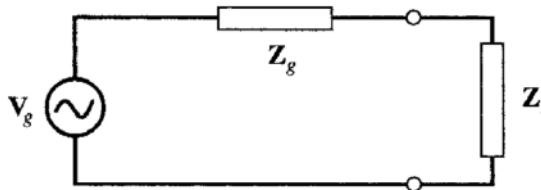
Dòng điện giảm: $400 - 250 = 150\text{A}$, tương ứng 37,5%

6.2.8. Truyền công suất cực đại

Công suất trung bình được truyền đến tải Z_1 từ nguồn xoay chiều sin có điện áp hở mạch V_g và trở kháng trong $Z_g = R + jX$ đạt cực đại khi Z_1 bằng liên hợp phức của Z_g , hay $Z_1 = R - jX$. Công suất cực đại truyền đến tải Z_1 :

$$P_{\max} = \frac{V_g^2}{4R}$$

Ví dụ: Máy phát điện có điện áp $V_g = 100\text{V(rms)}$, trở kháng trong $Z_g = 1 + j$ cấp điện cho tải $Z_1 = 2$ (hình 6-22). (a) Xác định công suất trung bình P_{Z1} (tiêu thụ trên Z_1) công suất P_g (tổn hao trong máy phát) và P_T (công suất nguồn máy phát). (b) Xác định trở kháng Z_2 song song với Z_1 sao cho trở kháng tương đương bằng liên hợp phức của trở kháng máy phát. (c) Nếu mắc song song Z_2 với Z_1 được trở kháng tương đương Z , hãy xác định các công suất P_Z ; P_{Z1} và P_{Z2} (tiêu thụ tương ứng trên Z_1 và Z_2), P_g và P_T .



Hình 6-22

(a) Tính công suất:

$$|Z_1 + Z_g| = |1 + j + 2| = \sqrt{10}$$

$$I = \frac{V_g}{Z_1 + Z_g} = \frac{100}{2 + 1 + j} = 10(3 - j) \text{ và } |I| = 10\sqrt{10} \text{ A}$$

$$P_{Z1} = \text{Re}[Z_1] \cdot |I|^2 = 2 \cdot (10\sqrt{10})^2 = 2000 \text{ W}$$

$$P_{Zg} = \text{Re}[Z_g] \cdot |I|^2 = 1 \cdot (10\sqrt{10})^2 = 1000 \text{ W}$$

$$P_T = P_{Z1} + P_{Zg} = 2000 + 1000 = 3000 \text{ W}$$

(b) Tính trở kháng: đặt $\mathbf{Z}_2 = a + jb$, tính trở kháng tương đương và đặt phương trình bằng liên hợp phức $\mathbf{Z}_g$: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g^* = 1 - j$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

Tìm được: $a - b - 2 = 0$ và $a + b + 2 = 0$, giải hai phương trình nhận được: $a = 0$ và $b = -2$, thay vào biểu thức $\mathbf{Z}_2 = -j2$.

$$(c) \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_2 = 1 - j; \mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g = 1 - j + 1 + j = 2$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A}$$

$$P_Z = \text{Re}[\mathbf{Z}] \mathbf{I}^2 = 1.50^2 = 2500 \text{ W}$$

$$P_{Z_g} = \text{Re}[\mathbf{Z}_g] \mathbf{I}^2 = 1.50^2 = 2500 \text{ W}$$

$$P_T = P_Z + P_{Z_g} = 2500 + 2500 = 5000 \text{ W}$$

Để tìm P_{Z1} và P_{Z2} , trước tiên tính $\mathbf{V}_Z$: $\mathbf{V}_Z = \mathbf{I} \mathbf{Z} = 50(1 - j)$

$$\mathbf{I}_{Z1} = \frac{\mathbf{V}_Z}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50(1 - j)}{2} = 25(1 - j) = 25\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$P_{Z1} = \text{Re}[\mathbf{Z}_1] |\mathbf{I}_{Z1}|^2 = 2 \cdot (25\sqrt{2})^2 = 2500 \text{ W}$$

$$P_{Z2} = 0 \text{ W}$$

6.2.9. Xếp chồng nguồn xoay chiều sin

Xét mạch điện chứa hai nguồn xoay chiều sin với tần số khác nhau ω_1 và ω_2 . Nếu có thể tìm được chu kỳ chung T của các nguồn ($\omega_1 = m\omega$, $\omega_2 = n\omega$, trong đó $\omega = 2\pi / T$ và $m \neq n$) khi đó nguyên lý xếp chồng các nguồn được áp dụng ($P = P_1 + P_2$), trong đó P_1 và P_2 là công suất trung bình của các nguồn. Kết quả trên có thể đúng với n nguồn xoay chiều sin tác động đồng thời trong mạch điện. Trường hợp n sóng hài bậc cao của sóng cơ bản cũng có thể áp dụng qui tắc xếp chồng:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \quad (6-19)$$

Ví dụ: một cuộn cảm được đặt giữa hai nguồn áp xoay chiều sin $v_1 = 5\cos\omega_1 t$ và $v_2 = 10\cos(\omega_2 t - 60^\circ)$, có một cực chung. Cuộn cảm được mô hình hóa bằng điện trở $R = 10\Omega$ và điện cảm $L = 5\text{mH}$. Hãy xác định công suất trên cuộn cảm trong các trường hợp: (a) $\omega_2 = 2\omega_1 = 4000$; (b) $\omega_1 = \omega_2 = 2000$ và (c) $\omega_1 = 2000; \omega_2 = 1000\sqrt{2}$. Các tần số đều có đơn vị rad/s.

Nguồn v1 tác động riêng tạo nên dòng i1 trên cuộn cảm, tương tự với nguồn v2 tạo ra dòng điện i2. Do đó, dòng điện $i = i_1 - i_2$, công suất tức thời trên cuộn cảm p và công suất trung bình P được xác định:

$$p = Ri^2 = R(i_1 - i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_2^2 - 2Ri_1i_2$$

$$P = \langle p \rangle = R\langle i_1^2 \rangle + R\langle i_2^2 \rangle - 2R\langle i_1i_2 \rangle = P_1 + P_2 - 2R\langle i_1i_2 \rangle$$

Trong đó: $\langle p \rangle$ kí hiệu công suất trung bình của p. Ngoài P_1 và P_2 , trong biểu thức công suất trung bình P còn có thành phần thứ ba phụ thuộc vào $\langle i_1i_2 \rangle$. Thành phần này có thể bằng hoặc khác không.

$$(a) \omega_2 = 2\omega_1 = 4000$$

Áp dụng nguyên lý xếp chồng trong miền tần số

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{5}{10 + j10} = 0,35 \angle -45^\circ \text{ A} \rightarrow i_1 = 0,35 \cos(2000t - 45^\circ)$$

$$P_1 = \frac{RI_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 0,35^2}{2} = 0,625 \text{ W}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} = \frac{10 \angle 60^\circ}{10 + j20} = 0,45 \angle -3,4^\circ \text{ A} \rightarrow i_2 = 0,45 \cos(4000t - 3,4^\circ)$$

$$P_2 = \frac{RI_2^2}{2} = \frac{10 \cdot 0,45^2}{2} = 1,0 \text{ W}$$

$$i = i_1 - i_2 = 0,45 \cos(4000t - 3,4^\circ) - 0,45 \cos(4000t - 3,4^\circ)$$

Trường hợp này $\langle 0,45 \cos(4000t - 3,4^\circ) - 0,45 \cos(4000t - 3,4^\circ) \rangle = 0$, nên áp dụng qui tắc xếp chồng nguồn: $P = P_1 + P_2 = 0,625 + 1 = 1,625 \text{ W}$

$$(b) \omega_1 = \omega_2 = 2000$$

Hai nguồn cùng tần số nên

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} = \frac{10 \angle 60^\circ}{10 + j10} = 0,707 \angle 25^\circ \text{ A} \rightarrow i_2 = 0,707 \cos(2000t + 25^\circ)$$

$$P_2 = \frac{RI_2^2}{2} = \frac{10 \cdot 0,707^2}{2} = 1,2 \text{ W}$$

6.3. Nguồn xoay chiều nhiều pha

Công suất tức thời của nguồn xoay chiều sin cấp cho trở kháng

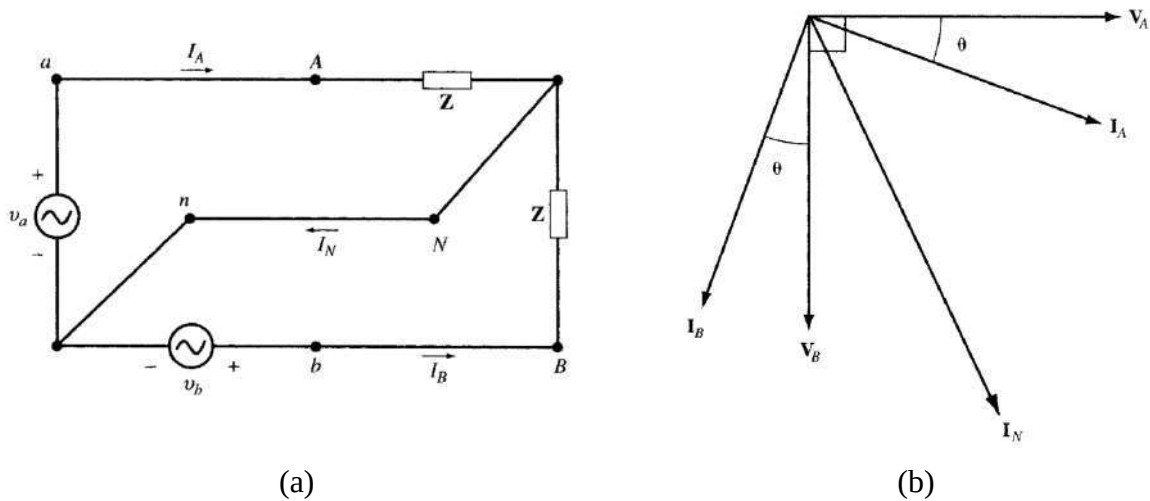
$$p(t) = v(t)i(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

Với V_p và I_p là các trị hiệu dụng của v và i , θ – góc lệch pha giữa chúng. Công suất dao động trong phạm vi $V_p I_p (1 + \cos\theta)$ và $V_p I_p (-1 + \cos\theta)$. Trong các hệ thống điện cần công suất lớn và phạm vi thay đổi công suất rộng, để ổn định luồng công suất từ nguồn đến tải người ta sử dụng hệ thống nguồn nhiều pha. Bên cạnh đó, một ưu điểm khác của hệ thống nguồn nhiều pha là có thể có nhiều mức điện áp. Với hệ thống nguồn nhiều pha, V_p và I_p tương ứng là điện áp và dòng điện của pha đang xét và có thể khác so với các pha khác. Trong phần này chủ yếu được đề cập đến hệ thống nguồn và pha, được sử dụng trong công nghiệp, ngoài ra còn hệ thống nguồn hai pha.

6.3.1. Hệ thống nguồn xoay chiều hai pha

Một hệ thống hai pha cân bằng tạo ra hai nguồn xoay chiều sin có cùng tần số, biên độ nhưng lệch pha 90° hoặc 180° . Ưu điểm của hệ thống này cho phép sử dụng hai cấp điện áp và tương ứng là hai từ trường. Công suất có thể là hằng số hoặc dao động.

Ví dụ: máy phát điện xoay chiều gồm hai nguồn xoay chiều có cùng biên độ và tần số nhưng lệch pha 90° . Hai nguồn nối chung tại điểm trung tính của máy phát. Hệ thống nguồn cấp cho hai tải giống nhau (hình 6–23a), xác định dòng, áp, công suất tức thời và trung bình.



Hình 6–23

Điện áp tại các cực và dòng điện của nguồn:

$$v_a(t) = V_p \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad v_b(t) = V_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$i_a(t) = I_p \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta) \quad i_b(t) = I_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ - \theta)$$

Trong miền tần số, nếu $\mathbf{Z} = |Z| \angle \theta$, thì $I_p = V_p / |Z|$

$$\mathbf{V}_{AN} = V_p \angle 0^\circ; \mathbf{V}_{BN} = V_p \angle -90^\circ \rightarrow \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 2V_p \angle -45^\circ$$

$$\mathbf{I}_A = I_p \angle -\theta; \mathbf{I}_B = I_p \angle -90^\circ - \theta \rightarrow \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = \sqrt{2}I_p \angle 45^\circ - \theta$$

Véc tơ biểu diễn dòng, áp trong hình 6–23b

Công suất tức thời p_A và p_B cấp từ các nguồn:

$$p_A(t) = v_a(t)i_a(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_B(t) = v_b(t)i_b(t) = V_p I_p \cos\theta - V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

Công suất tức thời tổng cộng do hai nguồn cấp cho các tải:

$$p_T(t) = p_A(t) + p_B(t) = V_p I_p \cos\theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) + \\ + V_p I_p \cos\theta - V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

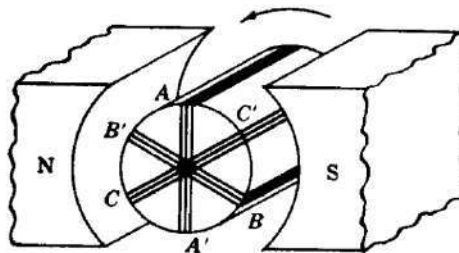
$$p_T(t) = 2V_p I_p \cos\theta$$

Hệ thống nguồn hai pha nói trên có hai mức điện áp V_p và $\sqrt{2}V_p$ và công suất cấp đến các tải là hằng số. Bên cạnh đó sự lệch pha trong từ trường do dòng điện các pha có thể tạo ra từ trường quay trong một số thiết bị.

6.3.2. Hệ thống nguồn xoay chiều ba pha

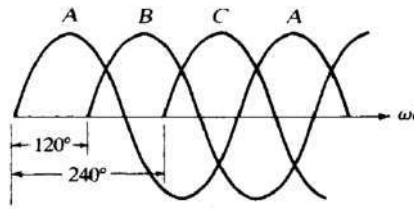
6.3.2.1. Điện áp xoay chiều ba pha

Hệ thống nguồn ba pha bao gồm ba nguồn xoay chiều sin có cùng tần số nhưng lệch nhau mỗi pha 120° . Để tạo ra hệ thống này cần máy phát ba pha có cấu tạo từ ba cuộn dây có vị trí lệch nhau 120° . Thông thường, biên độ của ba pha luôn bằng nhau và máy phát được gọi là đối xứng. Trong hình 6–24, ba cuộn dây bằng nhau và đặt tại vành ngoài của rôto, mỗi cuộn dây được xoay đi góc 120° so với cuộn dây trước.



Hình 6–24

Các đầu của cuộn dây cũng như vòng dây không được thể hiện, nhưng rõ ràng nếu quay rô to ngược chiều kim đồng hồ các cạnh cuộn dây sẽ lần lượt đi qua cực từ theo thứ tự ...A–B–C–A–B–C... Cực tính của điện áp thay đổi mỗi khi thay cực từ. Giả thiết cực từ và từ trường cực từ tạo nên điện áp sin trên mỗi pha như vậy điện áp của ba pha được biểu diễn trên hình 6–25. Điện áp pha B chậm hơn pha A 120° và pha C chậm 240° , và được gọi là thứ tự pha ABC. Nếu thay đổi chiều quay, thứ tự mới sẽ là B–A–C–B... được gọi là thứ tự CBA.



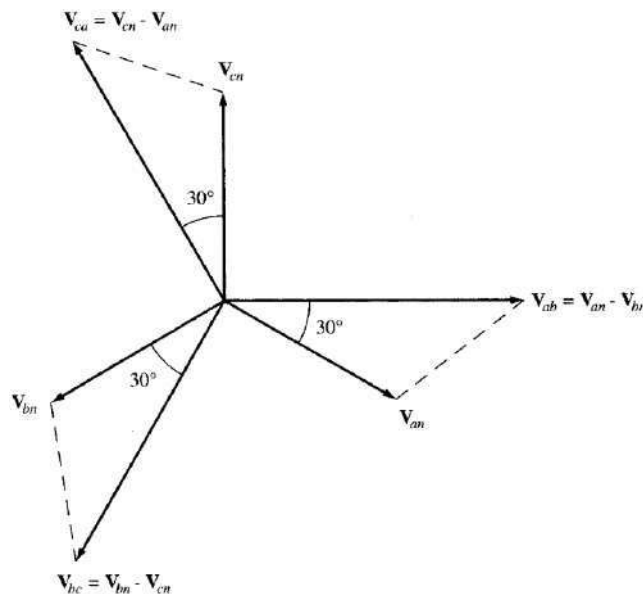
Hình 6-25

Nếu các pha cân bằng và theo thứ tự ABC, điện áp các pha trong miền thời gian và tần số tương ứng theo các biểu thức (). Đồ thị véc tơ điện áp pha trên hình 6-26.

$$v_{an}(t) = V_p \sqrt{2} \cos \omega t; \quad v_{bn}(t) = V_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ) \quad (6-20)$$

$$v_{cn}(t) = V_p \sqrt{2} \cos(\omega t - 240^\circ)$$

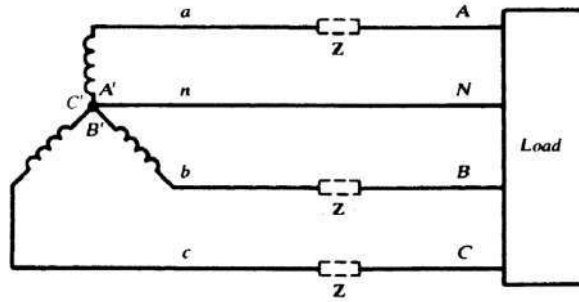
$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ; \quad \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ; \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle -240^\circ \quad (6-21)$$



Hình 6-26

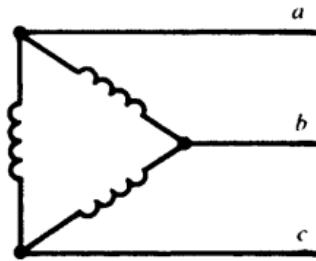
6.3.2.2. Nguồn ba pha nối sao, tam giác

Đầu của các cuộn dây pha được nối lại theo sơ đồ hình sao (còn kí hiệu Y) với các điểm A', B', C' được nối chung tại một điểm gọi là điểm trung tính, các đầu còn lại A, B, C đưa ra ngoài thành các đường dây pha A, B, C của hệ thống nguồn ba pha. Nếu điểm trung tính được kết nối bằng dây dẫn đến tải ta có hệ thống nguồn ba pha bốn dây. Trong hình 6-27, ba dây pha được kí hiệu bằng chữ thường a, b và c tại nguồn và các chữ in A, B và C tại tải. Nếu các đường dây pha phải tính đến trở kháng trong kí hiệu dòng điện trên pha cũng phải có chỉ số, ví dụ, pha aA có dòng điện phức $\mathbf{I}_{aA}$, và điện áp phức trên pha $\mathbf{V}_{aA}$.



Hình 6-27

Các cuộn dây của máy phát có thể được nối như hình 6-28, tạo thành hình tam giác (còn kí hiệu Δ), hệ thống ba pha với các đường dây pha a, b và c. Cách nối Δ không có điểm trung tính để truyền tải trên 4 dây ngoại trừ dùng hệ thống chuyển đổi Δ -Y.

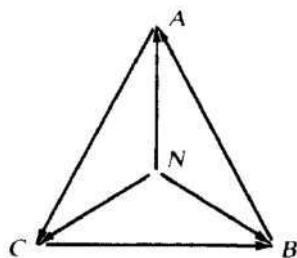


Hình 6-27

6.3.2.3. Điện áp phức của hệ thống nguồn ba pha

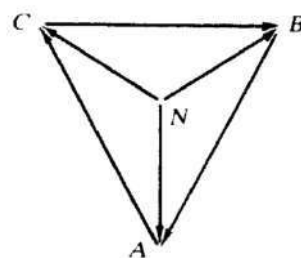
Trong hệ thống nguồn ba pha, lựa chọn góc pha của một pha luôn cố định, điều này tương đương với tại thời điểm $t = 0$ không thể tùy tiện trên trục hoành như hình 6-25. Trong phần này, góc pha không (zero) tương ứng với điện áp pha B so với pha C: $\mathbf{V}_{BC} \equiv V_L \angle 0^\circ$

Điện áp giữa pha – pha (điện áp dây) gấp $\sqrt{3}$ lần điện áp giữa pha và trung tính (điện áp pha). Véc tơ điện áp được thể hiện trong hình 6-28 cho cả hai trường hợp: thứ tự ABC và thứ tự CBA.



Thứ tự ABC

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AB} &= V_L \angle 120^\circ \\ \mathbf{V}_{BC} &= V_L \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{CA} &= V_L \angle 240^\circ \\ \mathbf{V}_{AN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle 90^\circ \\ \mathbf{V}_{BN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle -30^\circ \\ \mathbf{V}_{CN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle -150^\circ\end{aligned}$$



Thứ tự CBA

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AB} &= V_L \angle 240^\circ \\ \mathbf{V}_{BC} &= V_L \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{CA} &= V_L \angle 120^\circ \\ \mathbf{V}_{AN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle -90^\circ \\ \mathbf{V}_{BN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle 30^\circ \\ \mathbf{V}_{CN} &= (V_L/\sqrt{3}) \angle 150^\circ\end{aligned}$$

Hình 6-28

6.3.3. Tải ba pha đối xứng

6.3.3.1. Tải đối xứng nối tam giác (Δ)

Ba tải trở kháng giống nhau nối thành mạch như trong hình 6–29 tạo nên tải ba pha tam giác đối xứng. Dòng điện trên trở kháng được gọi là dòng điện pha có biên độ bằng nhau và lệch pha 120° . Dòng điện dây cũng bằng nhau về biên độ và lệch pha 120° có hướng từ nguồn đến tải.

Ví dụ: Một nguồn ba pha, ba dây, thứ tự ABC có điện áp hiệu dụng 120V, cấp điện cho ba tải trở kháng $5\angle 45^\circ$ nối tam giác. Xác định dòng điện dây và vẽ đồ thị véc tơ dòng điện và điện áp.

Điện áp dây lớn nhất (biên độ) là: $120\sqrt{3} = 169,7 \text{ V}$

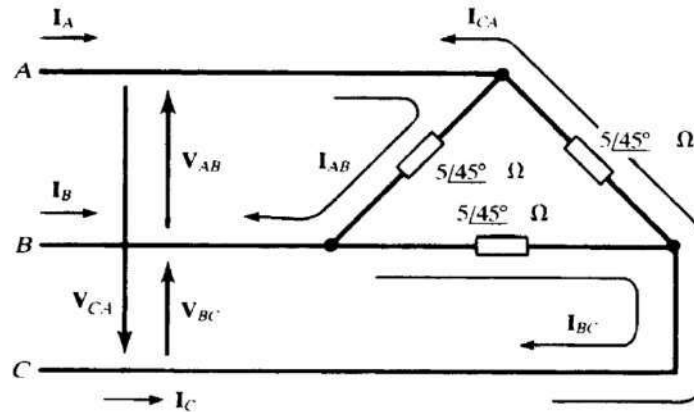
$$\mathbf{V}_{AB} = 169,7\angle 120^\circ; \mathbf{V}_{BC} = 169,7\angle 0^\circ; \mathbf{V}_{CA} = 169,7\angle 240^\circ$$

Hai kí tự ở chỉ số biểu thức dòng điện qui định chiều của dòng điện trên trở kháng tải.

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7\angle 120^\circ}{5\angle 45^\circ} = 33,9\angle 75^\circ$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ} = 33,9\angle -45^\circ$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7\angle 240^\circ}{5\angle 45^\circ} = 33,9\angle 195^\circ$$



Hình 6–29

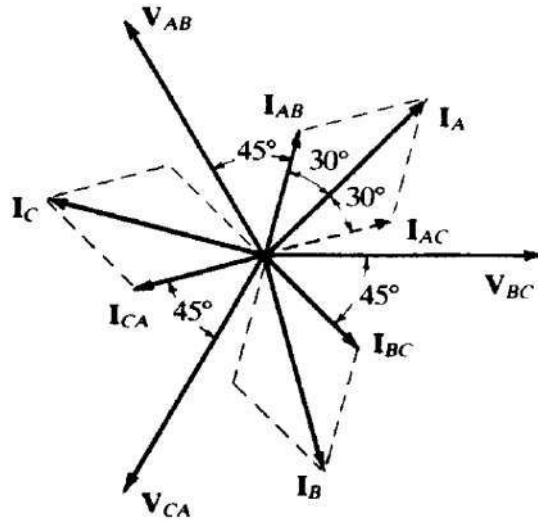
Theo định luật Kirchhoff về dòng, dòng điện dây $\mathbf{I}_A$ được tính theo:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = 33,9\angle 75^\circ - 33,9\angle 195^\circ = 58,7\angle 45^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} = 33,9\angle -45^\circ - 33,9\angle 75^\circ = 58,7\angle -75^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} = 33,9\angle 195^\circ - 33,9\angle -45^\circ = 58,7\angle 165^\circ$$

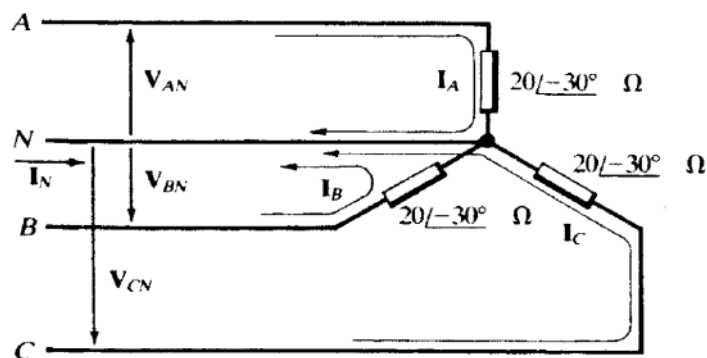
Điện áp pha – pha và các dòng điện được biểu diễn bằng véc tơ được thể hiện trong hình 6–30. Lưu ý, các dòng điện trường hợp này đối xứng, do đó khi tính được một dòng điện có thể tìm ngay được các dòng điện khác thông qua giản đồ đối xứng các véc tơ. Dòng điện dây $I_L = \sqrt{3}I_p$ dòng điện pha đối với tải Δ đối xứng.



Hình 6–30

6.3.3.1. Tải đối xứng nối sao (Y) bốn dây

Ba tải trở kháng giống nhau được nối như trong hình 6–31 tạo nên tải hình sao. Dòng điện trên trở kháng cũng chính là dòng điện dây do đó chiều được chọn từ nguồn đến tải như trường hợp trước.



Hình 6–31

Ví dụ: nguồn ba pha, bốn dây, thứ tự CBA, có điện áp hiệu dụng 120V, cấp cho ba tải $20\angle -30^\circ$ nối Y (hình 6–31). Xác định dòng điện dây, vẽ đồ thị véc tơ dòng điện và điện áp.

Biên độ điện áp dây 169,7V $\rightarrow$ biên độ điện áp pha $169,7/\sqrt{3} = 98$ V, thứ tự CBA do đó điện áp phức của các pha:

$$\mathbf{V}_{AN} = 98\angle -90^\circ; \mathbf{V}_{BN} = 98\angle 30^\circ; \mathbf{V}_{CN} = 98\angle 150^\circ$$

Dòng điện pha:

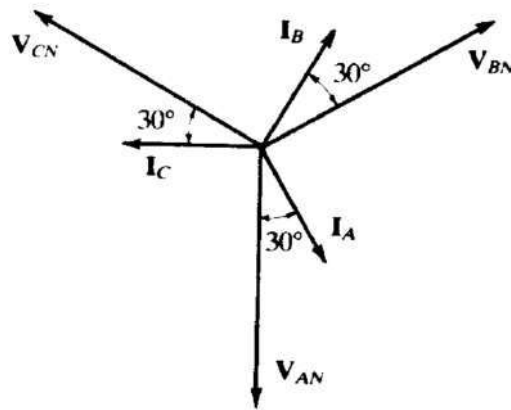
$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98 \angle -90^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4,9 \angle -60^\circ$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98 \angle 30^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4,9 \angle 60^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98 \angle 150^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4,9 \angle 180^\circ$$

Đồ thị véc tơ dòng điện và điện áp được thể hiện trong hình 6–32. Lưu ý, nếu dòng điện trên một đường dây được tính có thể suy ra các dòng điện còn lại do tính chất đối xứng. Dòng điện trên các đường dây pha quay về nguồn thông qua dây trung tính do đó dòng điện trên dây trung tính bằng tổng các dòng điện dây.

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C)$$

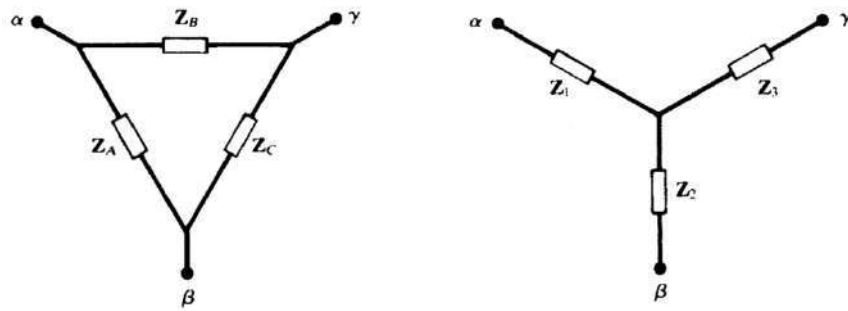


Hình 6–32

Do dòng điện trên dây trung tính bằng không trong trường hợp tải đối xứng nên trong tính toán, độ dẫn điện của nó có thể bỏ qua mà không dẫn đến thay đổi kết quả. Trong mạch ba pha thực tế dây trung tính không thể bỏ đi thậm chí trên đó chỉ có dòng điện nhỏ (do tải không cân bằng), vì trường hợp ngắn mạch pha sẽ làm điện áp các pha khác tăng quá giá trị danh định.

6.3.3.3. Biến đổi tương đương tải Y và Δ

Trong hình 6–33 cho thấy ba trở kháng nối theo hình tam giác (Δ) và ba trở kháng nối theo hình sao (Y). Các cực của hai cụm tải này được gọi là α , β , γ . Khi đó Z1 là trở kháng nối với cực α trong tải hình sao và ZC là trở kháng đối diện với cực α của tải tam giác. Nếu nhìn từ bất cứ hai cực, hai tải được gọi là tương đương khi tượn ứng trở kháng vào, trở kháng ra và trở kháng biến đổi bằng nhau.



Hình 6-33

Điều kiện biến đổi tương đương như sau:

Biến đổi $Y \rightarrow \Delta$:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

Biến đổi $\Delta \rightarrow Y$:

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

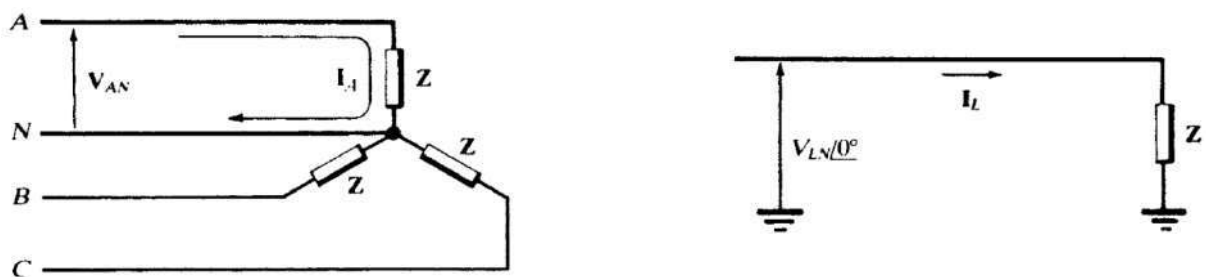
$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Nếu như các trở kháng của một loại tải đối xứng thì đối với loại còn lại tương đương cũng đối xứng: $Z_\Delta / Z_Y = 3$

6.3.3.4. Mạch một pha tương đương cho mạch ba pha đối xứng

Trong hình 6-34 là mạch điện ba pha tải nối Y đối xứng. Trong nhiều trường hợp khi tính toán công suất chỉ cần dùng đến biên độ chung của dòng điện dây I_L . Điều này có thể được xác định từ mạch điện một pha tương đương (hình 6-34), trong đó điện áp pha – trung tính với góc pha tự chọn bằng không. Như vậy dòng điện $\mathbf{I}_L = I_L \angle -\theta$, trong đó θ là góc trở kháng. Nếu các biểu thức dòng điện $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ và $\mathbf{I}_C$ cần có góc pha, có thể xác định bằng cách thêm một lượng $-\theta$ vào góc pha của $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ và $\mathbf{V}_{CN}$. Ngoài ra góc pha của $\mathbf{I}_L$ xác định hệ số công suất của mạch $\text{pf} = \cos\theta$

Phương pháp này cũng có thể áp dụng cho mạch ba pha tải nối Δ nếu tải nay biến đổi tương đương về tải Y, trong đó $Z_Y = Z_\Delta / 3$



Hình 6-34

Ví dụ: nguồn ba pha, bốn dây, thứ tự CBA, có điện áp hiệu dụng 120V, cấp cho ba tải $20\angle -30^\circ$ nối Y (hình 6-31). Xác định dòng điện dây, vẽ đồ thị véc tơ dòng điện và điện áp.

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98\angle 0^\circ}{20\angle -30^\circ} = 4,9\angle 30^\circ$$

Các điện áp $\mathbf{V}_{AN}$; $\mathbf{V}_{BN}$; $\mathbf{V}_{CN}$ có góc pha tương ứng là: -90 , 30 và 150

Do đó: $\mathbf{I}_A = 4,9\angle -60^\circ \text{ A};$

$$\mathbf{I}_B = 4,9\angle 60^\circ \text{ A};$$

$$\mathbf{I}_C = 4,9\angle 180^\circ \text{ A}$$

6.3.4. Tải ba pha không đối xứng

6.3.4.1. Tải ba pha không đối xứng nối Δ

Giải mạch điện ba pha tải tam giác không đối xứng, tính dòng điện trên các pha sau đó áp dụng định luật Kirchhoff về dòng để tính dòng điện dây. Các dòng điện không bằng nhau và không có tính đối xứng như trong trường hợp tải đối xứng.

Ví dụ: Nguồn ba pha điện áp 339,4V, thứ tự ABC, nối với tải tam giác (hình 6-35) có: $\mathbf{Z}_{AB} = 10\angle 0^\circ \Omega$; $\mathbf{Z}_{BC} = 10\angle 30^\circ \Omega$; $\mathbf{Z}_{CA} = 15\angle -30^\circ \Omega$. Xác định dòng điện pha, dây và vẽ đồ thị véc tơ

Dòng điện pha:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{339,4\angle 120^\circ}{10\angle 0^\circ} = 33,94\angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = \frac{339,4\angle 0^\circ}{10\angle 30^\circ} = 33,94\angle -30^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = \frac{339,4\angle 240^\circ}{15\angle -30^\circ} = 22,63\angle 270^\circ \text{ A}$$

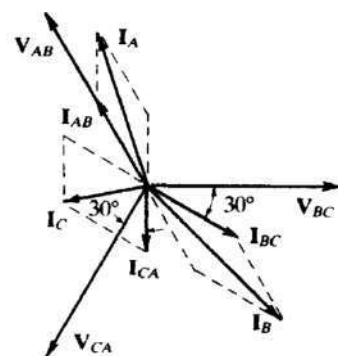
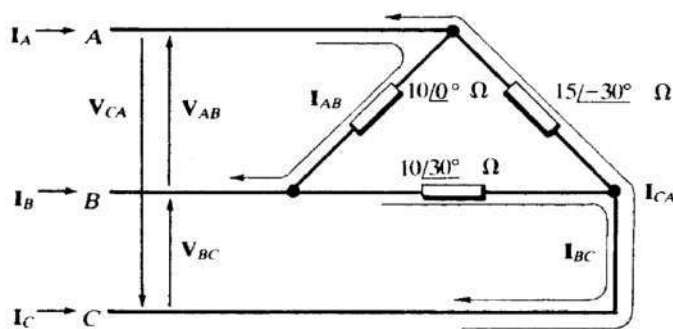
Dòng điện dây:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = 33,94\angle 120^\circ - 22,63\angle 270^\circ = 54,72\angle 108^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} = 33,94\angle -30^\circ - 33,94\angle 120^\circ = 65,56\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} = 22,63\angle 270^\circ - 33,94\angle -30^\circ = 29,93\angle 169^\circ \text{ A}$$

Đồ thị véc tơ dòng, áp trên hình 6-35.



Hình 6-35

6.3.4.2. Tải ba pha không đối xứng nối Y

Trường hợp nguồn bốn dây

Dây trung tính mang dòng điện không cân bằng, tải nối Y không đối xứng vẫn có điện áp pha – trung tính cho mỗi pha tải. Dòng điện dây không bằng nhau và đồ thị véc tơ không đối xứng.

Ví dụ: Nguồn ba pha bốn dây, điện áp 150V, thứ tự CBA có tải nối Y với thông số: $Z_A = 6\angle 0^\circ \Omega$; $Z_B = 6\angle 30^\circ \Omega$; $Z_C = 5\angle 45^\circ \Omega$. Xác định dòng điện dây và vẽ đồ thị véc tơ

Dòng điện dây:

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{86,6\angle -90^\circ}{6\angle 0^\circ} = 14,43\angle -90^\circ \text{ A}$$

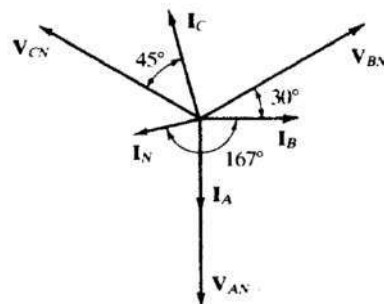
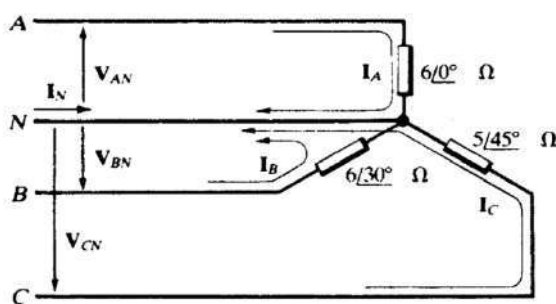
$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = \frac{86,6\angle 30^\circ}{6\angle 30^\circ} = 14,43\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = \frac{86,6\angle 150^\circ}{5\angle 45^\circ} = 17,32\angle 105^\circ \text{ A}$$

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -14,43\angle -90^\circ - 14,43\angle 0^\circ - 17,32\angle 105^\circ$$

$$I_N = 10,21\angle 167^\circ$$

Đồ thị véc tơ trên hình 6-36

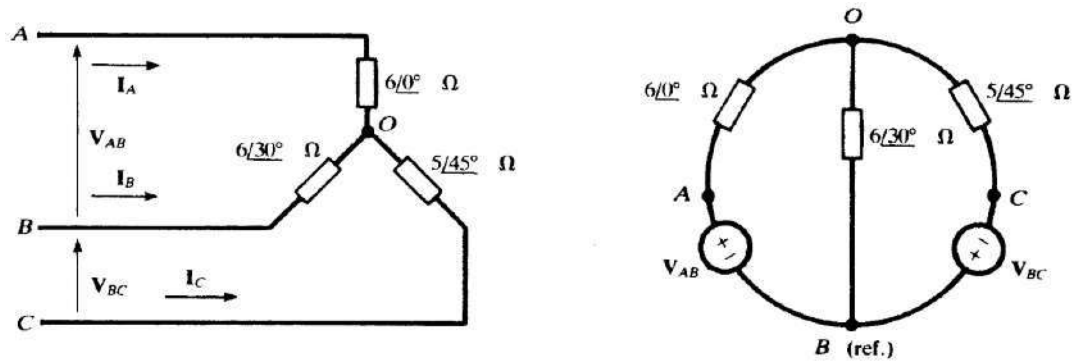


Hình 6-36

Trường hợp nguồn ba dây

Khi không có dây trung tính, tải nối Y có điện áp trên các pha phụ thuộc vào tương quan trở kháng của tải.

Ví dụ: Trên hình 6–37 mạch điện ba pha tải nối Y không có dây trung tính, hãy xác định dòng điện dây và điện áp V_{ON}



Hình 6–36

Sau khi vẽ lại sơ đồ mạch ta được hình bên, sử dụng phương pháp điện áp nút với V_{OB} là ẩn số:

$$\frac{V_{OB} - V_{AB}}{Z_A} + \frac{V_{OB}}{Z_B} + \frac{V_{OB} - V_{BC}}{Z_C} = 0$$

$$V_{OB} \left(\frac{1}{6\angle 0^\circ} + \frac{1}{6\angle 30^\circ} + \frac{1}{5\angle 45^\circ} \right) = \frac{150\angle 240^\circ}{6\angle 0^\circ} - \frac{150\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ}$$

Từ đó:

$$V_{OB} = 66,76\angle -152,85^\circ$$

$$I_B = -\frac{V_{OB}}{Z_B} = \frac{66,76\angle -152,85^\circ}{6\angle 30^\circ} = 11,13\angle -2,85^\circ$$

$$V_{OA} + V_{AB} = V_{OB} \rightarrow V_{OA} = 100,7\angle 81,08^\circ$$

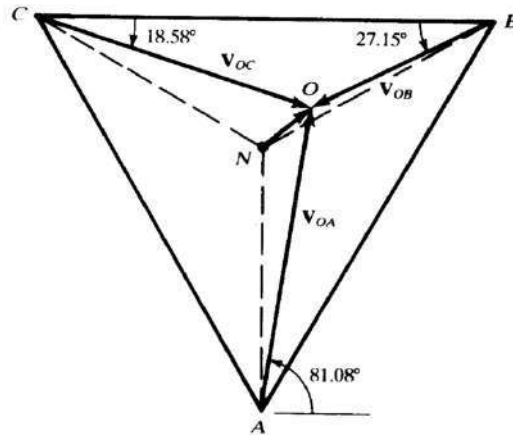
$$I_A = -\frac{V_{OA}}{Z_A} = \frac{100,7\angle 81,08^\circ}{6\angle 0^\circ} = 16,78\angle -98,92^\circ$$

$$V_{OC} + V_{CB} = V_{OB} \rightarrow V_{OC} = 95,58\angle 18,58^\circ$$

$$I_C = -\frac{V_{OC}}{Z_C} = \frac{100,7\angle 81,08^\circ}{5\angle 45^\circ} = 19,12\angle 116,4^\circ$$

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = 100,7\angle 81,08^\circ + \frac{150}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ = 20,24\angle 39,53^\circ$$

Đồ thị véc tơ trên hình 6–37.



Hình 6-37

6.3.5. Công suất nguồn ba pha – đo công suất

Công suất nguồn ba pha đối xứng cấp cho tải đối xứng

$$p_A(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta)$$

$$p_B(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta)$$

$$p_C(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta)$$

Công suất ba pha:

$$\begin{aligned} p_T(t) &= p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) \\ &= 3V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) + V_p I_p \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \\ &\quad + V_p I_p \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta) \end{aligned}$$

Nhưng với mọi giá trị của t :

$$\begin{aligned} V_p I_p \cos(2\omega t - \theta) + V_p I_p \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta) + \\ + V_p I_p \cos(2\omega t - 480^\circ - \theta) = 0 \end{aligned}$$

Do đó công suất ba pha: $p_T(t) = 3V_p I_p \cos \theta$

Công suất tổng của ba pha tương tự như công suất trung bình nguồn xoay chiều, biểu thức công suất ba pha có thể viết được dạng đại lượng dây:

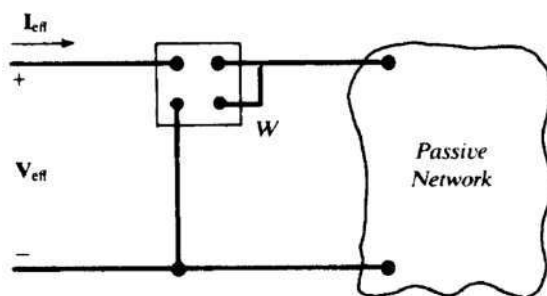
$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

Biểu thức $\sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$ cho công suất hệ thống ba pha đối xứng không phụ thuộc và cách nối tải. Hệ số công suất của hệ thống là $\text{pf} = \cos \theta$. Điện áp dây của hệ thống nguồn điện công nghiệp luôn được biết do đó công suất có thể được tính từ dòng điện dây và hệ số công suất.

Tổng hợp công suất hệ thống nguồn tải ba pha:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta; Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta; S = \sqrt{3} V_L I_L; \text{pf} = \cos \theta$$

Đo công suất mạch ba pha thường sử dụng oát kế ba pha, cấu tạo gồm cuộn áp và cuộn dòng tương ứng đo điện áp hiệu dụng, dòng điện hiệu dụng và cos của góc lệch pha giữa chúng. Trong hình 6–38, oát kế chỉ công suất trung bình của mạch thụ động.

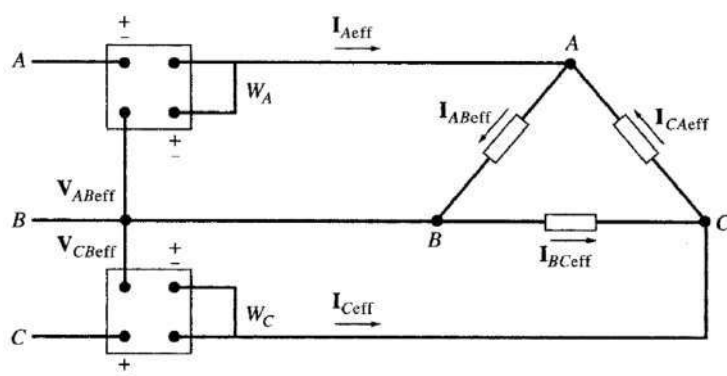


Hình 6–38

Công suất xoay chiều

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta = \text{Re}[V_{eff} I_{eff}^*]$$

Hai oát kế được kết nối trên hai đường dây pha của hệ thống mạch ba pha, ba dây sẽ có tổng chỉ số bằng tổng công suất ba pha. Chỉ số oát kế sẽ giảm nếu như góc lệch pha giữa dòng và áp vượt quá 90°. Trong trường hợp này cuộn dòng được mắc vào các pha A và C và cuộn áp được nối với pha B (hình 6–39).



Hình 6–39

$$W_A = \text{Re}(V_{AB,eff} I_{A,eff}^*) = \text{Re}(V_{AB,eff} I_{AB,eff}^*) + \text{Re}(V_{AB,eff} I_{AC,eff}^*)$$

$$W_C = \text{Re}(V_{CB,eff} I_{C,eff}^*) = \text{Re}(V_{CB,eff} I_{CA,eff}^*) + \text{Re}(V_{CB,eff} I_{CB,eff}^*)$$

Trong đó: $I_{A,eff} = I_{AB,eff} + I_{AC,eff}$; $I_{C,eff} = I_{CA,eff} + I_{CB,eff}$ các biểu thức theo định luật Kirchhoff về dòng tại nút A và C. W_A công suất trên pha AB và W_C công suất trên pha CB.

Cộng hai biểu thức công suất trên:

$$W_A + W_C = P_{AB} + \text{Re}(V_{AB,eff} I_{AC,eff}^*) + \text{Re}(V_{CB,eff} I_{CA,eff}^*) + P_{CB}$$

$$W_A + W_C = P_{AB} + \text{Re}[(V_{AB,eff} - V_{CB,eff}) I_{AC,eff}^*] + P_{CB}$$

$$W_A + W_C = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

Trong đó: $\mathbf{V}_{AB} - \mathbf{V}_{CB} = \mathbf{V}_{AC}$

Kết quả tương tự như vậy đối với mạch ba pha nối Y.

Chương 7: Đáp ứng tần số, mạch lọc và cộng hưởng

7.1. Đáp ứng tần số

7.1.1. Khái niệm đáp ứng tần số

Đáp ứng của mạch tuyến tính đối với các kích thích từ tín hiệu sin là hàm sin cùng tần số nhưng có thể khác về biên độ và góc pha. Đáp ứng của mạch tuyến tính thay đổi theo tần số của kích thích nên có thể coi đáp ứng là hàm của tần số. Các đại lượng sin có thể được biểu diễn trong miền tần số với hai tham số là biên độ và góc pha. Và đáp ứng tần số (đáp ứng trong miền tần số) được định nghĩa bằng tỉ số giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào trong miền tần số. Đáp ứng tần số là hàm thực của biến ảo $j\omega$ và theo biểu thức:

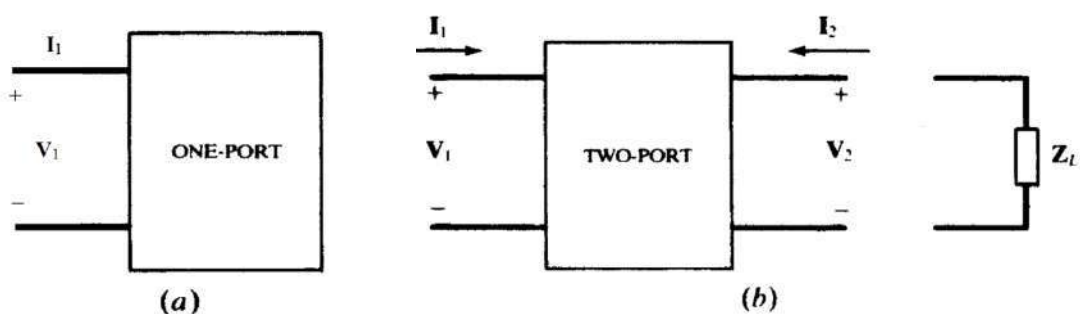
$$\mathbf{H}(j\omega) = \text{Re}[\mathbf{H}] + j \text{Im}[\mathbf{H}] = |\mathbf{H}|e^{j\theta} \quad (7-1a)$$

Trong đó: $\text{Re}[\mathbf{H}]$ và $\text{Im}[\mathbf{H}]$ là phần thực và phần ảo của $\mathbf{H}(j\omega)$; $|\mathbf{H}|$ và θ là biên độ và góc pha. Các thành phần $\text{Re}[\mathbf{H}]$; $\text{Im}[\mathbf{H}]$; $|\mathbf{H}|$; θ là các hàm của tần số và quan hệ giữa chúng theo các biểu thức:

$$|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{H}(j\omega)|^2 = \text{Re}^2[\mathbf{H}] + \text{Im}^2[\mathbf{H}] \quad (7-1b)$$

$$\theta = \angle \mathbf{H}(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[\mathbf{H}]}{\text{Re}[\mathbf{H}]} \quad (7-1c)$$

Đáp ứng tần số phụ thuộc vào lựa chọn thông số vào và ra, ví dụ, trong hình 7-1a, dòng điện tại cực là biến vào, điện áp có thể là biến ra. Trong trường hợp đó trở kháng vào $\mathbf{Z} = \mathbf{V}_1 / \mathbf{I}_1$ sẽ là hàm đáp ứng của mạch điện.



Hình 7-1

Ngược lại nếu nguồn áp cấp cho mạch, dòng điện được gọi là tín hiệu ra, lúc này dẫn nạp $\mathbf{Y} = \mathbf{I}_1 / \mathbf{V}_1 = 1 / \mathbf{Z}$ lại là đáp ứng của mạch.

Đối với mạng hai cửa (two port) trong hình 7-1b, những hàm đáp ứng sau được định nghĩa:

Trở kháng vào: $Z_{in}(j\omega) = V_1/I_1$

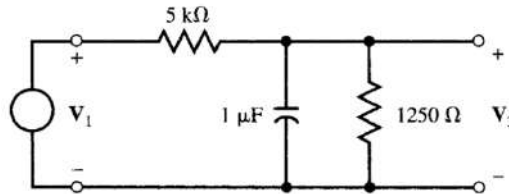
Dẫn nạp vào: $Y_{in}(j\omega) = 1/Z_{in} = I_1/V_1$

Biến đổi điện áp: $H_v(j\omega) = V_2/V_1$

Biến đổi dòng điện: $H_i(j\omega) = I_2/I_1$

Biến đổi trở kháng: V_2/I_1 và V_1/I_2

Ví dụ: Tìm đáp ứng tần số của V_2/V_1 của mạch hai cửa trong hình 7-2.



Hình 7-2

Gọi Y_{RC} là dẫn nạp của mạch RC song song, khi đó:

$$Y_{RC} = 10^{-6}j\omega + 1/1250$$

Tỉ số V_2/V_1 được tính từ phân áp giữa điện trở $5k\Omega$ và Z_{RC} .

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 5000} = \frac{1}{1 + 5000Y_{RC}} = \frac{1}{5(1 + 10^{-3}j\omega)} \quad (7-2a)$$

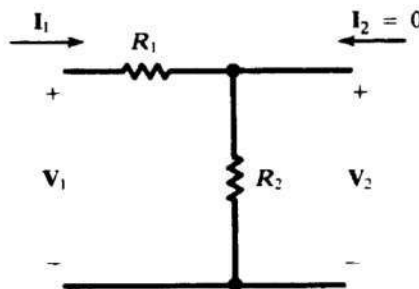
$$|H| = \frac{1}{5\sqrt{1 + 10^{-6}\omega^2}} \quad (7-2b)$$

$$\theta = -\tan^{-1}(10^{-3}\omega) \quad (7-2c)$$

7.1.2. Mạch thông cao tần và thông thấp tần

Một mạch phân áp điện trở trong điều kiện không tải với hai cổng tiêu chuẩn được vẽ trong hình 7-2. Khi đó hàm biến đổi điện áp và trở kháng vào được định nghĩa:

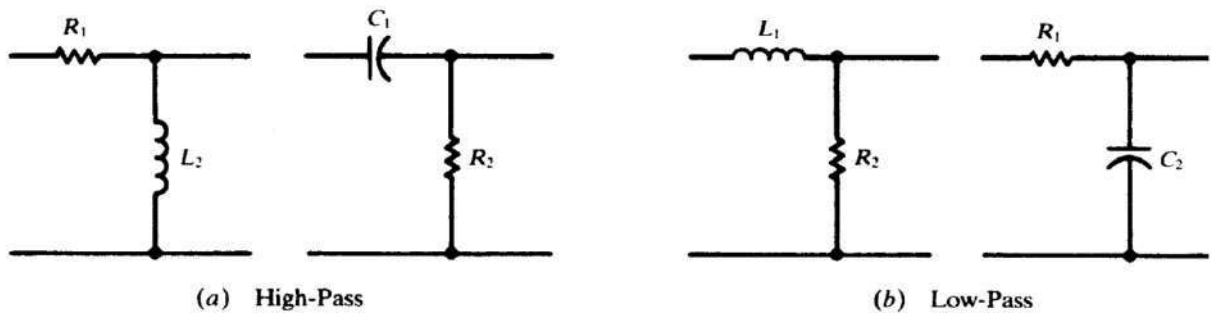
$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{và} \quad H_{z\infty}(\omega) = R_1 + R_2$$



Hình 7-3

Kí hiệu ∞ ở chỉ số của các hàm biến đổi cho biết điều kiện làm việc không tải. Cả $\mathbf{H}_{v\infty}$ và $\mathbf{H}_{z\infty}$ là các hằng số, không phụ thuộc vào tần số cho đến khi các các phần tử phản kháng tham gia vào mạch điện. Nếu mạch chứa ít nhất một trong số các phần tử điện cảm và điện dung, khi đó $\mathbf{H}_{v\infty}$ và $\mathbf{H}_{z\infty}$ là các đại lượng phức và phụ thuộc vào tần số. Nếu $\mathbf{H}_{v\infty}$ giảm khi tần số tăng, được gọi là mạch thông thấp tần (low-pass), ngược lại nếu $\mathbf{H}_{v\infty}$ giảm khi tần số giảm được gọi là mạch thông cao tần (high-pass).

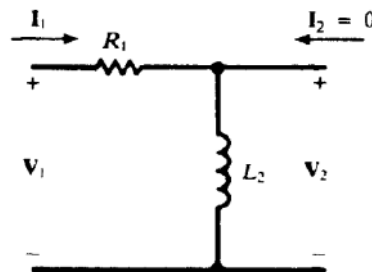
Dưới đây là bốn mạch hai phần tử trong đó hai mạch thông cao tần và hai mạch thông thấp tần.



Hình 7-4

Mạch RL trong hình 7-5 ở trạng thái hở mạch (không tải). Trở kháng vào của mạch đáp ứng tần số được xác định bằng đồ thị độ lớn và góc pha

$$\mathbf{H}_{z\infty}(\omega) = R_1 + j\omega L_2 \equiv |\mathbf{H}_z| \angle \theta_H$$



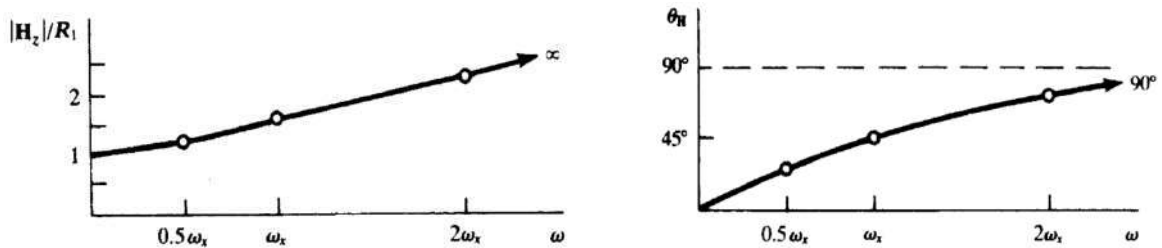
Hình 7-5

Đặt $\omega_x = R_1 / L_2$, ta có:

$$\frac{\mathbf{H}_{z\infty}(\omega)}{R_1} = 1 + j(\omega / \omega_x) = \sqrt{1 + (\omega / \omega_x)^2} \angle \tan^{-1}(\omega / \omega_x)$$

Năm giá trị của ω ($0; 0,5\omega_x; \omega_x; 2\omega_x; \infty$) được dùng để vẽ lên đồ thị của $|\mathbf{H}_z|/R_1$ được mô tả trong hình 7-6. Biên độ đạt tới giá trị vô cùng lớn khi tăng tần số, như vậy với tần số rất cao, dòng điện trong mạch sẽ bằng không.

ω	$ \mathbf{H}_z /R_1$	θ_H
0	1	0°
$0,5 \omega_x$	$0,5\sqrt{5}$	$26,6^\circ$
ω_x	$\sqrt{2}$	45°
$2 \omega_x$	$\sqrt{5}$	$63,4^\circ$
∞	∞	90°



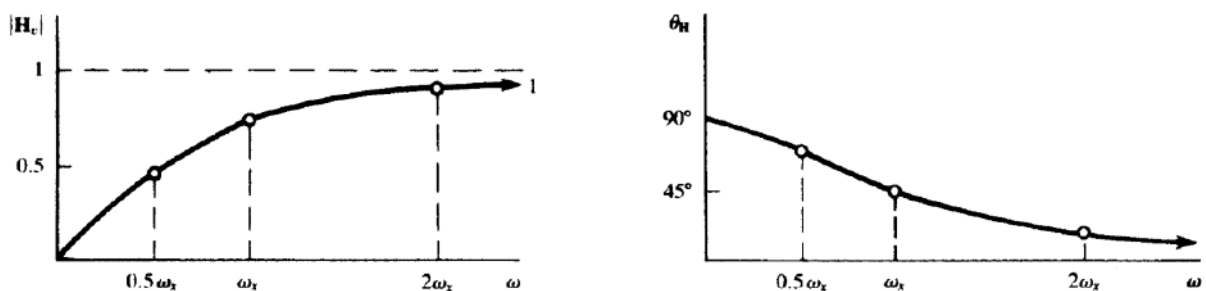
Hình 7-6

Cũng tương tự khi xét hàm biến đổi điện áp ra-vào của mạch. Với điều kiện không tải:

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 - j(\omega_x/\omega)}$$

$$|\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}} \quad \text{và} \quad \theta_H = \tan^{-1}(\omega_x/\omega)$$

Đồ thị biên độ và góc pha được vẽ trong hình 7-7. Hàm biến đổi đạt giá trị bằng một khi tần số tiến tới vô cùng, khi đó điện áp ra bằng điện áp vào. Do đó mạch điện được gọi là thông cao tần (high-pass).

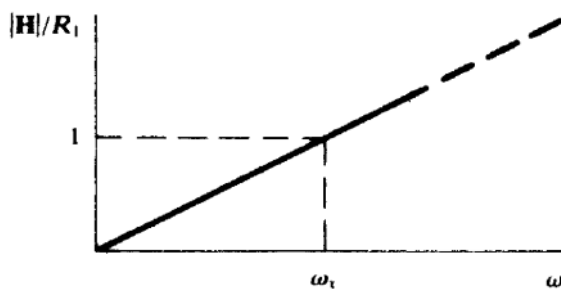


Hình 7-7

Biến đổi trở kháng của mạch thông cao tần trong điều kiện không tải:

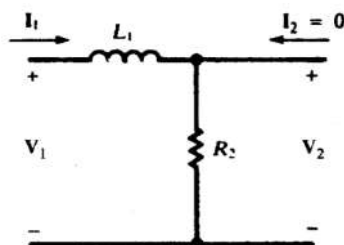
$$\mathbf{H}_{\infty}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{H}_{\infty}(\omega)}{R_1} = j(\omega/\omega_x)$$

Góc pha không đổi bằng 90°, một phần đồ thị của biên độ theo tần số ω là đường thẳng tương tự như đồ thị của ωL theo ω (xem hình 7-8).



Hình 7-8

Nếu thay đổi vị trí của R và L ta sẽ được mạch thông thấp tần (hình 7-9). Với điều kiện không tải:

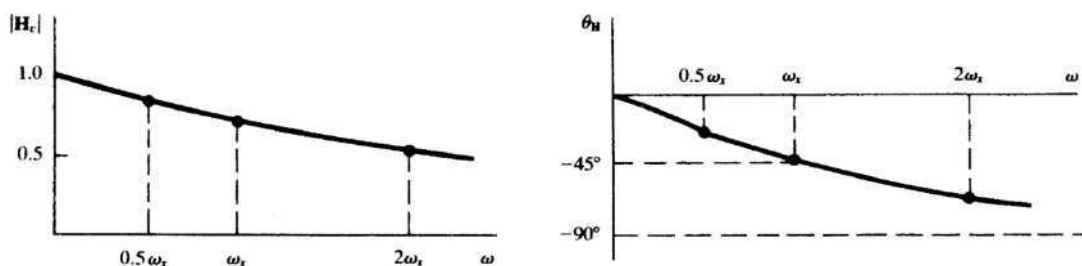


Hình 7-9

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \quad \text{với } \omega_x = R_2/L_1$$

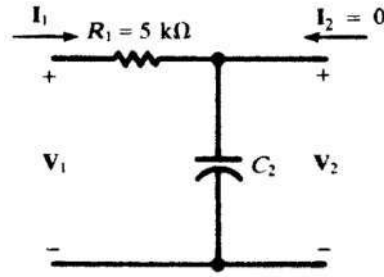
$$|\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} \quad \text{và} \quad \theta_H = \tan^{-1}(-\omega/\omega_x)$$

Đồ thị biên độ và góc pha được vẽ trên hình 7-10. Hàm biến đổi điện áp đạt giá trị bằng không khi tần số cao và đạt giá trị bằng một khi tần số $\omega = 0$. Do đó mạch được gọi là thông thấp tần (low-pass).



Hình 7-10

Đối với mạch hai phần tử RC để xác định tính chất thông cao tần và thấp tần ta xét ví dụ sau: Xác định hàm biến đổi điện áp $\mathbf{H}_{v\infty}$ từ mạch hở trong hình 7-11. Với tần số bao nhiêu thì hàm biến đổi điện áp có giá trị bằng $1/\sqrt{2}$ nếu như $C_2 = 10\text{nF}$ và $C_2 = 1\text{nF}$.



Hình 7-11

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{R_1 + 1/j\omega C_2} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$$

$$\text{với } \omega_x = \frac{1}{R_1 C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{C_2}$$

$$(a): |\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}}$$

$$\text{Do } |\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega = \omega_x = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

$$f = \omega / 2\pi = 3,18 \text{ kHz}$$

$$(b): \omega = \omega_x = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$$

$$f = \omega / 2\pi = 31,8 \text{ kHz}$$

So sánh hai kết quả (a) và (b) ta thấy khi giá trị C_2 lớn hơn thì tần số để $\mathbf{H}_v$ giảm và đạt giá trị $1/\sqrt{2} = 0,707$ nhỏ hơn. Như trong hình 7-10 đồ thị dịch về phía trái. Tương ứng với việc thêm tụ vào song song với C_2 làm giảm đáp ứng của mạch.

7.1.3. Tần số tới hạn, tần số nửa công suất và dải tần

Tần số ω được tính trong phần trước khi $|\mathbf{H}_v| = 0,707|\mathbf{H}_v|_{\max}$ được gọi là tần số “nửa công suất” (half power frequency). Trong trường hợp này công suất vào của mạch hình 7-11 đạt một nửa công suất cực đại khi

$$\left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = R_1$$

Và như vậy $\omega = \omega_x$.

Một cách tổng quát, bất kỳ mạch có hàm biến đổi không là hằng số ta luôn có $H(\omega)$ đạt giá trị lớn nhất tại một tần số tới hạn nhất định ω_x . Ta sẽ gọi tần số mà tại đó $|H_v(\omega)| = 0,707|H_v(\omega_x)|$ là tần số nửa công suất (điểm nửa công suất), trong đó tần số tương ứng với điểm 50 phần trăm công suất. Trong phần lớn các mạch, khi $0 < \omega_x < \infty$, ta sẽ có hai điểm nửa công suất, một điểm dưới và một điểm trên tần số tới hạn được gọi là điểm tần số nửa công suất dưới và trên. Phạm vi giữa hai điểm đó được gọi là độ rộng dải tần xung quanh tần số tới hạn.

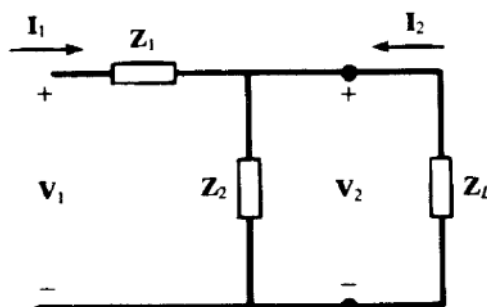
7.1.4. Tổng quát hóa mạch hai cửa hai phần tử

Mạch điện có bản RL hoặc RC như đã xét trong phần trên có thể tổng quát hóa bằng các trở kháng Z_1 và Z_2 . Trở kháng tải Z_L được kết nối vào cổng ra của mạch.

Theo điều kiện phân áp:

$$V_2 = \frac{Z'}{Z_1 + Z'} V_1 \rightarrow H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z_1 + Z'}$$

Trong đó: $Z' = Z_2 Z_L / (Z_2 + Z_L)$ là trở kháng tương đương của Z_2 và Z_L song song. Các hàm biến đổi khác của mạch được trình bày trong bảng 7-1.



Hình 7-12

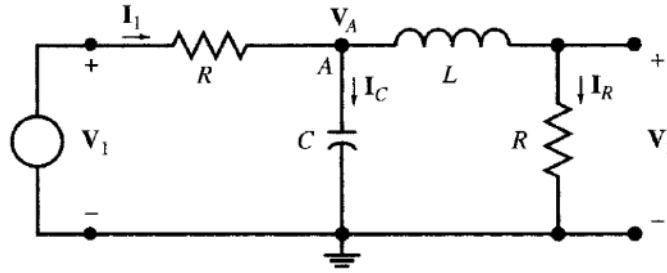
Bảng 7-1:

	$H_z = \frac{V_1}{I_1}$ (Ω)	$H_v = \frac{V_2}{V_1}$	$H_i = \frac{I_2}{I_1}$	$H_v H_z = \frac{V_2}{I_1}$ Ω	$\frac{H_i}{H_z} = \frac{I_2}{V_1}$ (S)
Ngắn mạch $Z_L = 0$	Z_1	1	0	-1	$-\frac{1}{Z_1}$
Hở mạch $Z_L = \infty$	$Z_1 + Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$	0	Z_2	0
Tải Z_L	$Z_1 + Z'$	$\frac{Z'}{Z_1 + Z'}$	$\frac{-Z_2}{Z_2 + Z_L}$	Z'	$\frac{-Z'}{Z_L(Z_1 + Z')}$

7.1.5. Đáp ứng tần số và hàm biến đổi mạch điện

Đáp ứng tần số của mạch điện có thể xác định bằng cách thay $j\omega$ vào hàm biến đổi mạch điện. Phương pháp hiệu quả này được trình bày trong ví dụ dưới đây:

Ví dụ: Xác định (a) hàm biến đổi mạch điện $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2 / \mathbf{V}_1$ của mạch trong hình 7-13, (b) $\mathbf{H}(j\omega)$ khi $LC = 2/\omega_0^2$ và $L/C = R^2$, và (c) biên độ và góc pha của $\mathbf{H}(j\omega)$ trong câu (b) với $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.



Hình 7-13

(a): Giả thiết đã biết $\mathbf{V}_2$, dựa vào dạng tổng quát Ls và $1/Cs$ tìm biểu thức $\mathbf{V}_1$.

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_2}{R} \rightarrow \mathbf{V}_A = (R + Ls)\mathbf{I}_R = \frac{(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2 \quad (7-3)$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_A Cs = \frac{Cs(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_2}{R} + \frac{Cs(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2 = \frac{1 + Cs(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_A + \mathbf{I}_1 R = \frac{(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2 + R \frac{1 + Cs(R + Ls)}{R} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = (1 + sL/R)\mathbf{V}_2 + [1 + Cs(R + Ls)]\mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = [2 + (L/R + CR)s + LCs^2]\mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{2 + (L/R + CR)s + LCs^2} \quad (7-4a)$$

(b): Từ $LC = 2/\omega_0^2$ và $L/C = R^2 \rightarrow L = \sqrt{2}R/\omega_0$ và $C = \sqrt{2}/R\omega_0$ thay vào biểu thức 7-4a, ta được

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \right) \quad \text{thay } s = j\omega$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2} \right) \quad (7-4b)$$

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^4} \right) \quad \text{và} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Lưu ý, $\mathbf{H}(j\omega)$ không phụ thuộc vào R . Mạch điện thông thấp tần đối với các tần số sin thấp thì hàm biến đổi lớn và các tần số cao thì hàm biến đổi nhỏ. Đây là mạch lọc tần số thấp có tần số nửa sóng bằng $\omega = \omega_0$ và đáp ứng biên độ $|\mathbf{H}(j\omega_0)| = |\mathbf{H}(0)|/\sqrt{2} = \sqrt{2}/4$ và đáp ứng góc pha $\theta = \angle \mathbf{H}(j\omega_0) = \pi/2$

(c): Với $\omega_0 = 1$.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s} \right)$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}\omega - \omega^2} \right) \quad (7-4c)$$

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \omega^4} \quad \text{và} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2} \right)$$

Mạch RC trong hình 7-4b được xếp loại mạch lọc tần thấp bậc một với tần số nửa công suất $\omega_0 = 1/R_1C_2$. Mạch trong hình 7-13 được xếp loại mạch lọc bậc hai.

7.1.6. Đáp ứng tần số xác định theo giản đồ cực-zero

Đáp ứng tần số của mạch điện là giá trị của hàm biến đổi $\mathbf{H}(s)$ tại $s = j\omega$. Như vậy có thể xác định được $\mathbf{H}(j\omega)$ bằng phương pháp đồ thị. Phương pháp này cho phép dựng đồ thị $\mathbf{H}(j\omega)$ nhanh chóng và được sử dụng nhiều khi có thể dựng được đường đồ thị của đáp ứng gần các cực và zero mà không cần phải giải hoàn toàn.

Ví dụ: Tìm các cực và zero của hàm $\mathbf{H}(s) = 10s/(s^2 + 2s + 26)$

Vẽ giản đồ cực-zero trong miền tần số và sử dụng giản đồ này vẽ đường đồ thị đáp ứng của $\mathbf{H}(j\omega)$.

Các zero: $z_1 = 0$

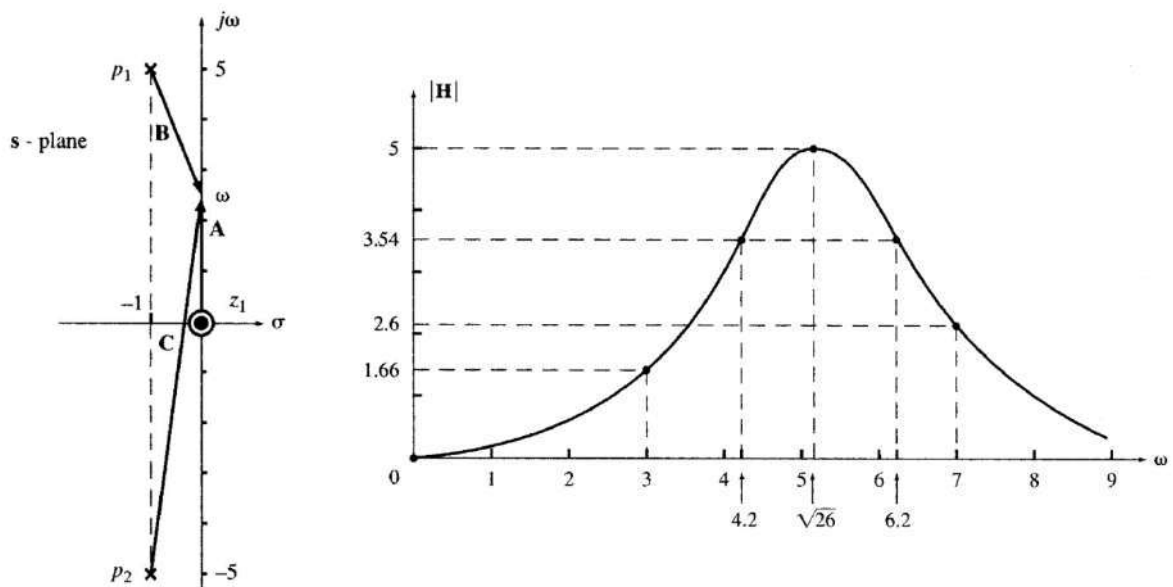
Các cực: được xác định từ phương trình $s^2 + 2s + 26 = 0$

$$p_1 = -1 - j\sqrt{5}$$

$$p_2 = -1 + j\sqrt{5}$$

Giản đồ cực-zero trên hình 7-14a. Hàm biến đổi mạch được viết

$$\mathbf{H}(s) = 10 \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



Hình 7-14

Với mỗi giá trị s , biểu thức $s - z_1$ là véc tơ xuất phát từ điểm gốc zero z_1 và kết thúc tại điểm s trong hệ tọa độ phức.

Tương tự như đối với $s - p_1$ và $s - p_2$ cũng là các véc tơ vẽ từ điểm p_1 và p_2 và kết thúc tại điểm s . Như vậy với mỗi giá trị bất kỳ của s , hàm biến đổi mạch đều có thể biểu diễn bằng biểu thức của ba véc tơ A , B và C :

$$H(s) = 10 \frac{A}{B \times C}$$

Trong đó: $A = s - z_1$; $B = s - p_1$ và $C = s - p_2$

Biên độ và góc pha của $H(s)$ tại bất kỳ điểm nào trên trục tọa độ phức đều có thể xác định:

$$|H(s)| = 10 \frac{|A|}{|B| \times |C|} \quad (7-5a)$$

$$\angle H(s) = \angle A - \angle B - \angle C \quad (7-5b)$$

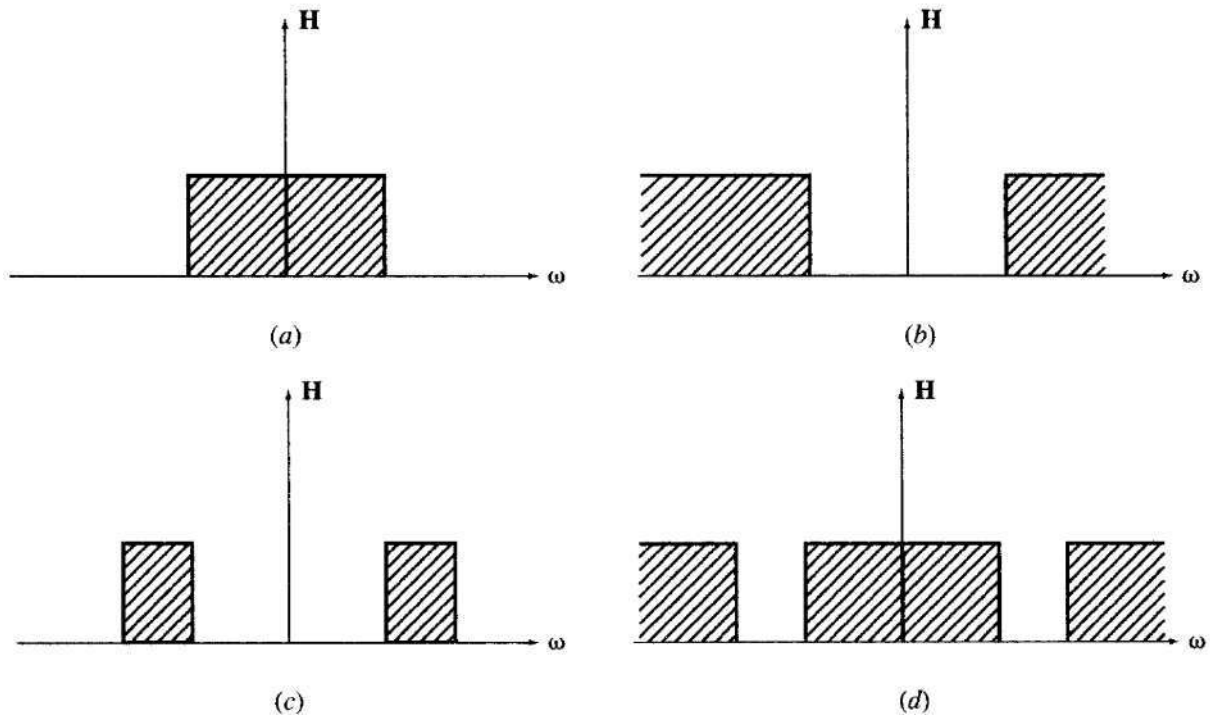
Bằng cách thay s trên trục $j\omega$ (hình 7-14a), cho biến thiên từ 0 đến ∞ , đo biên độ và góc pha của A , B và C , dùng công thức 7-5a và 7-5b có thể tìm được đồ thị biên độ và góc pha. Hình 7-14b là đồ thị biên độ.

7.2. Mạch lọc

7.2.1. Mạch lọc lý tưởng và mạch lọc thực tế

Ở dạng tổng quát, mạng điện nói chung đều chọn lọc tần số. Bộ lọc là một loại mạng được thiết kế đặc biệt để chọn tần số theo đặc tính nhất định. Bộ lọc cho những tần số nhất định qua (pass-band) và chặn những tần số khác (stop-band). Một cách lý tưởng, trong phạm vi cho qua (pass-band), $H(j\omega) = 1$ và

trong phạm vi chặn (stop-band) $H(j\omega) = 0$. Như vậy có thể nhận biết và phân loại các bộ lọc sau: tần số thấp (low pass) hình 7-15a; tần số cao (high-pass) hình 7-15b; dải tần qua (band-pass) hình 7-15c và dải tần chặn (band-stop) hình 7-15d. Bộ lọc lý tưởng không thực hiện được trong điều kiện thực tế, nhưng chúng ta có thể thực hiện theo ý muốn các bộ lọc gần như bộ lọc lý tưởng. Bộ lọc có đặc tính càng gần như lý tưởng thì mạng càng phức hợp.



Hình 7-15

Các mạch lọc RC hoặc RL như trong mục trên là mạch lọc bậc một. Chúng có đặc tính khác xa lý tưởng. Như trong ví dụ dưới đây, đáp ứng tần số của mạch có thể đạt gần như đặc tính bộ lọc lý tưởng nếu như tăng bậc của mạch lọc.

Ví dụ: Ba mạch có hàm biến đổi $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ và $\mathbf{H}_3$ được cho dưới đây:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{s+1}; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}; \quad \mathbf{H}_3 = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

Xác định biên độ đáp ứng tần số của các mạch. Chứng minh các mạch đều là lọc thấp tần và có tần số nửa biên độ tại $\omega_0 = 1$.

$$|\mathbf{H}_1|^2 = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$|\mathbf{H}_2|^2 = \frac{1}{(1-\omega^2 + j\sqrt{2}\omega)(1-\omega^2 - j\sqrt{2}\omega)} = \frac{1}{1+\omega^4}$$

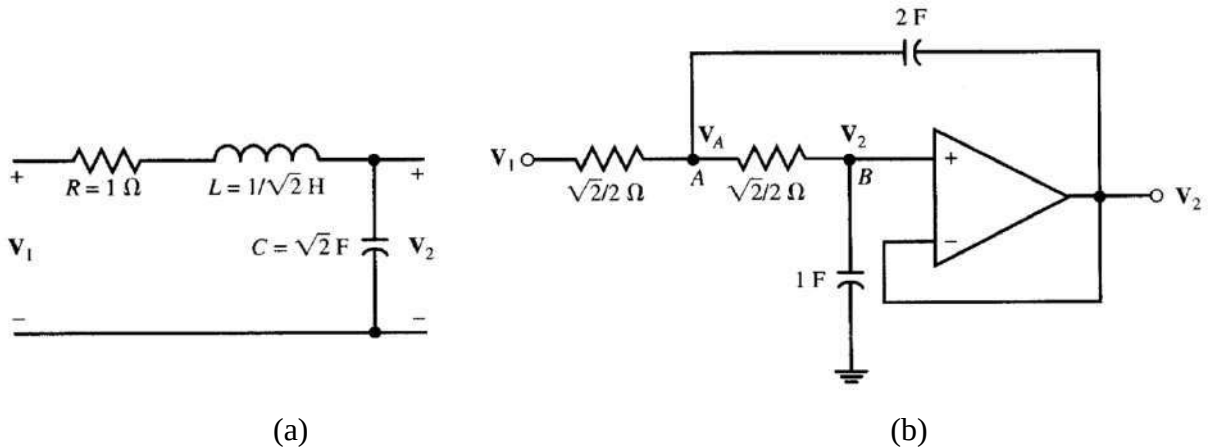
$$|\mathbf{H}_3|^2 = \frac{1}{(1+\omega^2)(1-\omega^2 + j\omega)(1-\omega^2 - j\omega)} = \frac{1}{1+\omega^6}$$

Với cả ba hàm biến đổi tại các tần số $\omega = 0, 1$ và ∞ , chúng ta thấy hàm biến đổi có biên độ $|\mathbf{H}_1|^2$ lần lượt bằng 1, 1/2 và 0. Như vậy cả ba hàm biến đổi mạch đều là thông thấp tần và có cùng tần số nửa công suất $\omega_0 = 1$. Chúng lần lượt là mạch lọc bậc một, bậc hai và bậc ba. Với mạch lọc bậc cao hơn, đường cắt miền đáp ứng tần số sắc nét hơn.

7.2.2. Mạch lọc thụ động và chủ động

Các mạch lọc chỉ có các phần tử điện trở và điện cảm và tụ điện được gọi là mạch lọc thụ động. Còn các mạch có thêm phần tử nguồn phụ thuộc được gọi là mạch lọc chủ động.

Mạch lọc thụ động không cần có nguồn bên ngoài và kéo dài hơn. Mạch lọc chủ động thông thường có phần tử RC và khuếch đại. Trong hình 7–16a là mạch lọc thụ động bậc hai thông thấp tần, còn trong hình 7–16b là mạch lọc chủ động với đáp ứng tần số $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ tương đương với mạch trong hình 7–16a.



Hình 7–16

Ví dụ: Tìm hàm biến đổi điện áp $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ của mạch ở hình 7–16a và 7–16b. Trong hình 7–16a ta xác định hàm biến đổi điện áp theo qui tắc phân áp

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{Cs} \frac{\mathbf{V}_1}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{\mathbf{V}_1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{LC} \frac{\mathbf{V}_1}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Thay các giá trị $R = 1; L = 1/\sqrt{2}; C = \sqrt{2}$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \rightarrow \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Trong hình 7–16b, áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho nút A và B (với $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_2$)

$$\text{Nút A: } \frac{\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_1}{\sqrt{2}/2} + \frac{\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_2}{\sqrt{2}/2} + \frac{\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_2}{1/2s} = 0$$

$$(\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_1)\sqrt{2} + (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_2)\sqrt{2} + (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_2)2s = 0 \quad (7-6a)$$

$$\text{Nút B: } \frac{\mathbf{V}_2}{1/2s} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_A}{\sqrt{2}/2} = 0$$

$$\mathbf{V}_2 2s + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_A)\sqrt{2} = 0 \quad (7-6b)$$

Khử $\mathbf{V}_A$ từ phương trình 7-6a và 7-6b, hàm biến đổi mạch $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ được xác định:

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Hai mạch điện trong hình 7-6a và 7-6b có cùng hàm biến đổi mạch. Chúng đều là mạch lọc bậc hai thông thấp tần với tần số nửa công suất bằng nhau $\omega = 1\text{rad/s}$

7.2.3. Bộ lọc thông dải tần và cộng hưởng

Hàm biến đổi mạch sau đây được gọi là hàm thông dải tần (band-pass)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{ks}{s^2 + as + b} \text{ trong đó } k > 0; a > 0; b > 0 \quad (7-7)$$

Tên bộ lọc thông dải tần đặc biệt thích hợp khi các cực là số phức gần trục $j\omega$ và cách xa gốc tọa độ phức. Đáp ứng của mạch lọc thông dải tần được xác định trong biểu thức:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{kj\omega}{b - \omega^2 + aj\omega}$$

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{k^2\omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2} = \frac{k^2}{a^2 + (b - \omega^2)^2/\omega^2} \quad (7-8)$$

Biên độ đáp ứng lớn nhất $|\mathbf{H}|$ khi $b - \omega^2 = 0$ hay $\omega = \sqrt{b}$ được gọi là tần số trung tâm ω_0 . Khi đó đáp ứng $|\mathbf{H}|_{\max} = |\mathbf{H}(\omega_0)| = k/a$. Tần số nửa công suất ω_l và ω_h được xác định từ:

$$|\mathbf{H}(\omega_l)|^2 = |\mathbf{H}(\omega_h)|^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{H}(\omega_0)|^2 \quad (7-9a)$$

Áp dụng các biểu thức 7-8 và 7-9a, ta tìm được ω_l và ω_h là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(b - \omega^2)^2}{\omega^2} = a^2 \quad (7-9b)$$

$$\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 \quad (7-9c)$$

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 \quad (7-9d)$$

Từ các biểu thức 7-9c và 7-9d, ta có:

$$\omega_h - \omega_l = a \quad \text{và} \quad \omega_h \omega_l = b = \omega_0^2 \quad (7-10a)$$

Dải tần thông β được định nghĩa:

$$\beta = \omega_h - \omega_l = a \quad (7-10b)$$

Hệ số chất lượng Q được định nghĩa:

$$Q = \omega_0 / \beta = \sqrt{b} / a \quad (7-10c)$$

Hệ số chất lượng được đo bằng độ sắc nét của dạng đáp ứng tần số xung quanh tần số trung tâm. Hiện tượng này được gọi là cộng hưởng. Khi hệ số chất lượng cao, các tần số ω_l và ω_h tương ứng có thể tính gần đúng theo $\omega_0 - \beta/2$ và $\omega_0 + \beta/2$.

Ví dụ: Xét hàm biến đổi mạch $\mathbf{H}(s) = \frac{10s}{s^2 + 300s + 10^6}$.

(a) Hãy xác định tần số trung tâm, tần số nửa công suất thấp và cao, dải tần thấp và hệ số chất lượng.

(b) Cũng hỏi như trên nhưng với hàm $\mathbf{H}(s) = \frac{10s}{s^2 + 30s + 10^6}$

(a): Tần số trung tâm: $\omega_0 = \sqrt{b} = \sqrt{10^6} = 1000 \text{ rad/s}$

Tần số nửa công suất:

$$\omega_l = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} - 300/2 = 861,2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} + 300/2 = 1161,2 \text{ rad/s}$$

Dải tần: $\beta = \omega_h - \omega_l = a = 300 \text{ rad/s}$

Hệ số chất lượng: $Q = \omega_0 / \beta = \sqrt{b} / a = 1000 / 300 = 3,3$

(b): Tần số trung tâm: $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$

Tần số nửa công suất: $\omega_l = \sqrt{30^2/4 + 10^6} - 30/2 = 985,1 \text{ rad/s}$

$$\omega_h = \sqrt{30^2/4 + 10^6} + 30/2 = 1015,1 \text{ rad/s}$$

Dải tần: $\beta = 300 \text{ rad/s}$

Hệ số chất lượng: $Q = 1000 / 30 = 33,3$

Các tần số ω_l và ω_h có thể tính gần đúng với độ chính xác tương đối cao:

$$\omega_l = \omega_0 - \beta / 2 = 1000 - 15 = 985 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \omega_0 + \beta / 2 = 1000 + 15 = 1015 \text{ rad/s}$$

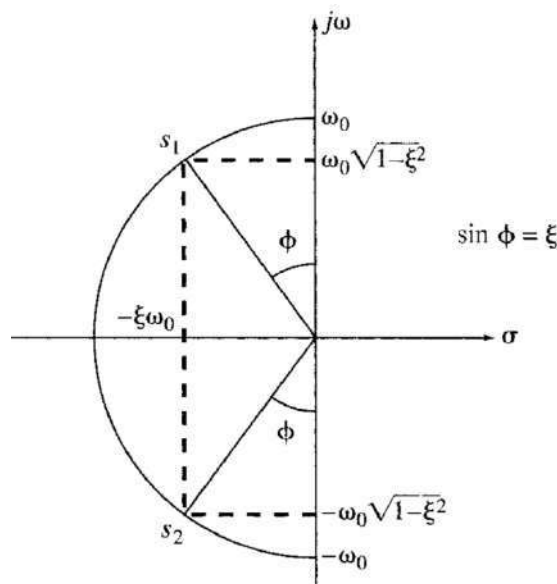
7.2.4. Tần số tự nhiên và hệ số tắt dần

Mẫu số của biểu thức 7-7 có thể viết dưới dạng:

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

Trong đó: $\omega_0 = \sqrt{b}$ được gọi là tần số tự nhiên và $\xi = a / 2\sqrt{b}$ được gọi là hệ số tắt dần.

Với $\xi > 1$, mạch có hai cực riêng biệt trên trục thực âm và được gọi là đáp ứng xung tắt dần. Với $\xi = 1$, mạch có một cực thực kép tại $-\omega_0$ và được gọi là đáp ứng tắt dần tới hạn. Với $\xi < 1$, mạch có hai cực phức tại $-\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ và $-\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Các cực phức này có vị trí tại nửa vòng tròn nằm tại nửa trái mặt phẳng tọa độ phức với bán kính ω_0 . Vị trí của các cực có góc với trục thực $\varphi = \sin^{-1} \xi$ (xem hình 7-17). Mạch có đáp ứng dưới tắt dần và có thành phần dao động. Hệ số tắt dần bằng một nửa giá trị nghịch đảo của hệ số chất lượng.



Hình 7-17

7.3. Cộng hưởng

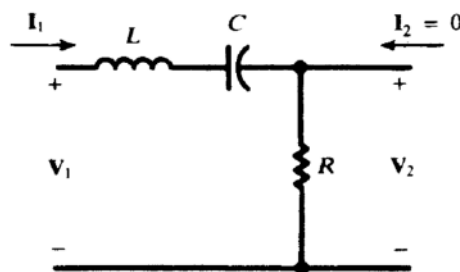
7.3.1. Mạch RLC nối tiếp, cộng hưởng nối tiếp

Mạch RLC nối tiếp như trong hình 7-18 trong điều kiện hở mạch, trở kháng vào:

$$Z_{in}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

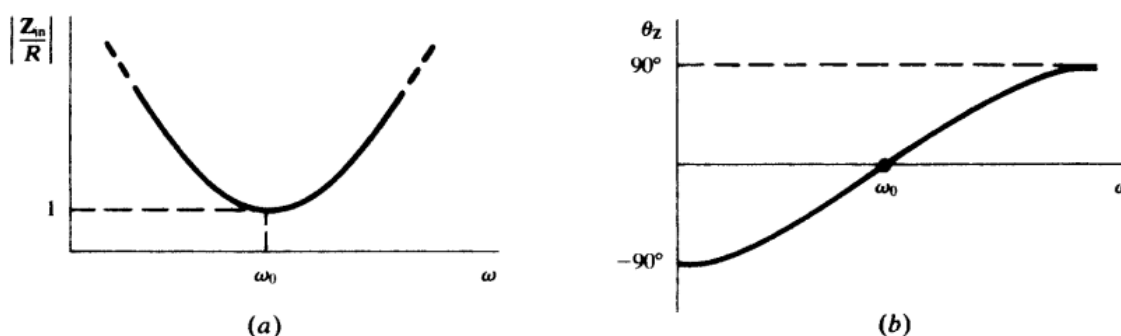
Mạch điện trong trạng thái cộng hưởng nối tiếp (hoặc cộng hưởng trở kháng thấp) khi $Z_{in}(\omega)$ là số thực (và $|Z_{in}(\omega)|$ có giá trị nhỏ nhất) có nghĩa:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Hình 7-18

Trên hình 7-19 mô tả đáp ứng tần số của mạch RLC nối tiếp. Biên độ tỉ lệ nghịch với tần số khi dung kháng lớn hơn, ở phạm vi tần số thấp. Trong khi cảm kháng lớn hơn, biên độ tỉ lệ với tần số, ở phạm vi tần số cao. Tương ứng, thuần phản kháng tại tần số nhỏ hơn ω_0 là dung kháng và góc của Z_{in} sẽ âm. Tại tần số lớn hơn ω_0 , mạch có tính chất điện cảm và góc của Z_{in} sẽ dương.



Hình 7-19

Hàm biến đổi điện áp của mạch được xác định theo qui tắc phân áp

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{R}{Z_{in}(\omega)} = RY_{in}(\omega)$$

Đáp ứng tần số (chỉ xét đến biên độ) được vẽ đồ thị trong hình 7-20, đường cong này chỉ là nghịch đảo của đồ thị hình 7-19a. Lưu ý, trạng thái chặn xuất hiện cả phía tần số thấp hơn và cao hơn tần số cộng hưởng ω_0 . Điểm nửa công suất tại đó đáp ứng biên độ bằng 0,707 tại tần số ω_l và ω_h .

Dải tần thông là độ rộng giữa các tần số ω_l và ω_h .

Hệ số chất lượng, $Q = \omega_0 L / R$ có thể xác định từ trạng thái cộng hưởng mạch RLC nối tiếp.

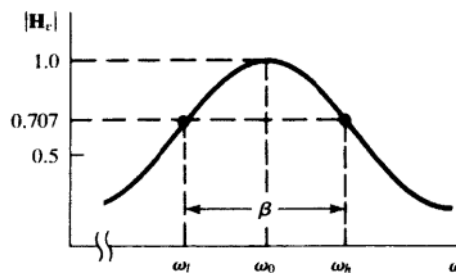
Tần số nửa công suất được xác định theo biểu thức từ các phần tử của mạch hoặc ω_0 và Q_0 như dưới đây:

$$\omega_h = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0} \right)$$

$$\omega_l = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0} \right)$$

$$\text{Dải tần thông: } \beta = \omega_h - \omega_l = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Biểu thức dải tần thông cho thấy, dải tần càng hẹp khi hệ số chất lượng càng cao.



Hình 7-20

Hệ số chất lượng

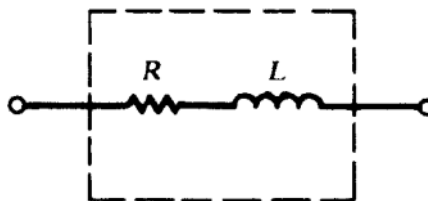
Thông qua hệ số chất lượng có thể đánh giá phần tử hoặc mức độ hoàn thiện của mạch. Hệ số chất lượng được định nghĩa:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{năng lượng tích lũy lớn nhất}}{\text{năng lượng trao đổi trong chu kỳ}} \right)$$

Hệ số chất lượng là đại lượng không đơn vị, có thể xác định theo các biểu thức ở phần 7.2.3 và 7.3.1.

Cuộn cảm thực tế được mô hình hóa bằng điện trở R nối tiếp điện cảm L (hình 7-21). Năng lượng tích trữ lớn nhất: $\frac{1}{2} L I_{\max}^2$ và năng lượng trao đổi trong

chu kỳ: $(I_{\text{eff}}^2 R) \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{I_{\max}^2 R \pi}{\omega}$

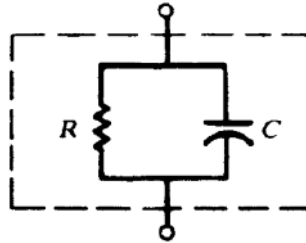


Hình 7-21

$$\text{Từ đó, hệ số chất lượng của cuộn cảm: } Q_{\text{ind}} = \frac{\omega L}{R}$$

Tụ điện thực tế cũng được mô hình hóa bằng điện dung C song song với điện trở R (hình 7–22). Năng lượng tích trữ lớn nhất $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$ và năng lượng trao đổi trong một chu kỳ $V_{\max}^2\pi/\omega R$, từ đó:

$$Q_{cap} = \omega CR$$



Hình 7–22

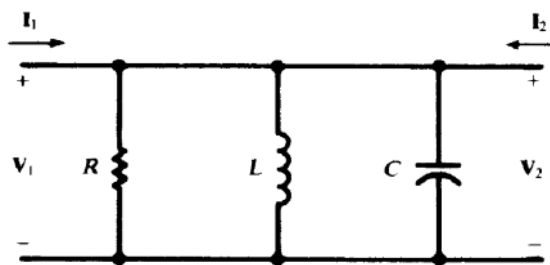
Hệ số chất lượng của mạch RLC nối tiếp được xem xét trong mục 7.3.1. thông thường được xét trong trạng thái cộng hưởng, khi đó biểu thức của hệ số chất lượng:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

7.3.2. Mạch RLC song song, cộng hưởng song song

Mạch RLC song song như trong hình 7–23. Xem xét hàm biến đổi điện áp V_2/V_1 với điều kiện hở mạch, dẫn nạp vào sẽ bằng:

$$Y_{in}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z_{in}(\omega)}$$



Hình 7–23

Mạch điện có trạng thái cộng hưởng (hoặc cộng hưởng trở kháng cao) khi $Y_{in}(\omega)$ hoặc tương đương $Z_{in}(\omega)$ là số thực ($Y_{in}(\omega)$ đạt giá trị nhỏ nhất, $Z_{in}(\omega)$ đạt giá trị lớn nhất) khi:

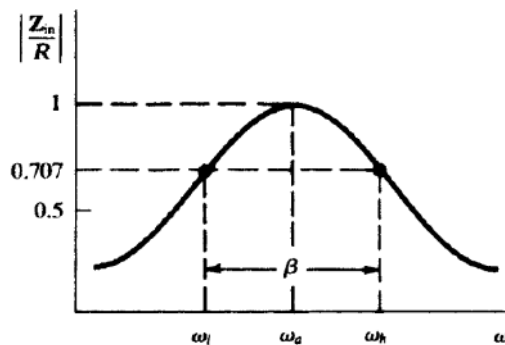
$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \rightarrow \omega = \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Kí hiệu ω_a được dùng cho giá trị $1/\sqrt{LC}$ trong trường hợp cộng hưởng trở kháng cao. Mạch phức hợp nối tiếp – song song có thể có tới vài tần số cộng hưởng trở kháng cao ω_a và vài tần số cộng hưởng trở kháng thấp ω_0 .

Trở kháng vào của mạch song song:

$$\frac{Z_{in}(\omega)}{R} = \frac{1}{1 + jR(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

Đồ thị đáp ứng (chỉ biên độ) được vẽ trong hình 7–24. Tần số nửa công suất ω_l và ω_h được thể hiện trên đồ thị.



Hình 7–24

Tương tự với mạch RLC nối tiếp cộng hưởng, dải tần thông được xác định theo biểu thức:

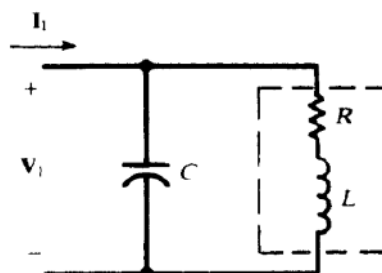
$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a}$$

Hệ số chất lượng Q_a tại $\omega = \omega_a$:

$$Q_a = \frac{R}{\omega_a L} = \omega_a RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

7.3.3. Mạch cộng hưởng LC song song thực tế

Mạch LC song song được áp dụng trong các ứng dụng tần số của kỹ thuật điện tử như bộ thu sóng theo tần số. Trong đó, tụ điện thường được coi là thuần điện dung C, còn tổn thất trong cuộn cảm được tính đến. Sơ đồ thực tế của mạch LC được mô tả trong hình 7–25.



Hình 7–25

Trở kháng vào được xác định:

$$\mathbf{Y}_{in}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}]$$

Tần số cộng hưởng ω_a , được xác định từ biểu thức:

$$\omega_a C - \frac{\omega_a L}{R^2 + (\omega_a L)^2} = 0 \rightarrow \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

Tại tần số cộng hưởng ω_a , $\mathbf{Y}_{in}(\omega_a) = \frac{RC}{L}$ và hệ số chất lượng Q_a

$$Q_{ind} = \frac{\omega_a L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - 1}$$

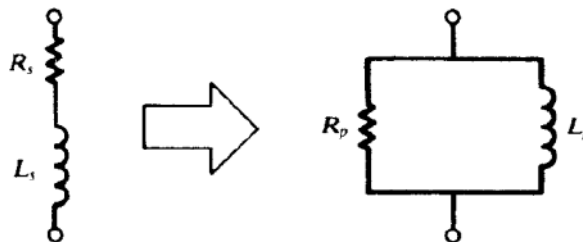
Nếu $Q_{ind} \geq 10$ thì $\omega_a \approx 1/\sqrt{LC}$ và $\left| \frac{Z_{in}(\omega_a)}{R} \right| \approx Q_{ind}^2$

Đáp ứng tần số giống như đối với mạch RLC song song, ngoại trừ cộng hưởng trở kháng cao đạt được với tần số thấp hơn đối với các mạch có Q_{ind} thấp. Và tần số cộng hưởng được xác định theo biểu thức:

$$\omega_a = \left(\frac{1}{LC} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (1/Q_{ind})^2}}$$

7.3.4. Biến đổi tương đương nối tiếp – song song

Thông thường phân tích đáp ứng của mạch điện, thuận lợi hơn cả chuyển đổi mạch RL nối tiếp về dạng RL song song (hình 7-26). Với các giá trị cho trước R_s và L_s và tần số làm việc ω của mạch đưa nối tiếp, các phần tử của mạch song song R_p và L_p được xác định theo điều kiện biến đổi tương đương dẫn nạp.



Hình 7-26

$$\mathbf{Y}_s = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{và} \quad \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

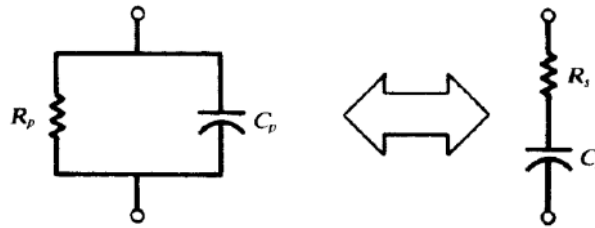
Kết quả biến đổi tương đương:

$$R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$L_p = L_s \left[1 + \left(\frac{R_s}{\omega L_s} \right)^2 \right] = R_s (1 + 1/Q_s^2)$$

Nếu $Q_s \geq 10$, thì: $R_p \approx R_s Q_s^2$ và $L_p \approx L_s$

Đối với mạch RC, chuyển đổi tương đương cũng được thực hiện nhằm thuận lợi hơn cho phân tích đáp ứng. Có thể dùng trở kháng hoặc dẫn nạp tương đương để thực hiện (hình 7-27)



Hình 7-27

Biến đổi song song $\rightarrow$ nối tiếp

$$R_s = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$$

$$C_s = C_p \left[1 + \frac{1}{(\omega C_p R_p)^2} \right] = C_p (1 + 1/Q_p^2)$$

Biến đổi nối tiếp $\rightarrow$ song song

$$R_p = R_s \left[1 + \frac{1}{(\omega C_s R_s)^2} \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1 + (\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1 + 1/Q_s^2}$$

Với cả hai biến đổi của mạch RC, biểu thức tương đương đều phụ thuộc vào tần số làm việc.

7.3.5. Giải đồ Locus

Trước đây, đáp ứng tần số của mạch điện được thể hiện bằng các đồ thị riêng biệt của biên độ và góc pha theo tần số ω . Tuy nhiên các thông tin này có thể được biểu diễn trên một đồ thị bằng một đường cong (đồ thị Locus) trên hệ trục tọa độ phức với quỹ đạo theo các điểm của hàm biến đổi mạch điện khi tần số ω thay đổi từ 0 đến ∞ . Phần này trình bày về đồ thị Locus cho trở kháng vào

hoặc dẫn nạp vào; trong một số trường hợp biến số không phải là tần số mà là một biến khác (thường là điện trở R).

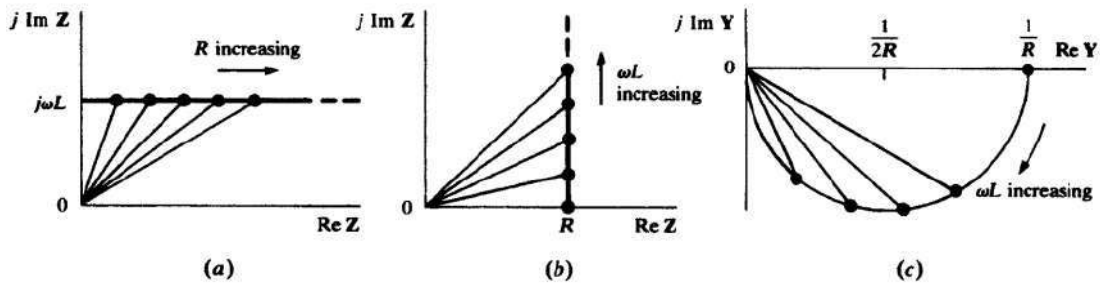
Đối với mạch RL nối tiếp, hình 7-28a là đồ thị Locus Z khi ωL được cố định và R biến thiên; hình 7-28b là đồ thị Locus của Z khi R cố định và L hoặc ω biến thiên; và hình 7-28c là đồ thị Locus của Y khi R cố định và L hoặc ω biến thiên. Đồ thị cuối cùng được xác định từ phương trình:

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \tan^{-1} \frac{-\omega L}{R}$$

Với $\omega L = 0$ thì $Y = \frac{1}{R} \angle 0^\circ$

$\omega L \rightarrow \infty$ thì $Y \rightarrow 0 \angle -90^\circ$

$\omega L = R$ thì $Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} \angle 45^\circ$

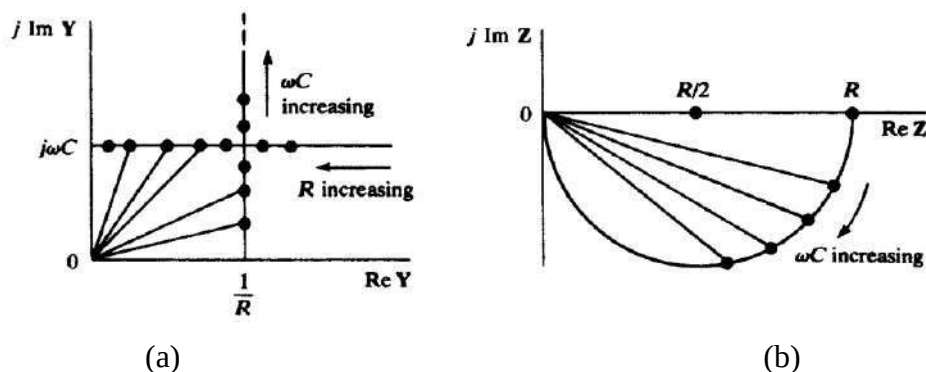


Hình 7-28

Thêm một vài điểm khác sẽ xác định nửa vòng tròn Locus với tâm tại $\frac{1}{2} R$ và bán kính $\frac{1}{2} R$. Ngoài ra, các đồ thị hình 7-28b và 7-28c còn cho biết được đáp ứng tần số của mạch điện.

Đối với mạch RC song song, đồ thị Locus của Y và Z được vẽ trong hình 7-29a và b. Các đồ thị này xác định từ phương trình:

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \quad \text{và} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \angle \tan^{-1}(-\omega CR)$$



Hình 7-29

Đối với mạch RLC nối tiếp, đồ thị Locus của $\mathbf{Y}$ với biến số ω được xác định dựa trên các phương trình:

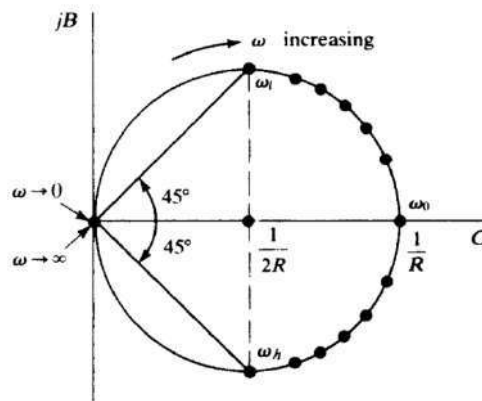
$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

Trong đó: $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ và $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$

Cả G và B đều phụ thuộc vào tần số ω thông qua X . Loại bỏ X từ hai phương trình trên ta được:

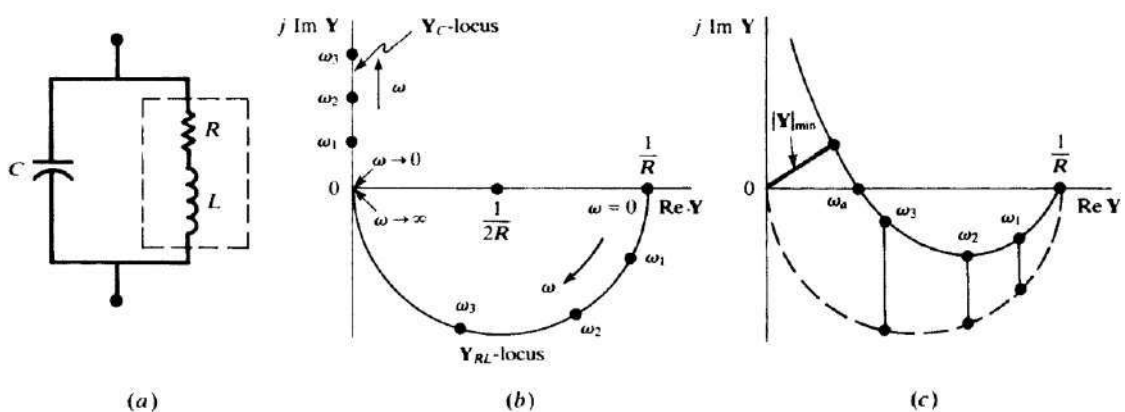
$$G^2 + B^2 = \frac{G}{R} \rightarrow \left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

Đồ thị Locus của $\mathbf{Y}$ theo G và B trên hình 7-30. Lưu ý các điểm trên đồ thị tương ứng với $\omega = \omega_l$; $\omega = \omega_0$; $\omega = \omega_h$



Hình 7-30

Các mạch dao động thực tế thường có cấu trúc nhánh C và nhánh RL song song. Đồ thị Locus $\mathbf{Y}$ của mạch được xác định từ đồ thị Locus nhánh C và đồ thị Locus nhánh RL. Biểu diễn sự kết hợp hai đồ thị, các điểm tương ứng với tần số $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ được đánh dấu trên cả hai đồ thị thành phần và đồ thị tổng, như trong hình 7-31c.

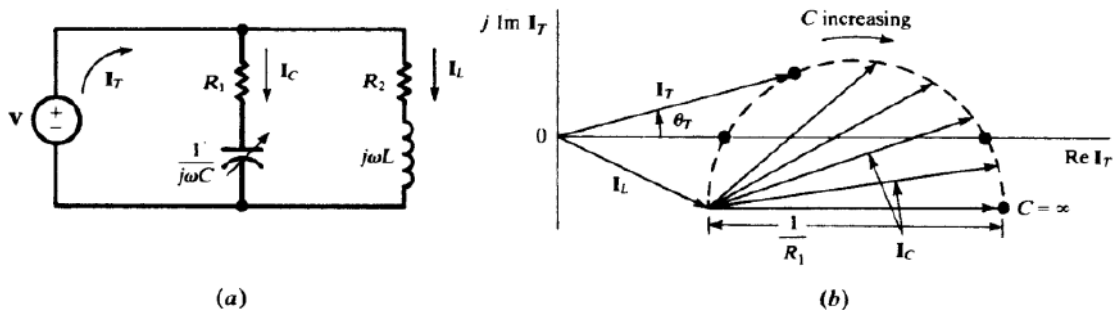


Hình 7-31

Trên đồ thị ta thấy $|\mathbf{Y}|_{\min}$ có tần số cao hơn ω_a , điều này có nghĩa cộng hưởng có trở kháng cao nhưng không phải cực đại. Nguyên nhân của hiện tượng này ở chỗ G thay đổi theo ω và với bất cứ biến thiên nào của G , nếu bắt buộc $B = 0$ thì cũng không chắc chắn $G^2 + B^2$ đạt nhỏ nhất. Sự phân tách giữa tần số cộng hưởng và tần số dẫn nạp cực tiểu do công suất phản kháng của cuộn dây. Công suất phản kháng Q_{ind} lớn, tương ứng giá trị R nhỏ, theo đồ thị trong hình 7–31b, điện trở nhỏ nửa vòng tròn có kích thước lớn hơn, và kết hợp với Y -locus, cho tần số ω_a cao hơn và tần số dẫn nạp cực tiểu nhỏ hơn. Khi công suất phản kháng $Q_{\text{ind}} > 10$, hai tần số này có thể trùng nhau.

Trường hợp mạch điện gồm hai nhánh RC và RL, như trên hình 7–32a, có thể xem xét tăng thêm dẫn nạp của hai nhánh. Với giá trị điện áp cố định $\mathbf{V} = V\angle 0^\circ$, lượng tăng dẫn nạp lên các nhánh. Xét điện dung của tụ biến thiên không giới hạn trong khi R_1 , R_2 , L và ω là hằng số. Dòng điện $\mathbf{I}_L$ được cố định như trên hình 7–32b. Nửa vòng tròn đồ thị Locus của $\mathbf{I}_C$ được bổ xung thêm thành phần $\mathbf{I}_L$ và kết quả ta có đồ thị Locus của $\mathbf{I}_T$.

Trạng thái cộng hưởng của mạch ứng với $\theta_T = 0$. Trạng thái cộng hưởng có thể với hai giá trị dương của tham số điện dung C (như trên hình 7–32b); hoặc một giá trị của điện dung C ; hoặc không có giá trị nào của điện dung C , phụ thuộc vào số nghiệm thực dương của phương trình $\text{Im } \mathbf{Y}_T(C) = 0$.

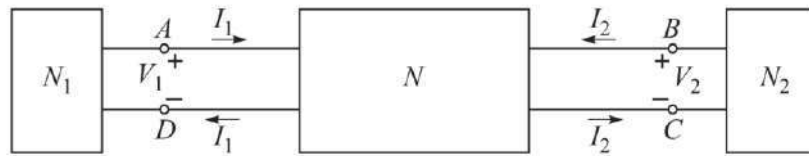


Hình 7–32

Chương VIII: Mạng hai cửa

8.1. Khái niệm và thông số mạng hai cửa

Đối với mạng hai cực, điện áp cực có quan hệ với dòng điện cực thông qua trở kháng $Z = V/I$. Nhưng đối với mạng bốn cực, nếu mỗi cặp cực (cửa) được kết nối với các mạch riêng biệt, như trong hình 8–1, bốn thông số mạch i_1, i_2, v_1, v_2 có liên quan đến nhau thông qua hai phương trình được gọi là đặc tính cực. Hai phương trình này và đặc tính cực của mạch kết nối đủ số lượng phương trình cần thiết để tìm cả bốn thông số.



Hình 8–1

8.1.1. Bộ số Z

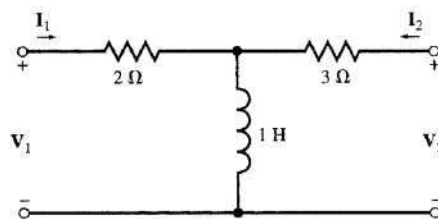
Bộ số Z của mạch hai cửa với các phần tử tuyến tính và nguồn phụ thuộc có thể viết trong miền phức:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (8-1)$$

Hệ số Z_{ij} có đơn vị của trở kháng và được gọi là bộ số Z của mạch hai cửa. Bộ số Z còn được gọi là trở kháng hở mạch, có thể xác định tại một cửa trong khi cửa kia hở mạch:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (8-2)$$

Ví dụ: Tìm bộ số Z của mạch hai cửa trong hình 8–2



Hình 8–2

Áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho hai vòng kín với các dòng điện I_1 và I_2 :

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + sI_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \end{aligned} \quad (8-3)$$

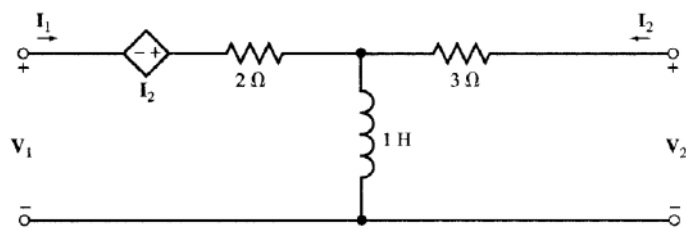
So sánh 8-1 và 8-3, ta được:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= 2 + s \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= 3 + s \end{aligned} \quad (8-4)$$

Mạch tương hỗ và không tương hỗ

Mạch hai cửa được gọi là tương hỗ nếu như trở kháng chuyển đổi hở mạch bằng nhau $Z_{12} = Z_{21}$. Tương ứng, trong mạch hai cửa tương hỗ với dòng điện I cấp cho một cửa, điện áp hở mạch trên cửa còn lại sẽ không đổi nếu ta thay đổi cửa cấp dòng. Điện áp bằng $V = Z_{12}I = Z_{21}I$. Mạch chứa các phần tử điện trở, cuộn cảm và tụ điện thông thường là mạch tương hỗ. Mạch có thêm nguồn phụ thuộc thường không tương hỗ.

Ví dụ: Mạch hai cửa trên hình 8-3 có nguồn áp phụ thuộc dòng. Hãy xác định bộ số Z .



Hình 8-3

Áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho hai vòng:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 - I_2 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + (s - 1)I_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (s + 3)I_2 \end{aligned}$$

Bộ số Z :

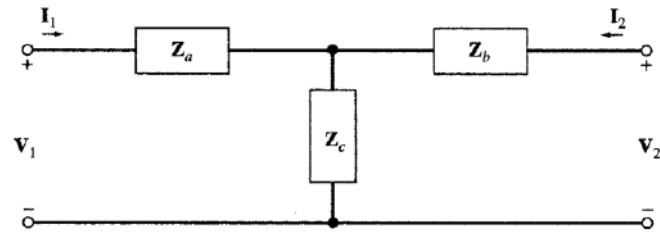
$$\begin{aligned} Z_{11} &= 2 + s \\ Z_{12} &= s - 1 \\ Z_{21} &= s \\ Z_{22} &= 3 + s \end{aligned} \quad (8-5)$$

Rõ ràng $Z_{12} \neq Z_{21}$ mạch không tương hỗ

8.1.2. Mạch T tương đương của mạch hai cửa tương hỗ

Mạch tương hỗ có thể được mô hình hóa theo dạng tương đương mạch T như trong hình 8-4. Trong đó các trở kháng Z_a , Z_b và Z_c được xác định từ trở kháng của bộ số Z .

$$\begin{aligned}
Z_a &= Z_{11} - Z_{12} \\
Z_b &= Z_{22} - Z_{21} \\
Z_c &= Z_{12} = Z_{21}
\end{aligned}
\tag{8-6}$$



Hình 8-4

Xác định bộ số Z từ mạch T (hình 8-4)

$$\begin{aligned}
V_1 &= Z_a I_1 + Z_c (I_1 + I_2) = (Z_a + Z_c) I_1 + Z_c I_2 \\
V_2 &= Z_b I_2 + Z_c (I_1 + I_2) = Z_c I_1 + (Z_b + Z_c) I_2
\end{aligned}
\tag{8-7}$$

So sánh với phương trình bộ số Z , ta có:

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= Z_a + Z_c \\
Z_{12} &= Z_{21} = Z_c \\
Z_{22} &= Z_b + Z_c
\end{aligned}
\tag{8-8}$$

8.1.3. Bộ số Y

Đặc tính cực cũng có thể được viết dưới dạng dòng điện I_1 và I_2 theo các biểu thức của điện áp V_1 và V_2 .

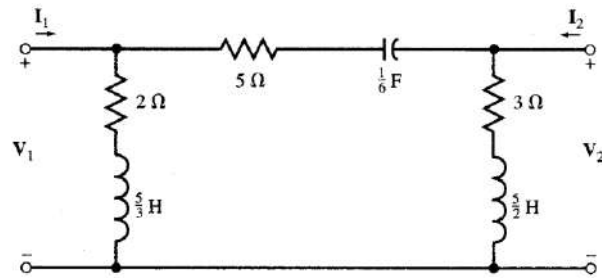
$$\begin{aligned}
I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\
I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2
\end{aligned}
\tag{8-9}$$

Phản tử Y_{ij} có đơn vị dẫn nạp và được gọi là bộ số Y (hoặc bộ số dẫn nạp ngắn mạch) được xác định từ dòng điện một cửa khi cửa còn lại ngắn mạch.

Bộ số Y :

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\
Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}
\end{aligned}
\tag{8-10}$$

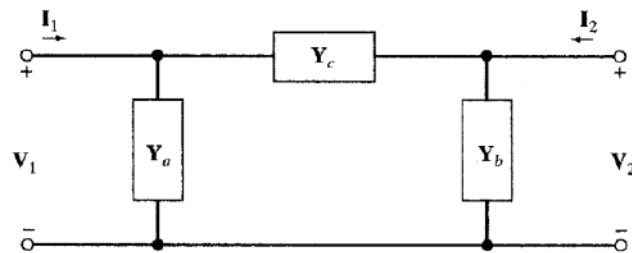
Ví dụ: Xác định bộ số Y của mạch hình 8-5.



Hình 8-5

Gọi các dẫn nạp của các nhánh lần lượt là Y_a , Y_b và Y_c ta có mạch điện theo dẫn nạp hình 8-6.

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6} \\ Y_b &= \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6} \\ Y_c &= \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6} \end{aligned} \quad (8-11)$$



Hình 8-6

Áp dụng định luật Kirchhoff về dòng cho mạch điện hình 8-6

$$\begin{aligned} I_1 &= V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_c = (Y_a + Y_c) V_1 - Y_c V_2 \\ I_2 &= V_2 Y_b + (V_2 - V_1) Y_c = -Y_c V_1 + (Y_b + Y_c) V_2 \end{aligned} \quad (8-12)$$

So sánh 8-9 và 8-12 ta được:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_a + Y_c \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_c \\ Y_{22} &= Y_b + Y_c \end{aligned} \quad (8-13)$$

Thay các giá trị Y_a , Y_b và Y_c vào biểu thức 8-13, ta có bộ số Y

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{s + 3}{5s + 6} \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{-s}{5s + 6} \\ Y_{22} &= \frac{s + 2}{5s + 6} \end{aligned} \quad (8-14)$$

Với $Y_{12} = Y_{21}$ mạch hai cửa tương hỗ.

8.1.4. Mạch π tương đương của mạch hai cửa tương hỗ

Mạch tương hỗ có thể mô hình hóa bằng mạch pi tương đương như trong hình 8-6 gồm 3 phần tử. Các phần tử có thể xác định từ bộ số Y hoặc ngược lại.

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c \quad (\text{xem hình 8-7a}) \quad (8-15)$$

$$\mathbf{Y}_{12} = -\mathbf{Y}_c$$

$$\mathbf{Y}_{21} = -\mathbf{Y}_c \quad (\text{xem hình 8-7b}) \quad (8-15)$$

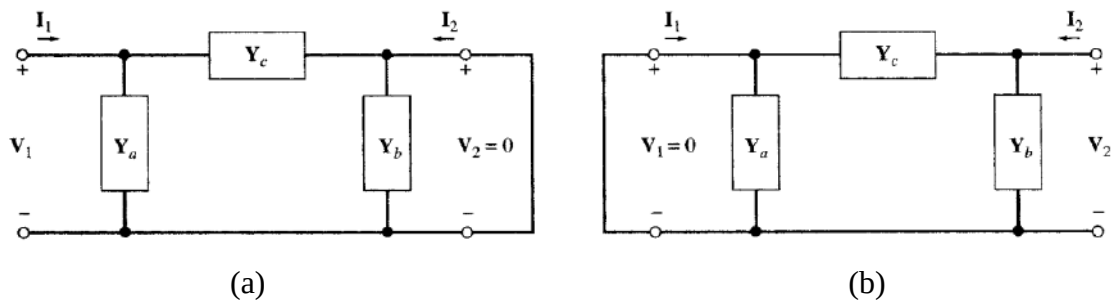
$$\mathbf{Y}_{22} = \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c$$

Từ đó ta có:

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12}$$

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_{12} \quad (8-16)$$

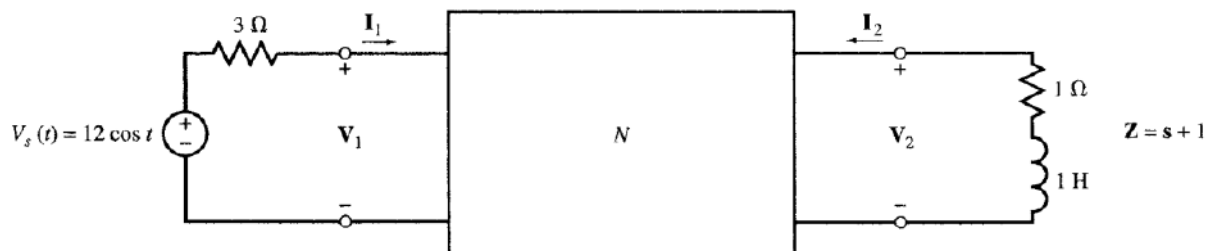
$$\mathbf{Y}_c = -\mathbf{Y}_{21} = -\mathbf{Y}_{12}$$



Hình 8-7

Bốn thông số của mạch hai cửa $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$ luôn có hai phương trình mô tả quan hệ giữa chúng (8-1 hoặc 8-9). Nếu kết nối mạch hai cửa với các phần tử khác sẽ viết thêm được hai phương trình nữa. Như vậy với bốn phương trình ta có thể xác định được cả bốn thông số mà không cần phải biết cấu trúc bên trong mạch hai cửa.

Ví dụ: Mạch hai cửa có bộ số Z: $\mathbf{Z}_{11} = 2\mathbf{s} + 1/\mathbf{s}$; $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = 2\mathbf{s}$; $\mathbf{Z}_{22} = 2\mathbf{s} + 4$, được nối với nguồn và tải như trong hình 8-8. Hãy xác định $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$.



Hình 8-8

Phương trình cơ bản của bộ số Z:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= (2\mathbf{s} + 1/\mathbf{s})\mathbf{I}_1 + 2\mathbf{s}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= 2\mathbf{s}\mathbf{I}_1 + (2\mathbf{s} + 4)\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (8-17)$$

Véc tơ nguồn áp $v_s(t)$ là $\mathbf{V}_s = 12$ với $\mathbf{s} = j$ ($\omega = 1$), áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho hai vòng, ta được thêm hai phương trình:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= 3\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \\ 0 &= (\mathbf{s} + 1)\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (8-17)$$

Thay $\mathbf{s} = j$ và $\mathbf{V}_s = 12$ vào các phương trình ta được hệ:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= (2j + 1/j)\mathbf{I}_1 + 2j\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= 2j\mathbf{I}_1 + (2j + 4)\mathbf{I}_2 \\ 12 &= 3\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \\ 0 &= (j + 1)\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (8-19)$$

Giải hệ phương trình ta được:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= 3,29 \angle -10,2^\circ; \mathbf{I}_2 = 1,13 \angle -131,2^\circ \\ \mathbf{V}_1 &= 2,88 \angle 37,5^\circ; \mathbf{V}_2 = 1,6 \angle 93,8^\circ \end{aligned}$$

8.1.5. Qui đổi giữa bộ số Z và bộ số Y

Bộ số Y có thể được tính từ bộ số Z bằng cách giải phương trình đặc trưng của bộ số Z tìm $\mathbf{I}_1$ và $\mathbf{I}_2$ theo $\mathbf{V}_1$ và $\mathbf{V}_2$. Áp dụng công thức Cramer cho phương trình 8-1 và ta được:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_{22}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_1 - \frac{\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= -\frac{\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{Z}_{11}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (8-19)$$

Trong đó: $\mathbf{D}_{ZZ} = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{21}$ là định thức của ma trận hệ số 8-1. So sánh 8-19 và 8-9 ta được:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= \frac{\mathbf{Z}_{22}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \\ \mathbf{Y}_{12} &= -\frac{\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \\ \mathbf{Y}_{21} &= -\frac{\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \\ \mathbf{Y}_{22} &= \frac{\mathbf{Z}_{11}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \end{aligned} \quad (8-20)$$

Để xác định bộ số $\mathbf{Y}$ từ bộ số $\mathbf{Z}$, định thức $\mathbf{D}_{zz}$ phải khác không. Tương tự có thể xác định bộ số $\mathbf{Z}$ từ bộ số $\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \frac{\mathbf{Y}_{22}}{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}} \\ \mathbf{Z}_{12} &= -\frac{\mathbf{Y}_{12}}{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}} \\ \mathbf{Z}_{21} &= -\frac{\mathbf{Y}_{21}}{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}} \\ \mathbf{Z}_{22} &= \frac{\mathbf{Y}_{11}}{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}} \end{aligned} \quad (8-21)$$

Trong đó: $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_{11}\mathbf{Y}_{22} - \mathbf{Y}_{21}\mathbf{Y}_{12}$ định thức của ma trận hệ số phương trình 8-9. Để xác định được bộ số $\mathbf{Z}$ từ bộ số $\mathbf{Y}$, định thức $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$ phải khác không.

Ví dụ: Xác định bộ số $\mathbf{Z}$ từ bộ số $\mathbf{Y}$ trong sơ đồ 8-5:

$$\text{Bộ số } \mathbf{Y}: \mathbf{Y}_{11} = \frac{s+3}{5s+6}; \mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} = \frac{-s}{5s+6}; \mathbf{Y}_{22} = \frac{s+2}{5s+6}$$

$$\text{Định thức: } \mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_{11}\mathbf{Y}_{22} - \mathbf{Y}_{21}\mathbf{Y}_{12} = \frac{s+3}{5s+6} \frac{s+2}{5s+6} - \frac{s}{5s+6} \frac{s}{5s+6}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \frac{1}{5s+6} \text{ thay vào 8-21 tìm được:}$$

$$\mathbf{Z}_{11} = s+2$$

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = s$$

$$\mathbf{Z}_{22} = s+3$$

8.1.6. Các bộ số lai và bộ số truyền tải

8.1.6.1. Bộ số $\mathbf{h}$

Một số mạch hai cửa hoặc mạch điện tử, phương trình đặc trưng cho các cực thường dùng ở dạng hỗn hợp dòng áp, ví dụ:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (8-23)$$

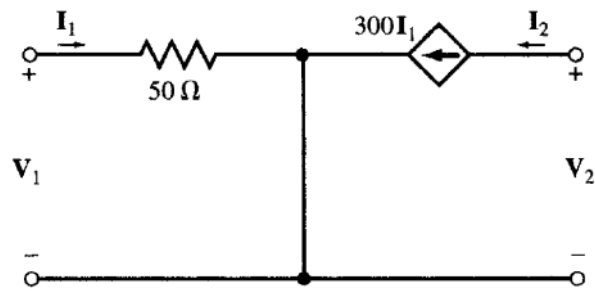
Trong đó: $\mathbf{h}_{ij}$ – các hệ số của phương trình ma trận 8-23, được gọi là bộ số lai $\mathbf{h}$ (bộ số $\mathbf{h}$).

Ví dụ: Tìm bộ số lai cho mạch điện hình 8-9

Đây là mạch điện đơn giản của BJT ở vùng làm việc tỉ lệ tuyến tính.

Do đó tại các cực của mạch ta có phương trình sau:

$$\mathbf{V}_1 = 50\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 = 300\mathbf{I}_1 \quad (8-24)$$



Hình 8-9

So sánh với phương trình của bộ số h:

$$\mathbf{h}_{11} = 50; \quad \mathbf{h}_{12} = 0; \quad \mathbf{h}_{21} = 300; \quad \mathbf{h}_{22} = 0 \quad (8-25)$$

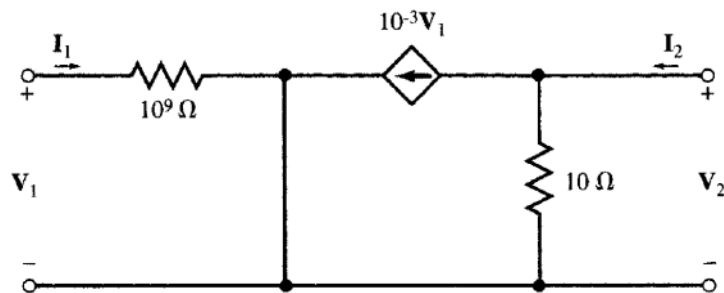
8.1.6.2. Bộ số g

Một số mạch điện – điện tử có thể sử dụng phương trình hỗn hợp theo phương án khác:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{g}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{g}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{22}\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (8-26)$$

Trong đó: $\mathbf{g}_{ij}$ – hệ số của phương trình ma trận 8-26, được gọi là bộ số lai đảo (bộ số g)

Ví dụ: Xác định bộ số g của mạch điện hình 8-10



Hình 8-10

Đây là mạch đơn giản của Mosfet trong vùng làm việc tỉ lệ tuyến tính. Áp dụng định luật Kirchhoff cho các cửa:

$$\text{Cửa vào:} \quad \mathbf{V}_1 = 10^9 \mathbf{I}_1$$

$$\text{Cửa ra:} \quad \mathbf{V}_2 = 10(\mathbf{I}_2 - 10^{-3} \mathbf{V}_1)$$

$$\mathbf{I}_1 = 10^{-9} \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 = -10^{-2} \mathbf{V}_1 + 10 \mathbf{I}_2 \quad (8-27)$$

So sánh với hệ phương trình bộ số g:

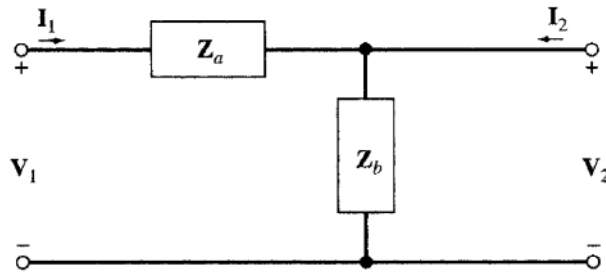
$$\mathbf{g}_{11} = 10^{-9}; \quad \mathbf{g}_{12} = 0; \quad \mathbf{g}_{21} = -10^{-2}; \quad \mathbf{g}_{22} = 10 \quad (8-28)$$

8.1.6.3. Bộ số truyền tải

Bộ số truyền tải A, B, C và D được biểu diễn sự phụ thuộc của các thông số nguồn V1 và I1 trong điều kiện các thông số V2 và I2 của tải. Bộ số này còn được gọi là bộ số T.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (8-29)$$

Ví dụ: Tìm bộ số T của mạch điện hình 8-11.



Hình 8-11

Đây là sơ đồ đơn giản của đường dây truyền tải điện. Từ hệ phương trình 8-29 ta có:

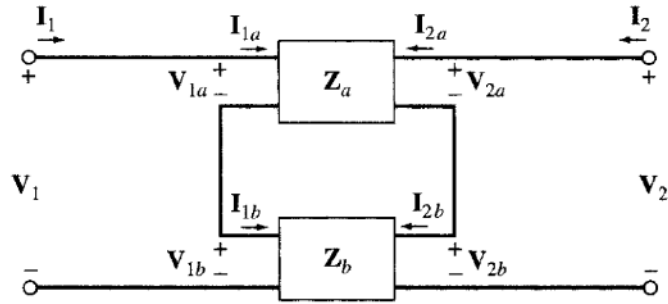
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \frac{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_b} = 1 + \mathbf{Z}_a \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{B} &= - \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{V}_2=0} = \mathbf{Z}_a \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_2=0} = \mathbf{Y}_b \\ \mathbf{D} &= - \left. \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{V}_2=0} = 1 \end{aligned} \quad (8-30)$$

8.2. Kết nối các mạch hai cửa

Mạch hai cửa có thể kết nối với nhau theo các phương án: nối tiếp, song song hoặc lai được một mạch hai cửa mới. Đối với mỗi phương án kết nối một trong số các bộ số phù hợp sử dụng hơn các bộ số khác để mô tả mạch mới.

8.2.1. Kết nối nối tiếp

Trong hình 8-12 mô tả hai mạch hai cửa được hình thành từ hai mạch hai cửa a và b kết nối nối tiếp. Các mạch a và b có bộ số trở kháng hở mạch (bộ số Z) tương ứng là $\mathbf{Z}_a$ và $\mathbf{Z}_b$. Mạch hai cửa mới có bộ số Z được xác định từ kết hợp hai bộ số $\mathbf{Z}_a$ và $\mathbf{Z}_b$ theo biểu thức:



Hình 8-12

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= Z_{11,a} + Z_{11,b} \\
 Z_{12} &= Z_{12,a} + Z_{12,b} \\
 Z_{21} &= Z_{21,a} + Z_{21,b} \\
 Z_{22} &= Z_{22,a} + Z_{22,b}
 \end{aligned}
 \tag{8-31a}$$

Hoặc ở dạng ma trận

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] \tag{8-31b}$$

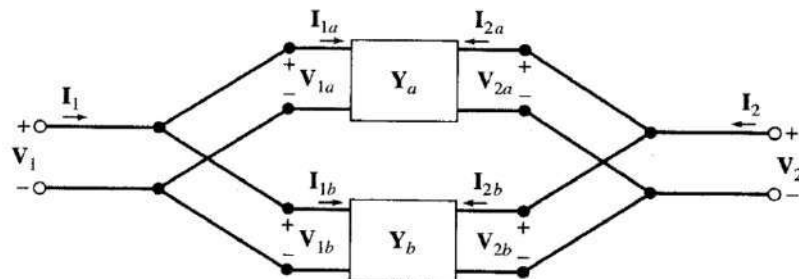
8.2.2. Kết nối song song

Trong hình 8-13 mô tả mạch hai cửa được hình thành từ hai mạch hai cửa kết nối song song với các bộ số dẫn nạp ngắn mạch Y tương ứng là Y_a và Y_b . Trường hợp này, bộ số Y sử dụng thuận tiện hơn cả, và bộ số Y của mạch mới sẽ được tính theo các bộ số Y của các mạch kết nối theo biểu thức:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= Y_{11,a} + Y_{11,b} \\
 Y_{12} &= Y_{12,a} + Y_{12,b} \\
 Y_{21} &= Y_{21,a} + Y_{21,b} \\
 Y_{22} &= Y_{22,a} + Y_{22,b}
 \end{aligned}
 \tag{8-32a}$$

Hoặc ở dạng ma trận

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b] \tag{8-32b}$$



Hình 8-13

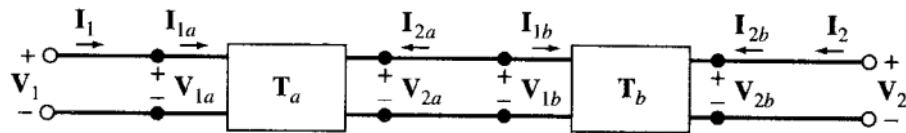
8.2.3. Kết nối khâu chuỗi

Kết nối khâu chuỗi giữa hai mạch hai cửa a và b được mô tả trong hình 8–14. Trường hợp này sử dụng bộ số truyền tải T là phù hợp hơn cả và bộ số T của mạch hai cửa mới được tính từ các bộ số T của mạch a và b theo biểu thức:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{C}_b \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_b \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{C}_b \\ \mathbf{D} &= \mathbf{C}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{D}_b \end{aligned} \quad (8-33a)$$

Hoặc ở dạng ma trận:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_a] \times [\mathbf{T}_b]$$

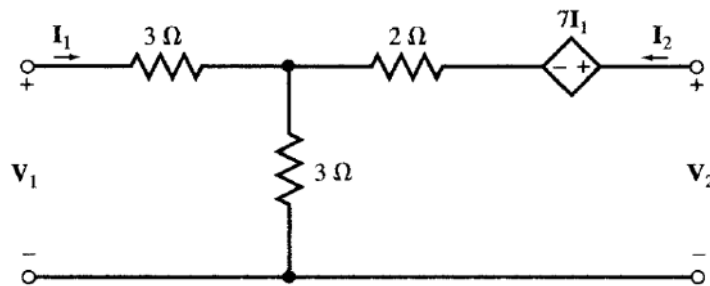


Hình 8–14

8.2.4. Lựa chọn bộ số phù hợp

Lựa chọn bộ số phù hợp và thuận tiện để mô tả mạch hai cửa phần lớn phụ thuộc vào cấu trúc và các phần tử trong mạch hai cửa. Một số trường hợp không thể dùng một bộ số nhất định để mô tả mạch có thể suy ra từ việc biến đổi tương đương giữa các bộ số Z và Y. Với bộ số Z nếu có $\mathbf{D}_{ZZ} = 0 \rightarrow$ không có bộ số Y mô tả mạch, và ngược lại với bộ số Y có $\mathbf{D}_{YY} = 0 \rightarrow$ cũng không có bộ số Z mô tả mạch loại này.

Ví dụ: Xác định bộ số Z và Y của mạch trong hình 8–15



Hình 8–15

Áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho các vòng ở cửa vào và cửa ra của mạch:

$$\begin{aligned} V_1 &= 3I_1 + 3(I_1 + I_2) \\ V_2 &= 7I_1 + 2I_2 + 3(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\mathbf{V}_1 = 6\mathbf{I}_1 + 3\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 5\mathbf{I}_2$$

So sánh với hệ phương trình bộ số Z:

$$\mathbf{Z}_{11} = 6; \quad \mathbf{Z}_{12} = 3; \quad \mathbf{Z}_{21} = 10; \quad \mathbf{Z}_{22} = 5$$

Chuyển đổi tương đương sang bộ số Y không thể thực hiện được do định thức $\mathbf{D}_{ZZ} = 6.5 - 3.10 = 0$

Như vậy mạch điện trong hình 8–15 chỉ có thể mô tả bằng bộ số Z.

Chương 9: Hồ cảm

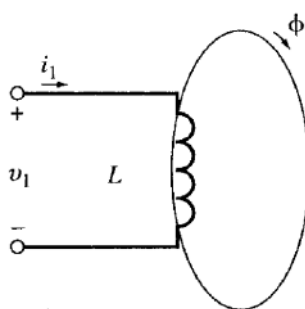
9.1. Khái niệm hồ cảm

9.1.1. Hiện tượng hồ cảm

Tổng từ thông móc vòng với cuộn cảm tỉ lệ thuận với dòng điện đi qua cuộn dây, như vậy $\lambda = Li$ (hình 9-1). Theo định luật Faraday, điện áp trên cuộn cảm được định nghĩa bằng đạo hàm của từ thông móc vòng:

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Trong đó: hệ số L có đơn vị là H (Henri) được gọi là hệ số tự cảm.



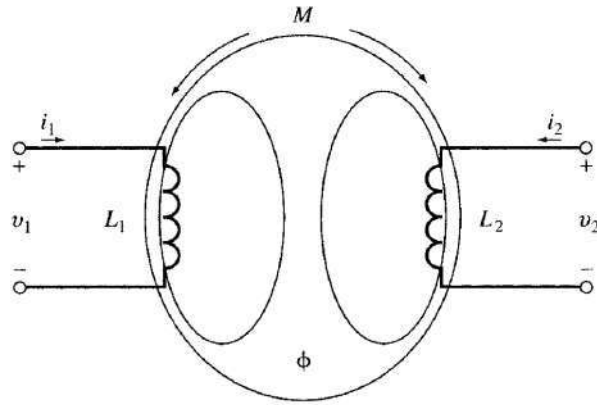
Hình 9-1

Hai điện cảm ở hai mạch riêng biệt có khoảng cách đủ gần để mỗi điện cảm gây nên từ thông móc vòng lên điện cảm còn lại tạo nên cặp tương tác từ thông còn gọi là hồ cảm. Cặp tương tác này phụ thuộc vào khoảng cách vật lý, chiều dòng điện có thể tăng hoặc giảm điện áp trên các cuộn dây. Khả năng ảnh hưởng lẫn nhau còn phụ thuộc vào lõi thép của cuộn cảm, nếu chúng được làm từ thép mềm có khả năng tăng từ thông móc vòng và tương tác giữa chúng tăng lên.

Xác định điện áp giữa các cực của cuộn dây trong cặp như trên hình 9-2, ta thấy rằng từ thông móc vòng của mỗi cuộn dây do dòng điện i_1 và i_2 và hiện tượng hồ cảm giữa chúng là đối xứng.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \lambda_2 &= L_2 i_2 + M i_1\end{aligned}\tag{9-1}$$

Trong đó: M – hệ số hồ cảm (đơn vị H)



Hình 9-2

Điện áp trên các cực được xác định từ đạo hàm của từ thông móc vòng:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{d\lambda_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (9-2)$$

Cặp cuộn dây tạo nên trường hợp đặc biệt của mạch hai cửa. Thông số các cực thể hiện trong các biểu thức 9-2 có thể viết thành phương trình ở miền tần số và miền phức.

Miền tần số:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (9-3)$$

Miền phức:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= L_1 \mathbf{s} \mathbf{I}_1 + M \mathbf{s} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= M \mathbf{s} \mathbf{I}_1 + L_2 \mathbf{s} \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (9-4)$$

Phương trình trong miền tần số 9-3 dùng phân tích mạch của các đại lượng sin ở chế độ xác lập. Phương trình trong miền phức 9-4 dùng phân tích mạch trong chế độ quá độ với tần số phức s .

Ví dụ: Cho $L_1 = 0,1\text{H}$; $L_2 = 0,5\text{H}$; $i_1(t) = i_2(t) = \sin \omega t$. Hãy xác định các điện áp $v_1(t); v_2(t)$ với các hệ số hồ cảm: $M = 0,01\text{H}$; $M = 0,2$ và $M = -0,2$.

Với $M = 0,01$:

$$v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t + 0,01\omega \cos \omega t = 0,11\omega \cos \omega t \text{ V}$$

$$v_2(t) = 0,01\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,51\omega \cos \omega t \text{ V}$$

Với $M = 0,2$:

$$v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t + 0,2\omega \cos \omega t = 0,3\omega \cos \omega t \text{ V}$$

$$v_2(t) = 0,2\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,7\omega \cos \omega t \text{ V}$$

Với $M = -0,2$:

$$v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t - 0,2\omega \cos \omega t = -0,1\omega \cos \omega t \text{ V}$$

$$v_2(t) = -0,2\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,3\omega \cos \omega t \text{ V}$$

9.1.2. Hệ số cặp hồ cảm

Một cuộn dây có N vòng với từ thông mỗi vòng ϕ sẽ có tổng từ thông mỗi vòng $\lambda = N\phi$. Theo định luật Faraday, sức điện động (điện áp) gây ra trong cuộn dây $e = d\lambda/dt = N(d\phi/dt)$. Theo định nghĩa tự cảm điện áp này được xác định bằng $L(di/dt)$ như vậy:

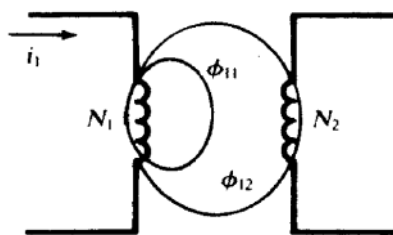
$$L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \quad \rightarrow \quad L = N \frac{d\phi}{di} \quad (9-5a)$$

Đơn vị của ϕ là weber, trong đó $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V.s}$, xuất phát từ $1\text{H} = 1\text{Wb/A}$. Trong giáo trình này ta chấp nhận từ thông ϕ và dòng điện i tỉ lệ với nhau:

$$L = N \frac{\phi}{i} = \text{hằng số} \quad (9-5b)$$

Trong hình 9-3, từ thông tổng ϕ_1 là kết quả của dòng điện i_1 trong cuộn dây N_1 vòng bao gồm từ thông rò (chỉ khép mạch với bản thân cuộn dây) ϕ_{11} và từ thông liên kết (khép mạch với cuộn dây thứ hai) ϕ_{12} . Sức điện động emf sinh ra do hiệu ứng cặp cuộn dây được xác định bằng $N_2(d\phi_{12}/dt)$ cũng chính là điện áp biểu diễn thông qua hệ số hồ cảm.

$$e = M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad \rightarrow \quad M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (9-6)$$



Hình 9-3

Tương tự, ta có:

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (9-7)$$

Hệ số cặp hồ cảm k , được định nghĩa bằng tỉ số giữa từ thông liên kết (khép mạch qua cuộn khác) và từ thông tổng

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

Trong đó $0 \leq k \leq 1$

Nhân hai vế các biểu thức 9-6 và 9-7 với giả thiết k chỉ phụ thuộc vào kết cấu hình học của hệ thống hai cuộn dây:

$$M^2 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} = N_1 \frac{d(k\phi_2)}{di_2} N_2 \frac{d(k\phi_1)}{di_1}$$

$$M^2 = k^2 N_1 \frac{d\phi_2}{di_2} N_2 \frac{d\phi_1}{di_1} = k^2 L_1 L_2$$

$$\text{Từ đó: } M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \rightarrow \quad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} \quad (9-8)$$

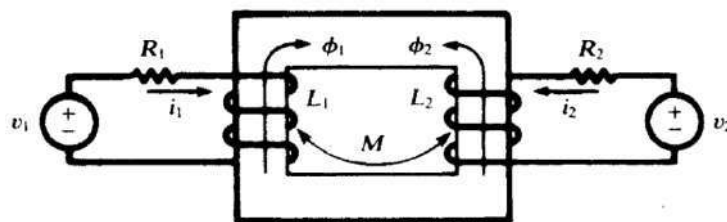
Từ biểu thức 9-8, ta thấy $M < \sqrt{L_1 L_2}$

Nếu như tất cả các từ thông liên kết với cuộn dây không có thành phần rò khi đó $k=1$. Bên cạnh đó, trục của cuộn dây có thể bố trí sao cho từ thông từ cuộn này không gây nên điện áp trên cuộn thứ hai, khi đó $k=0$. Khái niệm cặp hồ cảm gần của hai cuộn dây được sử dụng để miêu tả trường hợp phần lớn từ thông khép mạch qua cả hai cuộn dây, nói cách khác từ trường của cuộn dây gồm các từ thông khác nhau khép mạch qua các vòng dây từ cuộn nọ sang cuộn kia. Hai cuộn dây đặt cạnh nhau không có lõi thường mất đi tính chất cặp hồ cảm và tương ứng hệ số k rất nhỏ.

9.1.3. Phân tích cặp hồ cảm

Cực tính cặp hồ cảm

Trên hình 9-4, mô tả hai cuộn dây có chung lõi làm mạch dẫn từ thông ϕ . Cách bố trí này làm thành cặp hồ cảm gần, được mô tả trong phần ngay trước.

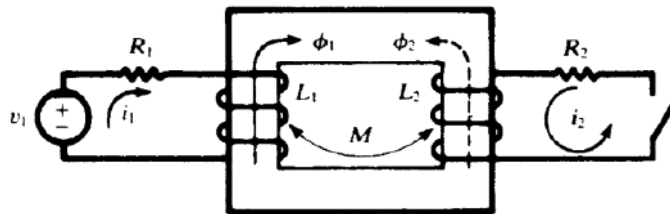


Hình 9-4

Để xác định cực tính điện áp hồ cảm, áp dụng qui tắc bàn tay phải cho mỗi cuộn: nếu các ngón tay nắm lại theo chiều dòng điện, ngón tay cái chỉ chiều của từ thông. Như vậy, chiều dương của từ thông ϕ_1 và ϕ_2 được vẽ trên hình. Nếu các từ thông cùng chiều, khi đó điện áp hồ cảm cùng dấu với điện áp tự cảm. Và dấu cộng có ở trong các phương trình 9-2 và 9-3. Còn trong hình 9-4, từ thông ϕ_1 và ϕ_2 ngược chiều nhau, tương ứng các phương trình 9-2 và 9-3 được viết với dấu trừ.

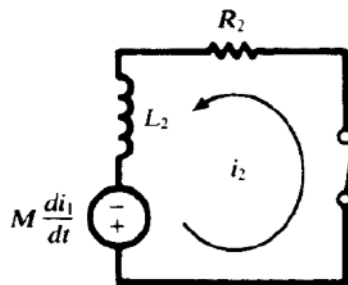
Chiều tự nhiên của dòng điện

Tiếp theo ta xét cặp hồ cảm trong điều kiện vòng thứ hai là thụ động (không nguồn) như trong hình 9–5. Nguồn áp v_1 tạo nên dòng điện i_1 , từ đó từ thông cuộn này ϕ_1 có chiều như trong hình. Theo định luật cảm ứng điện từ, nếu mạch vòng thứ hai khép kín sẽ có dòng điện theo chiều tạo nên từ thông của cuộn này với hướng ngược lại từ thông ϕ_1 . Như vậy nếu công tắc trong hình 9–5 đóng, từ thông ϕ_2 có hướng như trong hình. Theo qui tắc tay phải, ngón cái chỉ chiều từ thông ϕ_2 , sẽ xác định được chiều tự nhiên của dòng điện i_2 . Điện áp cảm ứng chính là nguồn áp tạo nên dòng điện cho mạch vòng này như trong hình 8–6, điện áp này luôn có mặc dù mạch vòng có khép kín hay không. Khi công tắc đóng, dòng điện i_2 xuất hiện với chiều như trong hình.



Hình 9–5

Ví dụ: Giả thiết công tắc của mạch vòng thụ động được đóng vào thời điểm $t = 0$ khi $i_1 = 0$. Với các thời điểm $t > 0$, các phần tử của mạch thụ động được trình bày trên hình 9–6.



Hình 9–6

Phương trình định luật Kirchhoff về áp cho vòng thụ động:

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Phương trình cho vòng chủ động (có nguồn):

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1$$

Nếu viết các phương trình trên trong miền phức với điều kiện đầu $i_1 = 0$ và $i_2 = 0$ và loại bỏ $\mathbf{I}_1(s)$, ta được:

$$R_2 \mathbf{I}_2 + sL_2 \mathbf{I}_2 - sM \mathbf{I}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 \frac{R_2 + sL_2}{sM}$$

$$R_1 \mathbf{I}_1 + sL_1 \mathbf{I}_1 - sM \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 \rightarrow (R_1 + sL_1) \mathbf{I}_1 - sM \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$

$$\frac{(R_1 + sL_1)(R_2 + sL_2)}{sM} \mathbf{I}_2 - sM \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$

$$\frac{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}{sM} \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1$$

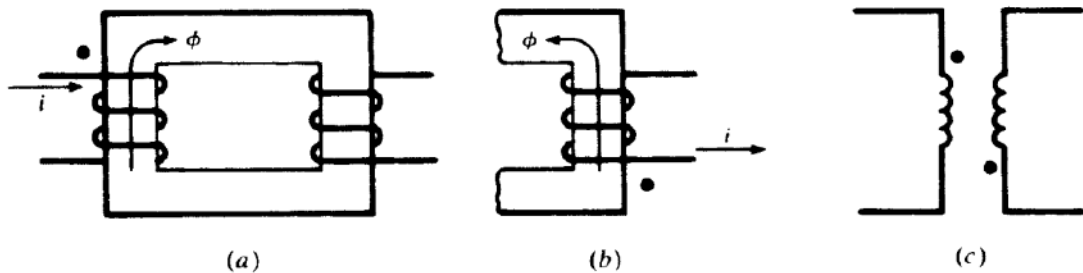
Đáp ứng của mạch với kích thích v_1 :

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{sM}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}$$

Tần số đáp ứng tự nhiên của i_2 , xác định được từ các cực của H.

Qui tắc dấu chấm

Dấu của điện áp hồ cảm có thể xác định nếu như biết được chiều các cuộn dây như trong các hình 9–4 và 9–5. Tuy nhiên trên các mạch điện thường không thể hiện chiều cuộn dây, do đó để đơn giản hóa việc xác định dấu, các cuộn dây được kí hiệu với dấu chấm ở một cực có giá trị cực tính như nhau.



Hình 9–7

Để xác định dấu chấm trên các cực của cặp hồ cảm, chọn chiều dòng điện tại một cuộn và đặt dấu chấm tại nơi dòng điện vào cuộn dây. Xác định chiều từ thông theo qui tắc tay phải (hình 9–7a). Chiều từ thông của cuộn thứ hai có chiều ngược lại. Dùng qui tắc tay phải xác định chiều dòng điện trong cuộn thứ hai và đặt dấu chấm tại cực dòng điện rời khỏi cuộn dây (hình 9–7b). Cực này cùng dương với cực ở cuộn dây thứ nhất nơi dòng điện đi vào. Với cực tính của cặp hồ cảm, các cuộn dây không còn cần thể hiện chiều quấn như trên hình 9–7c. Những qui tắc dấu chấm sau đây có thể sử dụng:

(1) Khi cả hai dòng điện đều đi vào hoặc đi ra khỏi hai cuộn dây tại cực có dấu chấm, dấu của phần liên quan đến M sẽ cùng dấu với phần liên quan đến L; nhưng

(2) nếu một dòng điện đi vào cực có dấu chấm và dòng điện còn lại đi ra khỏi cực dấu chấm của phần liên quan đến M ngược với dấu phần liên quan đến L .

Năng lượng của cặp hồ cảm

Năng lượng tích lũy trong một cuộn dây có điện cảm L mang dòng điện i được xác định bằng $0,5Li^2$ J. Năng lượng tích lũy trong cặp hồ cảm được xác định theo biểu thức:

$$W = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2 \quad (9-9)$$

Trong đó: L_1, L_2 điện cảm của hai cuộn dây, M hồ cảm giữa chúng. Thành phần Mi_1i_2 trong biểu thức 9-9 là năng lượng tích lũy do hiện tượng hồ cảm, có dấu dương khi cả hai dòng điện i_1 và i_2 cùng đi vào cực có dấu chấm, và ngược lại có dấu âm khi một dòng điện đi vào cực có dấu chấm và dòng điện còn lại đi vào cực không có dấu chấm.

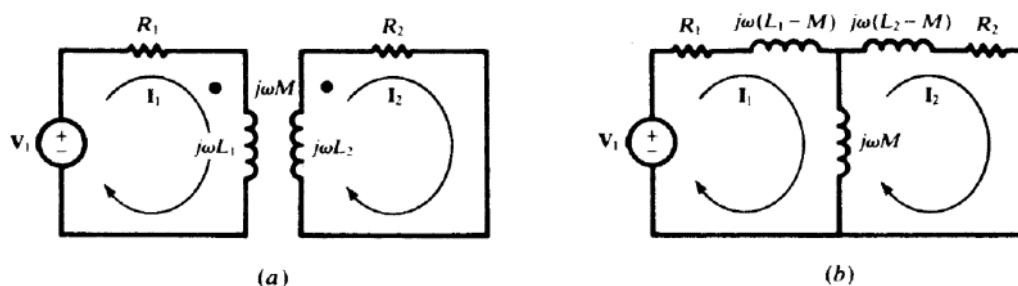
Mạch điện tương đương của cặp hồ cảm

Từ phương trình dòng mắt lưới viết cho cặp hồ cảm có thể xây dựng được sơ đồ mạch tương đương. Xét trạng thái ổn định của nguồn sin tác động vào mạch hình 9-8a. Phương trình ma trận tương ứng:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trong hình 9-9b, điện cảm $X_M = j\omega M$ có hai dòng mắt lưới ngược chiều nhau, khi đó trong ma trận trở kháng:

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = -j\omega M$$



Hình 9-8

Nếu đưa vào mạch vòng thứ nhất điện cảm $(L_1 - M)$, theo hình 9-8b, phương trình cho vòng này:

$$\begin{aligned} R_1 + j\omega(L_1 - M)\mathbf{I}_1 + j\omega M(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) &= \mathbf{V}_1 \\ (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

Tương tự, nếu cho điện cảm $(L_2 - M)$ vào mạch vòng thứ hai, phương trình cho mạch vòng cùng tương tự

$$(R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1 = 0$$

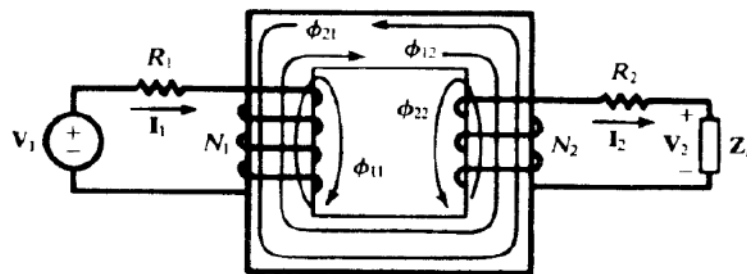
Như vậy, mạch điện trên hình 9–8a và 9–8b là tương đương.

9.2. Máy biến áp

9.2.1. Máy biến áp tuyến tính

Máy biến áp là tên gọi chung cho các thiết bị điện hoạt động trên nguyên lý cặp hồ cảm giữa hai hoặc nhiều hơn mạch điện. Thuật ngữ máy biến áp lõi thép chỉ những máy có cặp hồ cảm dựa trên mạch từ được làm từ thép đặc biệt dẫn từ thông và cực đại hóa hiệu ứng cặp hồ cảm. Thuật ngữ máy biến áp lõi không khí thường thấy ở các thiết bị điện tử và vô tuyến. Nhóm máy biến áp thứ ba có cấu trúc một cuộn dây bao quanh cuộn còn lại trên lõi bằng vật liệu phi kim với lõi di chuyển được bằng vật liệu từ ở giữa có khả năng thay đổi hệ số cặp hồ cảm.

Điều đáng chú ý ở đây có liên quan trực tiếp đến loại máy biến áp lõi thép ở độ từ thẩm tương đối μ của thép được giả thiết không đổi trong phạm vi điện áp và dòng điện làm việc. Cấu trúc của máy biến áp thường có hai cuộn dây, tuy nhiên cũng có những trường hợp ít gặp máy có từ ba cuộn dây trở lên.



Hình 9–9

Trong hình 9–9, cuộn dây thứ nhất (sơ cấp) có N_1 vòng, được kết nối với nguồn áp V_1 , và cuộn dây thứ hai (thứ cấp) có N_2 vòng, được kết nối với trở kháng tải Z_L . Điện trở của các cuộn dây được ký hiệu bằng các điện trở R_1 và R_2 . Dòng điện I_2 tạo nên từ thông $\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$, trong khi dòng điện I_1 tạo nên từ thông $\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{11}$. Với hệ số cặp hồ cảm k , từ thông rò của mỗi cuộn dây:

$$\phi_{11} = (1 - k)\phi_1 \quad \phi_{22} = (1 - k)\phi_2$$

Tương ứng với từ thông rò, điện cảm rò có thể được xác định theo tự cảm:

$$L_{11} = (1 - k)L_1 \quad L_{22} = (1 - k)L_2$$

Do đó trở kháng rò:

$$X_{11} = (1-k)X_1 \quad X_{22} = (1-k)X_2$$

Có thể thấy rằng điện cảm của cuộn dây có N vòng tỉ lệ thuận với N^2 . Từ đó hai cuộn dây máy biến áp có chung lõi, nên:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (9-10)$$

Từ thông chung của hai cuộn dây trong hình 9-9 chính là từ thông hổ cảm $\phi_m = \phi_{12} - \phi_{21}$. Từ thông này tạo ra các sđđ emf theo định luật Faraday

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

Nếu gọi tỉ số vòng dây $a = \frac{N_1}{N_2}$, ta có thể suy ra phương trình cơ bản của máy biến áp:

$$\frac{e_1}{e_2} = a \quad (9-11)$$

Trong miền phức: $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_2 = a$

Quan hệ giữa từ thông hổ cảm và điện cảm có thể thực hiện phân tích sức điện động cảm ứng trong cuộn dây thứ hai như sau:

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d(k\phi_2)}{dt}$$

Áp dụng công thức 9-6 và 9-5a, ta có thể viết biểu thức cho sức điện động e_2 :

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - kL_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{a} \frac{di_2}{dt}$$

Giải hai phương trình 9-8 và 9-10, ta được:

$$M = k\sqrt{(a^2 L_2)L_2} = kaL_2$$

Dòng điện từ hóa được định nghĩa theo phương trình:

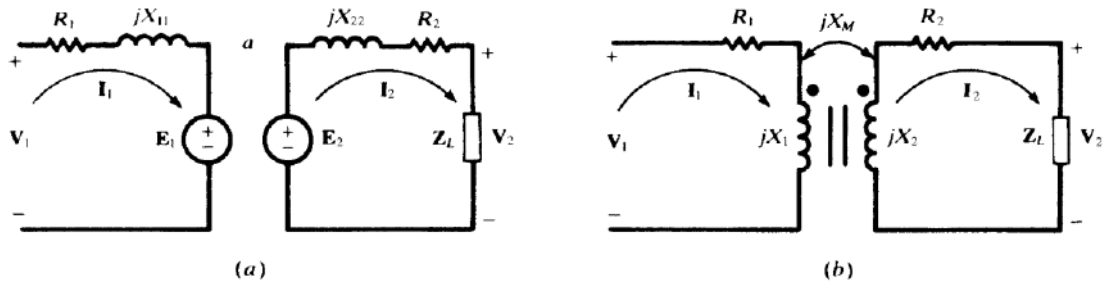
$$i_1 = \frac{i_2}{a} + i_\phi \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_2}{a} + \mathbf{I}_\phi \quad (9-12)$$

Từ đây ta có:

$$e_2 = M \frac{di_\phi}{dt} \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{E}_2 = jX_M \mathbf{I}_\phi \quad (9-13)$$

Theo công thức 9-13, dòng điện từ hóa được dùng để xác định từ thông hổ cảm trong lõi thép.

Trong trường hợp dùng sức điện động của cuộn dây và trở kháng tản, ta có thể xây dựng được sơ đồ tương đương của máy biến áp tuyến tính, trong đó cuộn thứ nhất và cuộn thứ hai là riêng rẽ như trong hình 9–10a; để so sánh giữa hai cuộn, sơ đồ mạch với các chấm cực tính được sử dụng như trong hình 9–10b.



Hình 9–10

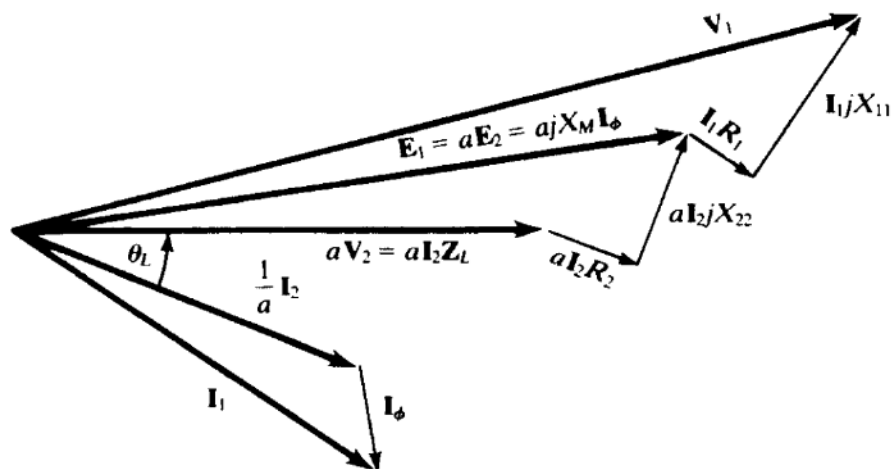
Ví dụ: Vẽ đồ thị véc tơ phức tương ứng với sơ đồ mạch điện hình 9–10a, và dựa trên đồ thị tính trở kháng vào của máy biến áp.

Đồ thị véc tơ trên hình 9–11, trong đó góc θ_L là góc của trở kháng tải Z_L . Theo công thức 9–13, sức điện động E_1 và E_2 được tạo ra từ dòng từ hóa I_ϕ với góc lệch 90° . Các phương trình dùng để vẽ đồ thị véc tơ:

$$V_1 = ajX_M I_\phi + (R_1 + jX_{11})I_1$$

$$jX_M I_\phi = (R_2 + jX_{22} + Z_L)I_2 \rightarrow I_2 = \frac{jX_M}{R_2 + jX_{22} + Z_L} I_\phi$$

$$I_1 = \frac{1}{a} I_2 + I_\phi \rightarrow I_1 = \frac{1}{a} \frac{jX_M}{R_2 + jX_{22} + Z_L} I_\phi + I_\phi$$



Hình 9–11

Khử I_ϕ và I_2 từ các phương trình trên

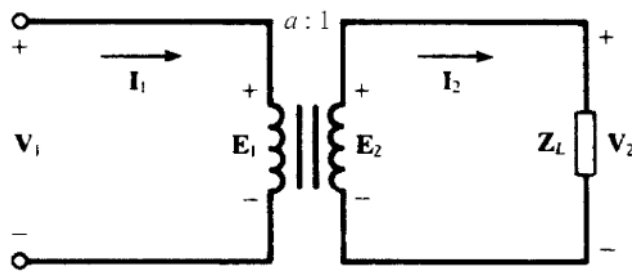
$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{in} = R_1 + jX_{11} + a^2 \frac{(jX_M/a)(R_2 + jX_{22} + \mathbf{Z}_L)}{(jX_M/a) + (R_2 + jX_{22} + \mathbf{Z}_L)} \quad (9-14a)$$

Nếu ta dùng phương trình dòng mắt lưới cho sơ đồ mạch hình 9-10b, ta có trở kháng vào $\mathbf{Z}_{in}$:

$$\mathbf{Z}_{in} = R_1 + jX_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + \mathbf{Z}_L} \quad (9-14b)$$

9.2.2. Máy biến áp lý tưởng

Máy biến áp lý tưởng thực chất chỉ là biến áp giả tưởng trong đó không có tổn hao và lõi thép có độ từ thẩm vô cùng lớn, và hiệu ứng cặp hồ cảm không có thành phần từ thông rò. Đối với các máy biến áp công suất lớn, tổn hao thường nhỏ so với công suất truyền tải do đó những đặc trưng của biến áp lý tưởng rất hữu dụng trong thực tế.



Hình 9-12

Trong hình 9-12, điều kiện không tổn hao có thể được biểu diễn thông qua:

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2^*$$

Do không có tổn hao nên:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 = a\mathbf{E}_2 = a\mathbf{V}_2$$

Và a là số thực nên:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = a \quad (9-15)$$

Như vậy trở kháng vào được tính theo biểu thức:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{a\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2/a} = a^2 \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = a^2 \mathbf{Z}_L \quad (9-16)$$

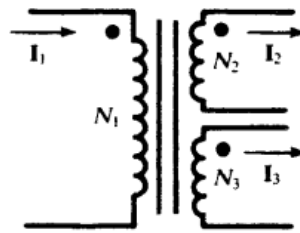
Qui tắc dấu chấm ampe-vòng

Từ công thức $a = N_1 / N_2 \rightarrow N_1 \mathbf{I}_1 = N_2 \mathbf{I}_2$

Điều này cho thấy số ampe-vòng của cuộn thứ nhất đúng bằng số ampe-

vòng của cuộn thứ hai. Qui tắc này đúng cả cho những máy biến áp có hơn hai cuộn dây. Trong biểu thức, dấu dương cho trường hợp dòng điện đi vào cực có dấu chấm của cuộn dây và dấu âm, ngược lại, cho dòng điện đi vào cực không có dấu chấm. Theo qui tắc dấu chấm ampe-vòng, tổng đại số ampe-vòng của tất cả các cuộn dây máy biến áp bằng không.

Ví dụ: máy biến áp ba cuộn dây, trong hình 9-13, có số vòng $N_1 = 20$; $N_2 = N_3 = 10$. Hãy xác định dòng điện I_1 nếu biết các dòng $I_2 = 10\angle -53^\circ$; $I_3 = 10\angle -45^\circ$



Hình 9-13

Phương trình ampe-vòng máy biến áp

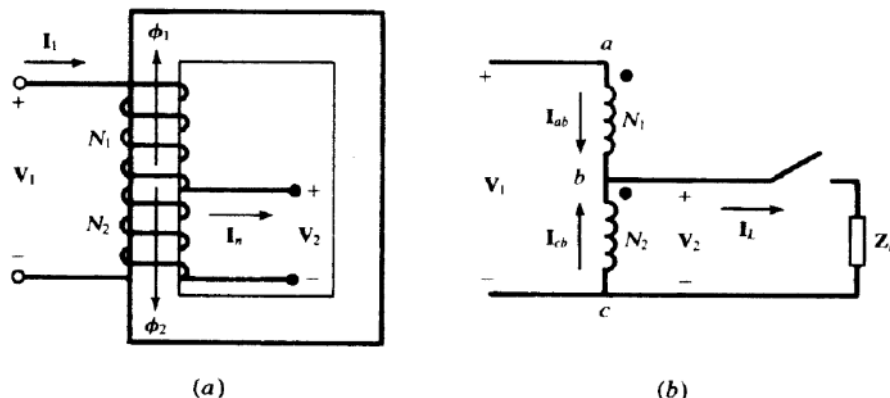
$$N_1 I_1 - N_2 I_2 - N_3 I_3 = 0$$

$$20 I_1 - 10 \cdot 10\angle -53^\circ - 10 \cdot 10\angle -45^\circ = 0$$

$$I_1 = 6,54 - j7,54 = 9,98\angle -49^\circ$$

9.2.3. Máy biến áp tự ngẫu

Máy biến áp tự ngẫu là một cuộn dây có nhiều cực ra đặt trên lõi thép từ. Một đầu mạch điện được nối với các cực cuối cuộn dây, mạch còn lại nối với một cực cuối và một trong số các cực ra ở phần giữa cuộn dây.



Hình 9-14

Theo sơ đồ trên hình 9-14a, tỉ số biến áp được xác định:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = a + 1$$

Tỉ số biến áp này lớn hơn trường hợp biến áp lý tưởng hai cuộn dây có cùng tỉ số vòng dây các cuộn. Dòng điện I_1 ở phần trên của cuộn dây có N_1 vòng tạo nên từ thông ϕ_1 . Theo định luật điện từ, dòng điện tự nhiên ở phần dưới cuộn dây tạo nên từ trường theo hướng ngược lại ϕ_2 . Và như vậy dòng điện I_n ra khỏi cuộn dây ở cực ra (hình 9–14b). Tương tự như máy biến áp lý tưởng, máy biến áp tự ngẫu lý tưởng cũng có quan hệ công suất phức vào ra như sau:

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \mathbf{I}_{ab}^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_L^*$$

$$\frac{\mathbf{I}_L}{\mathbf{I}_{ab}} = a + 1$$

Theo sơ đồ mạch: $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{ab} + \mathbf{I}_{cb}$

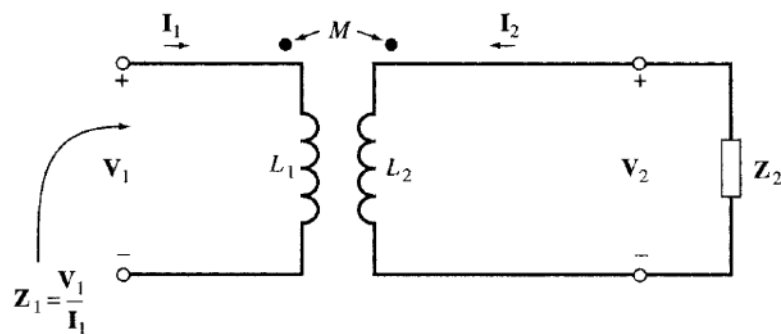
$$\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_L^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^* + \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{cb}^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^* + \frac{1}{2} a \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^*$$

9.2.4. Trở kháng qui đổi về đầu vào

Tải $\mathbf{Z}_2$ được nối với cuộn thứ hai của máy biến áp như trong hình 9–15, góp phần vào trở kháng vào của máy biến áp. Phần trở kháng này được gọi là trở kháng qui đổi về đầu vào của tải $\mathbf{Z}_2$. Sử dụng phương trình thông số cực của cặp hồ cảm và áp dụng định luật Kirchhoff về áp cho mạch vòng thứ hai:

$$\mathbf{V}_1 = L_1 s \mathbf{I}_1 + M s \mathbf{I}_2$$

$$0 = M s \mathbf{I}_1 + L_2 s \mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_2 s \mathbf{I}_2$$



Hình 9–15

Khử $\mathbf{I}_2$ từ hai phương trình trên, tìm $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{V}_1 / \mathbf{I}_1$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{\mathbf{Z}_2 + L_2 s} \quad (9-17)$$

Đối với trạng thái ổn định, ta thay $s = j\omega$

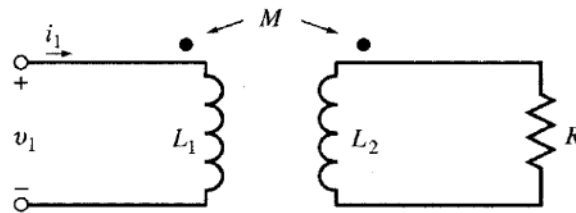
$$\mathbf{Z}_1 = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \quad (9-18)$$

Trở kháng qui đổi:

$$\mathbf{Z}_{reflect} = \frac{M^2 \omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \quad (9-19)$$

Trở kháng $\mathbf{Z}_2$ được nhìn từ nguồn có giá trị: $M^2 \omega^2 / (\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2)$. Thao tác qui đổi này thường được sử dụng khi có nhu cầu thiết lập kết nối trực tiếp tải với nguồn.

Ví dụ: Cho giá trị các phần tử trong mạch điện hình 9-16: $L_1 = 0,2 \text{ H}$; $L_2 = 0,1 \text{ H}$; $M = 0,1 \text{ H}$ và $R = 10 \Omega$. Tìm dòng điện i_1 với điện áp nguồn $v_1 = 142,3 \sin 100t \text{ V}$



Hình 9-16

Trở kháng vào với tần số $\omega = 100$ (công thức 9-18).

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{\mathbf{Z}_2 + j\omega L_2} \\ \mathbf{Z}_1 &= j100 \cdot 0,2 + \frac{0,1^2 \cdot 100^2}{10 + j100 \cdot 0,1} = j20 + \frac{100}{10 + j10} \\ \mathbf{Z}_1 &= 5 + j15 = 5\sqrt{10} \angle 71,6^\circ \end{aligned}$$

Dòng điện phức $\mathbf{I}_1$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} = 9 \angle -71,6^\circ \text{ A}$$

Dòng điện tức thời:

$$i_1 = 9 \sin(100t - 71,6^\circ) \text{ A}$$

Ví dụ: Thay nguồn cho mạch bằng $u(t)$ tìm đáp ứng cưỡng bức $i_{1,f}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(s) &= L_1 s - \frac{M^2 s^2}{\mathbf{Z}_2 + L_2 s} = 0,2s - \frac{0,01s^2}{10 + 0,1s} \\ \mathbf{Z}_1(s) &= \frac{s(s + 200)}{10(s + 100)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Y}_1(s) = \frac{10(s + 100)}{s(s + 200)} \end{aligned}$$

Với $t > 0$, nguồn áp $u(t) = 1 \text{ V}$, là hàm mũ e^{st} với $s = 0$ là cực của $\mathbf{Y}_1(s)$. Do đó $i_{1,f} = kt$ với $k = 1/L_1 = 5$.